

Graphen und ihre Eigenwerte

Frank Pfäffle, 21. April 2010

Einige Grundbegriffe aus der Graphentheorie

Definition 1. Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ von zwei Mengen V und E , für die $E \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ gilt. Elemente von $V = V(G)$ nennt man *Knoten* oder *Ecken* des Graphen, Elemente von $E = E(G)$ nennt man *Kanten*.

Definition 2. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *nicht-trivial*, falls $E \neq \emptyset$. Und man nennt einen Graphen *endlich*, wenn die Menge seiner Knoten nur endlich viele Elemente hat.

Definition 3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und seien $u, v \in V$ zwei Knoten. Man nennt u und v *benachbart* (oder *adjacent*), falls $\{u, v\} \in E$ gilt. Sind u und v benachbart, so schreiben wir $u \sim v$.

Definition 4. Sind in einem Graphen G je zwei Knoten benachbart, so nennt man G *vollständig*.

Definition 5. Sei G ein endlicher Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Als die *Adjazenzmatrix* von G bezeichnet man die $n \times n$ -Matrix $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, die gegeben ist durch

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 6. Ist v ein Knoten eines Graphen $G = (E, V)$, dann nennt man die Zahl $d_v = \#\{e \in E \mid v \in e\}$ den *Grad* von v . Ein Knoten v mit Grad $d_v = 0$ wird *isolierter Knoten* genannt.

Definition 7. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Hat in einem Graphen G jeder Knoten v den Grad $d_v = k$, dann bezeichnet man G als *k-regulär*.

Definition 8. Seien u und v Knoten eines Graphen G . Man sagt, dass *sich u und v durch einen Weg in G verbinden lassen*, falls es eine (endliche) Folge von Knoten gibt $w_0, w_1, \dots, w_r \in V(G)$ mit $w_0 = u$, $w_r = v$ und der Eigenschaft, dass w_{j-1} und w_j benachbart sind für alle $j = 1, \dots, r$.

Man stellt fest, dass „lassen sich durch einen Weg verbinden“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Knoten $V(G)$ ist. Die Äquivalenzklassen dieser Relation nennt man die (*Zusammenhangs-*)*Komponenten* von G .

Definition 9. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er nur aus einer (Zusammenhangs-)Komponente besteht.

Definition 10. Man nennt einen Graphen $G = (V, E)$ *bipartit*, wenn es eine disjunkte Zerlegung $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ gibt, sodass das Folgende gilt: Sind $u, v \in V$ benachbart, so ist entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder es ist $v \in V_1$ und $u \in V_2$.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn es zwei Klassen von Knoten gibt, sodass zwei Knoten aus derselben Klasse nicht benachbart sind.

Laplace-Matrix von Graphen und ihr Spektrum

Im Folgenden sei $G = (E, V)$ ein endlicher Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Wir definieren nun die drei $n \times n$ -Matrizen $L = (L_{ij})$, $T = (T_{ij})$ und $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{ij})$ durch:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{v_i}, & \text{falls } i = j, \\ -1, & \text{falls } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} d_{v_i}, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ -\frac{1}{\sqrt{d_{v_i} d_{v_j}}}, & \text{falls } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir bemerken, dass $L = T - A$.

Definition 11. Die Matrix $\mathcal{L}$ nennt man den *Laplace-Operator* oder die *Laplace-Matrix* des Graphen G .

Führen wir noch die $n \times n$ -Matrizen $T^{\frac{1}{2}} = (T^{\frac{1}{2}}_{ij})$ und $T^{-\frac{1}{2}} = (T^{-\frac{1}{2}}_{ij})$ ein durch

$$T^{\frac{1}{2}}_{ij} = \begin{cases} \sqrt{d_{v_i}} \cdot \delta_{ij}, & \text{falls } d_{v_i} \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$T^{-\frac{1}{2}}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_{v_i}}} \cdot \delta_{ij}, & \text{falls } d_{v_i} \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhalten wir, dass $\mathcal{L} = T^{-\frac{1}{2}} L T^{\frac{1}{2}}$ gilt und, sofern G keinen isolierten Knoten hat, auch $\mathcal{L} = \mathbb{I} - T^{-\frac{1}{2}} A T^{\frac{1}{2}}$.

