Seminar Geometrie, Sommersemester 2010
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

# Charakterisierung der Cheegerkonstante

Olga Mayer, 2.06.2010

## 1. Ecken - Expansion eines Graphen

Ziel: obere und untere Schranken für den Eigenwert $\lambda_1$ zu finden, die von $g_G$ abhängig sind.

Zu zeigen: $2g_G \geq \lambda_1 \not> \frac{g_G^2}{2}$ i.A.

1) Aus $g_G \geq h_G$ ergibt sich: $2g_G \geq 2h_G \geq \lambda_1$
2) Annahme: es gilt $\lambda_1 > \frac{g_G^2}{2}$
Angabe eines Gegenbespiels widerlegt die Aussage.

**Theorem 1**

Für einen zusammenhängenden Graphen $G$ gilt:

$\lambda_1 > \frac{g_G^2}{4d+2dg_G^2}$

wobei $d$ den Maximalgrad bezeichnet.

`Beispiel`

Man betrachte $Q_n$.
Es ist $|Q_n| = 2^n$
Sei $|S| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
Dann gilt: $g_G = \min_S \frac{vol(\delta S)}{\min\left(vol(S), vol(\bar{S})\right)} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$

## 2. Charakterisierung der Cheeger-Konstante

Die Cheeger-Konstante wird mit einem zum
Rayleight Quotienten ähnlichem Term charakterisiert:

**Theorem 2**

Die Cheeger-Konstante $h_G$ vom Graphen $G$ ist gegeben durch

$$h_G = \inf_f \sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum_{x\in V} |f(x)-c| d_x} \qquad \left( = \inf_f \frac{\sum_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\inf_{c\in\mathbb{R}} \sum_{x\in V} |f(x)-c| d_x} \right)$$

wobei $f : V \to \mathbb{R}$ beliebig, aber nicht konstant ist.

*Beweis:*

Man zeige die Gleichheit in 2 Schritten:

1)
Man wähle $c$ so, dass $\sum\limits_{\substack{x \\ f(x)<c}} d_x \leq \sum\limits_{\substack{x \\ f(x)\geq c}} d_x$ und $\sum\limits_{\substack{x \\ f(x)\leq c}} d_x > \sum\limits_{\substack{x \\ f(x)>c}} d_x$

und definiere:
$\tilde{g}(\sigma) = |\{x, y\} \in E(G) : f(x) - c \leq \sigma < f(y) - c|$

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\sim y} |f(x) - f(y)| &= \int_{-\infty}^{0} \tilde{g}(\sigma)\, d\sigma + \int_{0}^{\infty} \tilde{g}(\sigma)\, d\sigma \\
&\geq h_G \left( \int_{-\infty}^{0} d\sigma \sum_{f(x)-c<\sigma} d_x + \int_{0}^{\infty} d\sigma \sum_{f(x)-c>\sigma} d_x \right) \\
&= h_G \sum_{x\in V} |f(x) - c|\, d_x
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow h_G \leq \inf_f \sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum_{x\in V} |f(x)-c| d_x}$$

2)
Man definiere die charakteristische Funktion $\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \\ -1 & x \notin X \end{cases}$

$$\sup_C \frac{\sum_{x\sim y} |\psi(x)-\psi(y)|}{\sum_{x\in V} |\psi(x)-C| d_x} = \sup_C \frac{2\left|E\left(X,\bar{X}\right)\right|}{(1-C)vol(X)+(1+C)vol(X)} = \frac{2\left|E\left(X,\bar{X}\right)\right|}{2vol(X)} = h_G$$

$$\Longrightarrow h_G \geq \inf_f \sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\sum\limits_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum\limits_{x\in V} |f(x)-c| d_x}$$

**Corollar**

Für einen Graphen $G$ gilt:

$$h_G \geq \inf_f \frac{\sum\limits_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum\limits_{x\in V} |f(x)| d_x} \geq \frac{1}{2} h_G$$

wobei $f : V(G) \to \mathbb{R}$ $\quad \sum\limits_{x\in V} f(x)\, d_x = 0$ genügt.

*Beweis:*

Sei $c$ wie im vorherigem Beweis definiert.
Ist $c \geq 0$, so folgt:

$$\sum_{x\in V} |f(x)|\, d_x = \sum_{\substack{x\in V \\ f(x)\geq 0}} |f(x)|\, d_x + \sum_{\substack{x\in V \\ f(x)\leq 0}} |f(x)|\, d_x \leq 2 \sum_{x\in V} |f(x)-c|\, d_x$$

Also $\sum\limits_{x\in V} |f(x)|\, d_x \leq 2 \inf\limits_c \sum\limits_{x\in V} |f(x)-c|\, d_x$

Analog für $c < 0$.

Dann ist

$$\inf_f \frac{\sum\limits_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum\limits_{x\in V} |f(x)| d_x} \geq \frac{1}{2} \inf_f \sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\sum\limits_{x\sim y} |f(x)-f(y)|}{\sum\limits_{x\in V} |f(x)-c| d_x} = \frac{1}{2} h_G$$

## 3. Modifizierte Cheegerkonstante

Weitere isoperimetrische Probleme sind für ein festes $m$ sind:

*Problem 3:*
Was ist die minimale Kanten Anzahl für eine Teilmenge $S$ von $m$ Knoten?

*Problem 4:*
Was ist die minimale Knoten-Anzahl für eineTeilmenge $S$ von $m$ Knoten?

**Definition**

Man setze $h'(S) = \frac{\left|E\left(S,\bar{S}\right)\right|}{\min\left(|S|,\left|\bar{S}\right|\right)}$.

Dann heißt $h'_G := \inf_S h'(S)$ die modifizierte Cheegerkonstante.

`Bemerkungen:`

1.) Es gilt: $h'_G \min_v d_v \leq h_G \leq h'_G \max_v d_v$

2.) Modifizierte Cheeger-Konstanten stehen in Beziehung zu den Eigenwerten von $L$ : $0 = \lambda'_0 \leq \lambda'_1 \leq ... \leq \lambda'_{n-1}$
mit $\lambda'_1 = \inf_f \sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{u\sim v}(f(u)-f(v))^2}{\sum_v (f(x)-c)^2} = \inf \frac{\langle f,Lf\rangle}{\langle f,f\rangle}$
wobei $f$ eine beliebige Funktion ist, die $\sum f(v) = 0$ erfüllt, aber nicht identisch $0$ ist.

3) Für Eigenwerte $\lambda_i$ von $\mathcal{L}$ gilt : $0 \leq \lambda'_i \leq \lambda_i \max_v d_v$

**Abschätzung von $\lambda'_i$ durch die modifizierte Cheegerkonstante**

Es gilt $2h'_G \geq \lambda'_1 \geq \frac{\lambda_1'^2}{2\max_v d_v}$