Seminar Geometrie, Sommersemester 2010
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Die Cheeger-Ungleichung für Graphen

Frank Pfäffle, 26. Mai 2010

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ bezeichne d_v den Grad von v wie gehabt.

Definition 1. Es sei eine Teilmenge $S \subset V$. Dann ist das *Volumen* von S gegeben durch

$$\mathrm{vol}(S) = \sum_{v \in S} d_v.$$

Das *Komplement* von S ist $\overline{S} = V \setminus S$. Als *Kantenrand* von S bezeichnet man die Menge

$$\partial S = \big\{\{u, v\} \in E \,\big|\, u \in S \text{ und } v \notin S\big\},$$

und den *Knotenrand* von S nennt man die Menge

$$\delta S = \big\{v \in \overline{S} \,\big|\, \exists u \in S \text{ mit } \{u, v\} \in E\big\}.$$

Definition 2. Für Teilmengen $A, B \subset V$ setzen wir

$$E(A, B) = \big\{\{u, v\} \in E \,\big|\, u \in A \text{ und } v \in B\big\}.$$

Bemerkung 1. *Für jedes $S \subset V$ gilt $\partial S = E(S, \overline{S})$.*

Zwei typische *isoperimetrische* Probleme sind:

Gegeben sei jeweils eine Zahl m. Finde eine Menge von Knoten $S \subset V$ mit $m \leq \mathrm{vol}(S) \leq \mathrm{vol}(\overline{S})$, sodass

a) der Kantenrand ∂S möglichst wenige Kanten enthält, oder

b) der Knotenrand δS möglichst wenige Knoten enthält.

Definition 3. (Kanten-Expansion.) Für $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ setzen wir

$$h_G(S) = \frac{\#\, E(S, \overline{S})}{\min\big\{\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(\overline{S})\big\}},$$

und die *Cheeger-Konstante* von G ist gegeben durch

$$h_G = \min_{\substack{S \subset V \\ \emptyset \neq S \neq V}} h_G(S).$$

Bemerkung 2. *Hat G mindestens zwei Knoten, so ist $h_G > 0$.*

Bemerkung 3. *Die Cheeger-Konstante zu berechnen ist äquivalent dazu, dass man das Problem* a) *löst, denn es gilt $\#\,(\partial S) \geq h_g \cdot \mathrm{vol}(S)$.*

Definition 4. (Knoten-Expansion.) Für $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ definieren wir

$$g_G(S) = \frac{\mathrm{vol}(\delta S)}{\min\big\{\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(\overline{S})\big\}} \quad \text{sowie} \quad \overline{g}_G(S) = \frac{\#\,(\delta S)}{\min\big\{\#\, S, \#\, \overline{S}\big\}},$$

und wir setzen

$$g_G = \min_{\substack{S \subset V \\ \emptyset \neq S \neq V}} g_G(S) \quad \text{sowie} \quad \overline{g}_G = \min_{\substack{S \subset V \\ \emptyset \neq S \neq V}} \overline{g}_G(S).$$

Bemerkung 4. *Ist G ein k-regulärer Graph, so gilt $g_G(S) = \overline{g}_G(S)$ für alle $S \subset V$ und damit auch $g_G = \overline{g}_G$.*

Die Cheeger-Konstante lässt sich gegen den kleinsten positven Laplace-Eigenwert λ_G von G abschätzen.

Lemma 1 (Lemma 2.1 in [1])**.** *Für die Cheeger-Konstante gilt folgende untere Abschätzung:*

$$2 \cdot h_G \geq \lambda_G.$$

Satz 1 (Cheeger-Ungleichung, Thm. 2.2 in [1])**.** *Die Cheeger-Konstante lässt sich nach oben abschätzen durch*

$$\lambda_G > \frac{{h_G}^2}{2}.$$

Der Beweis von Satz 1 liefert sogar noch etwas mehr, nämlich

Satz 2 (Thm. 2.3 in [1])**.** *Es gilt: $\lambda_G \geq 1 - \sqrt{1-(h_g)^2}$.*

Und außerdem liefert der Beweis von Satz 1 auch die folgende untere Eigenwertabschätzung:
Sei f eine harmonische Eigenfunktion zum Eigenwert λ_G. Wir setzen für jeden Knoten $v \in V$

$$C_v = \big\{\{u,w\} \in E \,\big|\, f(u) \leq f(v) < f(w)\big\}, \text{ und}$$

$$\alpha = \min_v \frac{\#C_v}{\min\big\{ \sum\limits_{\substack{u \\ f(u)\leq f(v)}} d_u \,, \sum\limits_{\substack{u \\ f(u)>f(v)}} d_u \big\}}.$$

Dann gilt:

$$\lambda_G \geq 1 - \sqrt{1-\alpha^2}$$

Literatur

[1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997