Eigenwerte und Zufallswege II

Anselm Mantei, 19.05.2010

Korollar

- Für einen gewichteten Graphen mit mindestens 3 Knoten können wir einen modifizierten random walk so wählen, dass

$$\Delta(s) \leq e^{-c}$$

wenn

$$t \geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} \log \frac{\text{vol}G}{\min_x d_x}$$

wobei $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{1+c}$

Bemerkung

Der relative punktweise Abstand (RPD), der im letzten Vortrag eingeführt wurde, wird uns nun bei der Einführung weiterer Konvergenzbegriffe helfen.

$$\Delta(s) = \max_{x,y} \frac{|P^s(y,x) - \pi(x)|}{\pi(x)}$$

Total Variation Distance

- Ein weiterer Begriff zur Konvergenzmessung ist der sogenannte total variation distance (TVD), welcher halb so groß wie die Maximumnorm ist:

$$\begin{aligned} \Delta_{TV}(s) &= \max_{A \subset V(G)} \max_{y \in V(G)} \left| \sum_{x \in V(G)} P^s(y,x) - \pi(x) \right| \\ &= \frac{1}{2} \max_{y \in V(G)} \sum_{x \in V(G)} |P^s(y,x) - \pi(x)| \end{aligned}$$

- Der TVD ist nach oben hin begrenzt durch den RPD, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta_{TV}(s) &= \max_{A \subset V(G), \text{vol} A \leq \frac{\text{vol} G}{2}} \max_{y \in V(G)} \left| \sum_{x \in V(G)} P^s(y, x) - \pi(x) \right| \\ &\leq \max_{A \subset V(G), \text{vol} A \leq \frac{\text{vol} G}{2}} \sum_{x \in A} \pi(x) \Delta(s) \\ &\leq \frac{1}{2} \Delta(s)\end{aligned}$$

- Demzufolge ist jede Konvergenzschranke des RPD auch eine Konvergenzschranke für den TVD

Der χ -squared distance

- Es gibt neben dem TVD und dem RPD einen weiteren Konvergenzbegriff, den sogenannten χ -squared distance (XSD), gekennzeichnet durch $\Delta'(s)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta'(s) &= \max_{y \in V(G)} \left(\sum_{x \in V(G)} \frac{(P^s(y, x) - \pi(x))^2}{\pi(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \max_{y \in V(G)} \sum_{x \in V(G)} |P^s(y, x) - \pi(x)| \\ &= 2\Delta_{TV}(s)\end{aligned}$$

- Der XSD ist ebenfalls wie der TVD durch den RPD von oben beschränkt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta'(s) &= \max_{y \in V(G)} \left(\sum_{x \in V(G)} \frac{(P^s(y, x) - \pi(x))^2}{\pi(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_{y \in V(G)} \left(\sum_{x \in V(G)} (\Delta(s))^2 * \pi(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Delta(s)\end{aligned}$$

Definition

- G ist vertex-transitive, falls es einen Automorphismus $f: V(G) \rightarrow V(G)$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$\forall x, y \in V(G) : x \sim y \iff f(x) \sim f(y)$$

Theorem

- Sei G ein vertex transitiver Graph, dann konvergiert ein random walk unter dem TVD oder dem XSD nach s Schritten gegen die Gleichverteilung und die Anzahl der Schritte ist nach oben hin durch $(1 - \lambda_i)^{2s}$ (λ_i ist Eigenwert von $\mathcal{L}$) begrenzt. Es gilt:

$$\Delta_{TV}(s) \leq \frac{1}{2} \Delta'(s) = \frac{1}{2} (\sum_{i \neq 0} (1 - \lambda_i)^{2s})^{\frac{1}{2}}$$

Beweis

- Seien Θ_0 , ϕ_i und ψ_x wie folgt definiert:

Θ_0 ist die Projektion auf die Eigenfunktion ϕ_0

ϕ_i ist die i -te Eigenfunktion von $\mathcal{L}$

$$\psi_x = \sum_i \phi_i(x) \phi_i$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \Delta'(s)^2 &\geq \sum_y \frac{(P^s(x,y) - \pi(y))^2}{\pi(y)} \\ &= \sum_x \psi_x ((I - \mathcal{L})^{2s} - \Theta_0) \psi_x^t \\ &= \sum_x (\sum_i \phi_i(x) \phi_i) ((I - \mathcal{L})^{2s} - \Theta_0) (\sum_i \phi_i(x) \phi_i)^t \\ &= \sum_x \sum_{i \neq 0} \phi_i^2(x) (1 - \lambda_i)^{2s} \\ &= \sum_{i \neq 0} \sum_x \phi_i^2(x) (1 - \lambda_i)^{2s} \\ &= \sum_{i \neq 0} (1 - \lambda_i)^{2s} . \end{aligned}$$

□

Beispiel

- Gegeben sei ein n -cube Q_n , dann sind seine Eigenwerte gegeben durch $\frac{2k}{n}$ mit einer Vielfachheit von $\binom{n}{k} \forall k = 0, \dots, n$. Die angepassten Eigenwerte für den LRW sind $\lambda'_k = \frac{\lambda_k n}{n+1}$. Wenden wir nun obiges Theorem an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta_{TV}(s) &\leq \frac{1}{2} \Delta'(s) = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n (1 - \frac{2k}{n+1})^{2s})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n e^{k \log n - \frac{4ks}{n+1}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{-c} \end{aligned}$$

$$\text{falls } s \geq \frac{(n+1)(\log 4 - (k+1) \log n - 2c)}{-4k}$$

- Ebenso können wir die Konvergenzrate des LRW unter dem RPD betrachten. Angenommen wir bezeichnen die Knoten von Q_n durch Teilmengen einer Reihe $\{1, \dots, n\}$. Die orthonormalen Eigenfunktionen ϕ_S für $S \subset \{1, \dots, n\}$ seien gegeben durch:

$$\phi_S(X) = \frac{(-1)^{|S \cap X|}}{2^{\frac{|S|}{2}}}$$

für jedes $X \subset \{1, \dots, n\}$. Für einen Knoten, der durch die Teilmenge S bezeichnet ist, lautet die charakteristische Funktion:

$$\psi_X = \sum_S \frac{(-1)^{|S \cap X|}}{2^{\frac{|S|}{2}}} \phi_S.$$

Demzufolge ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{|P^s(X, Y) - \pi(Y)|}{\pi(Y)} &= |2^n \psi_X P^s \psi_Y^t - 1| \\ &\leq |2^n \psi_X P^s \psi_X^t - 1| \\ &= \sum_{S \neq \emptyset} \left(1 - \frac{2^{|S|}}{n+1}\right)^s \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2^k}{n+1}\right)^s \end{aligned}$$

Also erhalten wir für den RPD:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 - \frac{2^k}{n+1}\right)^s \\ &\leq \sum_{k=1}^n e^{k \log n - \frac{2^k s}{n+1}} \\ &\leq e^{-c} \end{aligned}$$

falls

$$s \geq \frac{(n+1)(c+(k+1)\log n)}{2^k}$$

Demzufolge ist die Konvergenzrate des RPD auf dem Q_n ungefähr doppelt so hoch wie die des TVD. Allgemein können $\Delta(s)$, $\Delta'(s)$ und $\Delta_{TV}(s)$ aber sehr unterschiedlich sein.

Literatur

- [1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997