Seminar Geometrie, Sommersemester 2010
bei Prof. Dr. C. Bär
Institut für Mathematik der Universität Potsdam

Eigenschaften des Spektrums eines Graphen

Martina Beiersdorff, 28. April 2010

Lemma 1 *Für einen Graphen G mit n Knoten gilt:*

(i)

$$\sum_i \lambda_i \leq n$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn G keine isolierten Knoten hat.

(ii) *Für $n \geq 2$ gilt:*

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{n-1}$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn G ein vollständiger Graph mit n Knoten ist.
Für ein Graph ohne isolierte Knoten gilt:

$$\lambda_{n-1} \geq \frac{n}{n-1}$$

(iii) *Für einen nicht vollständigen Graphen gilt: $\lambda_1 \leq 1$*

(iv) *Wenn G ein zusammenhängender Graph ist, dann ist $\lambda_1 \geq 0$. Wenn $\lambda_i = 0$ und $\lambda_{i+1} \neq 0$ ist,*
dann hat G genau $i+1$ zusammenhängende Komponenten.

(v) *Für alle $i < n-1$ gilt*

$$\lambda_i \leq 2$$

mit $\lambda_{n-1} = 2$ genau dann, wenn eine zusammenhängende Komponente von G bipartit und nichttrivial ist.

(vi) *Das Spektrum eines Graphen G ist die Vereinigung der Spektren der zusammenhängenden Komponenten von G.*

Lemma 2 *Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *G ist bipartit*

(ii) *G hat $i+1$ zusammenhängende Komponenten und $\lambda_{n-j} = 2$ für $1 \leq j \leq i+1$.*

(iii) *Für jedes λ_i ist $2 - \lambda_i$ auch ein Eigenwert von G.*

Definition 3 *Für zwei Knoten u und v ist der **Abstand** zwischen u und v die Anzahl der Kanten des kürzesten Weges zwischen u und v.*

Definition 4 *Der **Durchmesser** eines Graphen G ist der maximale Abstand zwischen zwei Knoten von G.*

Definition 5 *Es sei G ein Graph und v seien die Knoten von G und d_v sei der Grad von v. Dann heißt*

$$\operatorname{vol} G = \sum_v d_v$$

*das **Volumen** von G.*

Lemma 6 *Es sei D der Durchmesser eines zusammenhängenden Graphen G, dann gilt:*

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{D \operatorname{vol} G}$$

Lemma 7 *Es sei f die harmonische Eigenfunktion zu $\lambda_G = \inf_{f \perp T1} \frac{\sum_{u \sim v} (f(u)-f(v))^2}{\sum_v f(v)^2 d_v}$ Dann gilt für jeden Knoten $x \in V$:*

$$\frac{1}{d_x} \sum_{\substack{y \\ y \sim x}} (f(x) - f(y)) = \lambda_G f(x)$$

Mit Hilfe der Linearen Algebra können wir nun die Grenzen der Eigenwerte bezüglich des Grades eines Knotens verbessern. Dazu betrachte man die Spur von $(I - \mathcal{L})^2$. Dann erhält man zum einen:

$$\begin{aligned} Tr\,(I - \mathcal{L})^2 &= \sum_i (1 - \lambda_i)^2 \\ &\leq 1 + (n-1)\,\overline{\lambda}^2 \end{aligned}$$

wobei

$$\overline{\lambda} = \max_{i \neq 0} |1 - \lambda_i|$$

und zum anderen kann die Spur auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} Tr\,(I-\mathcal{L})^2 &= Tr\left(T^{-\frac{1}{2}}AT^{-1}AT^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \sum_{x,y}\frac{1}{\sqrt{d_x}}A\,(x,y)\,\frac{1}{d_y}A\,(y,x)\,\frac{1}{\sqrt{d_x}} \\ &= \sum_x \frac{1}{d_x} - \sum_{x\sim y}\left(\frac{1}{d_x}-\frac{1}{d_y}\right)^2 \end{aligned}$$

wobei A die Adjazenzmatrix ist.

Definition 8 *Es sei G ein Graph und v seien die Knoten von G und d_v sei der Grad von v, dann heißt d_H das **harmonische Mittel** über die Grade von v, wenn:*

$$\frac{1}{d_H} = \frac{1}{n}\sum_v \frac{1}{d_v}$$

Lemma 9 *Für einen k-regulären Graphen G mit n Knoten gilt:*

$$\max_{i\neq 0}|1-\lambda_i|^2 \geq \sqrt{\frac{n-k}{(n-1)\,k}}$$

Für einen allgemeinen Graphen gilt:

$$\frac{\sum\limits_{x\sim y}\left(\frac{1}{d_x}-\frac{1}{d_y}\right)^2}{\sum\limits_{x\in V}\left(\frac{1}{d_x}-\frac{1}{d_H}\right)^2 d_x} \leq \lambda_{n-1} \leq 1+\overline{\lambda}$$

Lemma 10 *Für einen Graphen G mit n Knoten genügt:*

$$1+(n-1)\,\overline{\lambda}^2 \geq \frac{n}{d_H}\left(1-\left(1+\overline{\lambda}\right)\left(\frac{k}{d_H}-1\right)\right)$$

wobei $\overline{\lambda} = \max\limits_{i\neq 0}|1-\lambda_i|$ und k ist der durchschnittliche Grad von G, also $k = \frac{1}{n}\sum\limits_v d_v$

Lemma 11 *Es sei G ein Graph mit dem Durchmesser $D \geq 4$ und k der maximale Grad von G. Dann gilt:*

$$\lambda_1 \leq 1 - 2\frac{\sqrt{k-1}}{k}\left(1-\frac{2}{D}\right)+\frac{2}{D}$$

Literatur

[1] F. Chung: *Spectral Graph Theory,* Amer. Math. Soc. 1997