

Eigenwerte Gewichteter Graphen

Seminar Geometrie bei Prof. C. Bär und Dr. Frank Pfäffle, Sommersemester 2010,

Fachbereich Mathematik, Universität Potsdam

Ralf Splitt

3.1 Gewichtete Graphen

Definition 3.1 *Ein Graph mit Knoten V und Ecken E heißt gewichteter Graph, wenn zu ihm eine Gewichtsfunktion $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gehört, für die gilt:*

$$w(u, v) = w(v, u),$$

$$w(u, v) \geq 0,$$

$$w(u, v) = 0 \text{ falls } \{u, v\} \notin E.$$

Bemerkung 3.2 $w(v, v)$ kann durchaus positiv sein.

Bemerkung 3.3 Wir können jeden ungewichteten Graph als gewichteten Graph mit Gewichtsfunktion

$$w(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \sim v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auffassen.

Definition 3.4 Der Grad d_v des Knotens v eines gewichteten Graphen ist:

$$d_v = \sum_u w(u, v).$$

Ferner definieren wir das Volumen:

$$\text{vol}(G) = \sum_v d_v.$$

Definition 3.5 Die $n \times n$ Matrizen $L, T, T^{-\frac{1}{2}}, \mathcal{L}$ ergeben sich für Gewichtete Graphen wie folgt:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{v_i} - w(v_i, v_i) & \text{falls } i = j \\ -w(v_i, v_j) & \text{falls } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} d_{v_i} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_{ij}^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_{v_i}}} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} 1 - \frac{w(v_i, v_i)}{d_{v_i}} & \text{falls } i = j \text{ und } d_{v_i} \neq 0 \\ -\frac{w(v_i, v_j)}{\sqrt{d_{v_i} d_{v_j}}} & \text{falls } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 3.6 Wie bisher gilt wieder:

$$\mathcal{L} = T^{-\frac{1}{2}} L T^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemma 3.7 Für eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$L f(x) = \sum_{\substack{y \\ x \sim y}} (f(x) - f(y)) w(x, y).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} L f(x) &= \sum_y L(x, y) f(y) = L(x, x) f(x) + \sum_{\substack{y \\ x \sim y}} L(x, y) f(y) = (d_x - w(x, x)) f(x) - \sum_{\substack{y \\ x \sim y}} w(x, y) f(y) = \\ &= \left(\sum_{\substack{y \\ x \sim y}} (w(x, y)) + w(x, x) - w(x, x) \right) f(x) - \sum_{\substack{y \\ x \sim y}} (w(x, y) f(y)) = \sum_{\substack{y \\ x \sim y}} (f(x) - f(y)) w(x, y) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.8 Für die Eigenfunktion g von $\mathcal{L}$, bezeichne f wieder die harmonische Eigenfunktion mit:

$$f = T^{-\frac{1}{2}} g; \quad g = T^{\frac{1}{2}} f$$

Bemerkung 3.9 Für die kleinsten positiven Eigenwerte λ_G von $\mathcal{L}$ und den Rayleigh-Quotienten gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}\lambda_G &= \inf_{g \perp T^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}} \frac{\langle g, \mathcal{L} \rangle}{\langle g, g \rangle} \\ &= \inf_f \frac{\sum_{x \in V} f(x) L f(x)}{\sum_{x \in V} f^2(x) dx} \\ &= \inf_f \frac{\sum_{x \sim y} (f(x) - f(y))^2 w(x, y)}{\sum_{x \in V} f^2(x) dx}\end{aligned}$$

3.2 Kontraktion von Graphen

Bei der Kontraktion eines Graphen G verschmelzen zwei Knoten u_o, v_o zu einem gemeinsamen Knoten v^* . Somit entsteht ein neuer Graph H ohne u_o und v_o , dafür aber mit v^* . Für die Gewichtsfunktion w gilt dabei:

$$\begin{aligned}w(x, v^*) &= w(x, u_o) + w(x, v_o) \\ w(v^*, v^*) &= w(u_o, u_o) + w(v_o, v_o) + 2(w(u_o, v_o)).\end{aligned}$$

Sollen bei der Kontraktion mehr als zwei Knoten verschmelzen, wird die Kontraktion zweier Knoten mehrfach ausgeführt.