Man kann jede Funktion auf der (endlichen) Menge der Knoten $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ als einen Vektor auffassen $(g(v_1), \dots, g(v_n))^T \in \mathbb{R}^n$, und auf diesen Vektor lässt sich die Laplace-Matrix anwenden:

$$\mathcal{L} \cdot \begin{pmatrix} g(v_1) \\ \vdots \\ g(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{L}g)(v_1) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}g)(v_n) \end{pmatrix}$$

Die Komponenten des Vektors auf der linken Seite lassen sich auch ausdrücken durch

$$(\mathcal{L}g)(v) = \frac{1}{\sqrt{d_v}} \sum_{u \sim v} \left(\frac{g(v)}{\sqrt{d_v}} - \frac{g(u)}{\sqrt{d_u}} \right)$$

Lemma 1. Für jeden endlichen Graphen ist die Laplace-Matrix diagonalisierbar und alle ihre Eigenwerte sind reell und nicht-negativ.

Wir bezeichnen die n Eigenwerte der Laplace-Matrix, jeweils entsprechend ihrer Vielfachheit genommen, aufsteigend durch

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}.$$

Definition 12. Die Menge dieser Eigenwerte heißt das *Spektrum von $\mathcal{L}$* oder auch das *Spektrum des Graphen G* .

Beispiel. Ein vollständiger Graph G mit n Knoten hat die Eigenwerte $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \frac{n}{n-1}$.

Für eine Funktion $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt man die *Dirichlet-Summe* von G als

$$\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2,$$

wobei $\sum_{u \sim v}$ die Summe über alle ungeordneten Paare $\{u, v\}$ mit $u \sim v$ meint.

Lemma 2. Für die Eigenwerte der Laplace-Matrix gilt:

a) Der kleinste Eigenwert ist $\lambda_0 = 0$, und $T^{\frac{1}{2}} 1 = (\sqrt{d_{v_1}}, \dots, \sqrt{d_{v_n}})^\top$ ist eine zugehörige harmonische Eigenfunktion.

b) Für den größten Eigenwert gilt

$$\lambda_{n-1} = \sup_{f \neq 0} \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v f(v)^2 d_v}.$$

c) Ist $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und bezeichnet $\mathcal{P}_{k-1}$ den Vektorraum, der von den harmonischen Eigenfunktionen aufgespannt wird, die zu $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ gehören, so ist

$$\lambda_k = \inf_{f \perp T \mathcal{P}_{k-1}} \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v f(v)^2 d_v}.$$

Manchmal interessiert man sich besonders für den ersten nichttrivialen Eigenwert $\lambda_G = \lambda_1$. Für diesen gibt es weitere Charakterisierungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{f \perp T 1} \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v f(v)^2 d_v} \\ &= \inf_f \sup_t \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v (f(v) - t)^2 d_v} \\ &= \inf_f \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v (f(v) - \bar{f})^2 d_v}, \end{aligned}$$

wobei

$$\bar{f} = \frac{\sum_v f(v) d_v}{\text{vol } G},$$

und $\text{vol } G$ das *Volumen des Graphen* G gegeben ist durch

$$\text{vol } G = \sum_v d_v.$$

Zuletzt erhalten wir:

$$\lambda_1 = \text{vol } G \inf_f \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{u,v} (f(u) - f(v))^2 d_u d_v},$$

wobei $\sum_{u,v}$ die Summe über alle ungeordneten Paare von Knoten u, v von G meint.

Definition 13. Sei $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators $\mathcal{L}$ eines Graphen, der keine isolierte Ecken hat. Dann nennt man $f = T^{-\frac{1}{2}} g$ eine *harmonische Eigenfunktion* von $\mathcal{L}$.

Bemerkung. Für jede harmonische Eigenfunktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_v f(v)^2 d_v}.$$

Literatur

- [1] F. Chung: *Spectral Graph Theory*, Amer. Math. Soc. 1997
- [2] R. Diestel: *Graphentheorie*, Springer-Verlag Hamburg 2006