Bemerkung 3.10 Für den Grad des neuen Knotens gilt:

$$d_{v^*} = d_{u_o} + d_{v_o}.$$

Bemerkung 3.11 $V_G \cap V_H$ ist die Menge der (von der Kontraktion nicht betroffenen) gemeinsamen Knoten von G und H .

$$V_G \cap V_H = V_G \setminus \{u_o, v_o\} = V_H \setminus \{v^*\}.$$

Bemerkung 3.12 Für die Matrix L_H des Graphen H , die Matrix L_G des Graphen G und $x, y \in (V_G \cap V_H)$ gilt:

$$\begin{aligned}L_H(x, y) &= L_G(x, y) \\ L_H(x, v^*) &= L_G(x, u_o) + L_G(x, v_o) \\ L_H(v^*, v^*) &= L_G(u_o, u_o) + L_G(u_o, v_o) + L_G(v_o, u_o) + L_G(v_o, v_o).\end{aligned}$$

Bemerkung 3.13 Für die Matrizen $\mathcal{L}_H$ und $\mathcal{L}_G$ gilt das nicht.

3.3 Die Eigenwerte λ_G und λ_H

Im Grunde genommen erhofft man sich durch die Kontraktion, dass der kleinste positive Eigenwert λ_H von H (bzw. $\mathcal{L}_H$) etwas einfacher zu finden ist als λ_G . Denn wir bekommen nun folgende Abschätzung für λ_G :

Lemma 3.14 (1.15 in [1])

Ist H ein aus Kontraktion von G hervorgegangener Graph, dann gilt:

$$\lambda_G \leq \lambda_H.$$

Beweis: Sei λ_H also der kleinste positive Eigenwert von H (bzw. $\mathcal{L}_H$) und f_H die zu λ_H gehörende harmonische Eigenfunktion auf V_H . Dann ist:

$$\sum_{x \in V_H} f_H(x) d_x = 0.$$

Nun definieren wir uns eine Funktion auf V_G :

$$f_G(x) = \begin{cases} f_H(x) & \text{falls } x \in V_G \cap V_H \\ f_H(v^*) & \text{falls } x \in \{u_0, v_0\} \end{cases}$$

Dann gilt für f_G :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_G} f_G(x) d_x &= \sum_{x \in V_G \cap V_H} f_G(x) d_x + f_G(u_0) d_{u_0} + f_G(v_0) d_{v_0} \\ &= \sum_{x \in V_G \cap V_H} f_H(x) d_x + f_H(v^*) d_{v^*} = \sum_{x \in V_H} f_H(x) d_x = 0 \end{aligned}$$

3.3. DIE EIGENWERTE λ_G UND λ_H

Betrachtet man den Rayleigh-Quotienten, gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda_H &= \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_H}} \left(f_H(x) - f_H(y) \right)^2 w(x, y)}{\sum_{x \in V_H} f_H^2(x) d_x} \\
&= \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_G \cap V_H}} \left(f_H(x) - f_H(y) \right)^2 w(x, y) + \sum_{\substack{x \sim v^* \\ x \in V_G \cap V_H}} \left(f_H(x) - f_H(v^*) \right)^2 w(x, v^*)}{\sum_{x \in V_G \cap V_H} (f_H^2(x) d_x) + f_H^2(v^*) d_{v^*}} \\
&= \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_G \cap V_H}} \left(f_H(x) - f_H(y) \right)^2 w(x, y) + \sum_{\substack{x \sim v^* \\ x \in V_G \cap V_H}} \left(f_G(x) - f_G(u_0) \right)^2 w(x, u_0) + \sum_{\substack{x \sim v^* \\ x \in V_G \cap V_H}} \left(f_G(x) - f_G(v_0) \right)^2 w(x, v_0)}{\sum_{x \in V_G \cap V_H} (f_H^2(x) d_x) + f_H^2(v^*) d_{u_0} + f_H^2(v^*) d_{v_0}} \\
&\geq \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_G \cap V_H}} \left(f_H(x) - f_H(y) \right)^2 w(x, y) + \sum_{\substack{x \sim u_0 \\ x \in V_G \cap V_H}} \left(f_G(x) - f_G(u_0) \right)^2 w(x, u_0) + \sum_{\substack{x \sim v_0 \\ x \in V_G \cap V_H}} \left(f_G(x) - f_G(v_0) \right)^2 w(x, v_0)}{\sum_{x \in V_G \cap V_H} (f_G^2(x) d_x) + f_G^2(u_0) d_{u_0} + f_G^2(v_0) d_{v_0}} \\
&= \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_G \cap V_H}} \left(f_G(x) - f_G(y) \right)^2 w(x, y) + \sum_{\substack{x \sim u_0 \\ x \in V_G}} \left(f_G(x) - f_G(u_0) \right)^2 w(x, u_0) + \sum_{\substack{x \sim v_0 \\ x \in V_G}} \left(f_G(x) - f_G(v_0) \right)^2 w(x, v_0)}{\sum_{x \in V_G} (f_G^2(x) d_x)} \\
&= \frac{\sum_{\substack{x \sim y \\ x, y \in V_G}} \left(f_G(x) - f_G(y) \right)^2 w(x, y)}{\sum_{x \in V_G} (f_G^2(x) d_x)} \geq \lambda_G,
\end{aligned}$$

da λ_G Infimum dieses Quotienten über alle Funktionen f mit $\left(\sum_{x \in V_G} f(x) d_x = 0 \right)$ ist.

□

3.4 Beweis des Lemma 1.14

Lemma 3.15 *Sei G ein Graph mit Durchmesser $D \geq 4$ und sei k der maximale Grad von G . Dann gilt:*

$$\lambda_G = \lambda_1 \leq 1 - 2 \frac{\sqrt{k-1}}{k} \left(1 - \frac{2}{D}\right) + \frac{2}{D}.$$

zum Beweis: Wir wählen $t \in \mathbb{N}$ und $u, v \in V_G$ im Abstand $D \geq 2t + 2$. Nun kontrahieren wir G runter auf einen Pfad H von u nach v mit $2t + 2$ Kanten und den Ecken $u = x_0, x_1, \dots, x_t, z, y_t, \dots, y_1, y_0 = v$. Wobei alle Knoten im Abstand i von u zu x_i verschmelzen und alle Knoten im Abstand j von v zu y_j verschmelzen. Alle übrigen Knoten verschmelzen zu z . Um eine obere Abschätzung für λ_1 zu bekommen, definieren wir eine Funktion f wie folgt:

$$f(x_i) := a(k-1)^{\frac{-i}{2}}$$

$$f(y_i) := b(k-1)^{\frac{-i}{2}}$$

$$f(z) := 0$$

mit konstanten a und b so, dass $\sum_x f(x) d_x = 0$.

Folgende Abschätzungen werden für den Beweis benötigt:

- $d_{x_{i+1}} \leq (k-1)d_{x_i}$
- $(t+1) \frac{d_{x_t}}{(k-1)^t} \leq \sum_{i=0}^t \frac{d_{x_i}}{(k-1)^i}$
- $w(x_i, x_{i+1}) \leq \left(\frac{k+1}{k}\right) d_{x_i}$

Der eigentliche Beweis wird im Seminarvortrag gezeigt.

3.5 Literaturverzeichnis

- [1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997
- [2] Alon Nilli: *On the second eigenvalue of a graph*. Discrete Mathematics 91(2): 207-210 (1991)