

Hyperbolische Geometrie

Skript zum Seminar
Sommersemester 2010
Universität Potsdam

Dr. H. Wendland

Stand vom 12. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Die hyperbolische Ebene	1
1.1 Das Modell H^2 und die Axiome der hyperbolischen Geometrie . . .	1
1.2 Hyperbolische Dreiecke	6
1.3 Parallelität, Orthogonalität und Unverbindbarkeit von Geraden . . .	13
1.4 Saccherische Vierecke, Abstandslinien und die Funktion Π . . .	20
1.5 Anhang: Zur Axiomatik der hyperbolischen Geometrie	25
2 Die Isometriegruppe $\mathcal{B}_h(2)$	27
2.1 Lorentzorthogonale Matrizen	27
2.2 Translationen	30
2.3 Geradenspiegelungen	35
2.4 Drehungen und Grenzdrehungen	39
2.5 Anhang	41
3 Weitere Modelle der hyperbolischen Geometrie	45
3.1 Das Kleinsche Modell	45
3.2 Das Poincaré Modell	61

Kapitel 1

Die hyperbolische Ebene

Das Seminar schließt an den Abschnitt 3 (Hyperbolische Geometrie) der Vorlesung Elementargeometrie an. Symbole und Bezeichnungen werden weitgehend wie im Skript zu dieser Vorlesung verwendet. Die dort gegebenen Definitionen und bereits bewiesenen Sätze werden hier nur wiederholend bereitgestellt. Insbesondere betrifft dies die Erklärung der Grundbegriffe (1.1), die Sätze der hyperbolischen Trigonometrie (1.2) und die Eigenschaften des Minkowski-Produkts (1.3).

1.1 Das Modell H^2 und die Axiome der hyperbolischen Geometrie

In der Vorlesung zur Elementargeometrie (vgl. auch [1] Abschnitt 4.2) wurde ein Modell der hyperbolischen Ebene angegeben. Wir wiederholen hier kurz die Definitionen der erforderlichen Grundbegriffe (Punkte, Geraden, Zwischenrelation, Kongruenz von Strecken und Winkeln) dieses Modells und einige erste Folgerungen. Auf die Formulierung eines Axiomensystems und den Nachweis der Gültigkeit dieser Axiome im Modell verzichten wir hier. Es sei dazu auf die Ausführungen in [1] und gegebenenfalls auf entsprechende Übungsaufgaben im Kurs Elementargeometrie verwiesen.

Die Menge \mathcal{P} der Modellpunkte (kurz: Punkte) der Hyperbolischen Ebene H^2 ist die Punktmenge einer Schale eines zweischaligen Hyperboloids im \mathbb{R}^3 .

$$H^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1, x_1 > 0\}$$

Hierbei bezeichnet $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ das Minkowski-Produkt (auch: minkowskisches Skalarprodukt) im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 , also

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Für alle Vektoren $x, y \in H^2$ gilt $\langle\langle x, y \rangle\rangle \leq -1$, insbesondere ist $|\langle\langle x, y \rangle\rangle| = 1$ genau dann, wenn $x = y$ gilt.

Der hyperbolische Abstand $d_h(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in H^2$ ist diejenige eindeutig bestimmte reelle Zahl aus dem Intervall $[0, \infty)$ mit

$$\cosh(d_h(x, y)) = |\langle\langle x, y \rangle\rangle| = -\langle\langle x, y \rangle\rangle.$$

Mit dieser Abstandsfunktion wird H^2 zu einem metrischer Raum.

Die Menge \mathcal{G} der Modellgeraden (kurz: Geraden) der hyperbolischen Ebene bilden die sogenannten Großhyperbeln, die durch ebene Schnitte in H^2 erzeugt werden. Eine Großhyperbel indexGroßhyperbel ist eine Teilmenge von H^2 der Form $H^2 \cap E$, wobei E ein 2-dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 ist.

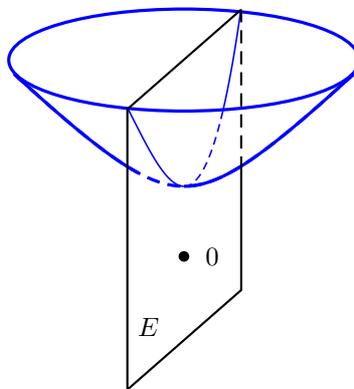


Abb. 1

Ist $G = H^2 \cap E$ eine Großhyperbel und $p \in G$. Dann heißen Vektoren $x \in E$ mit $\langle\langle x, p \rangle\rangle = 0$ Tangentenvektoren im Punkt p .

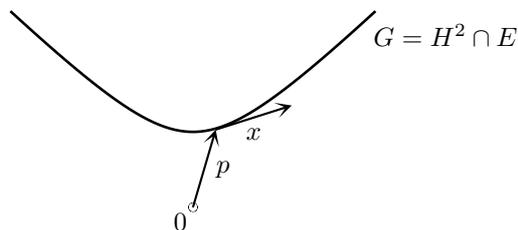


Abb. 2

1.1. DAS MODELL H^2 UND DIE AXIOME DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE 3

Die Tangentenvektoren an Großhyperbeln sind stets raumartig, d.h., es gilt $\langle\langle x, x \rangle\rangle > 0$.

Ist $G \subset H^2$ eine Großhyperbel, $p \in G$ und x ein Tangentenvektor an G in p mit $\langle\langle x, x \rangle\rangle = 1$, dann gilt $G = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot x$.

(Man kann nun die Gültigkeit der Inzidenzaxiome für $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ prüfen, wobei die Inzidenzrelation für $p \in \mathcal{P}$ und $G \in \mathcal{G}$ hier einfach durch $p \in G$ definiert ist.

So wird etwa die Existenz nichtkollinearer Punkte durch drei Punkte aus H^2 , die als Vektoren des \mathbb{R}^3 linear unabhängig sind, realisiert.)

Beispiel:

$$p = (1, 0, 0)^T, \quad q = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T, \quad r = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$$

Die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade durch p und q ist die Großhyperbel $G = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot (0, 1, 0)^T = (\cosh(t), \sinh(t), 0)^T$, die den Punkt r offensichtlich nicht enthält.

In Analogie zu den Großhyperbeln kann auch die Strecke zwischen zwei Punkten in H^2 als Teil einer Großhyperbel, also als ein Großhyperbelbogen parametrisiert werden.

Ein Großhyperbelbogen ist eine Teilmenge von H^2 der Form $\{c(t) \mid t \in [0, L]\}$, wobei $c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot x$ mit $p \in H^2$, $\langle\langle p, x \rangle\rangle = 0$, $\langle\langle x, x \rangle\rangle = 1$ und $L > 0$ ist.

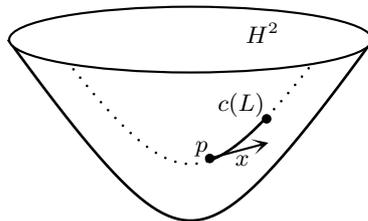


Abb. 3

L heißt die Länge des Großhyperbelbogens.

Bemerkung: Wegen $\cosh(d_h(p, c(t))) = -\langle\langle p, \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot x \rangle\rangle$
 $= -\cosh(t) \cdot \underbrace{\langle\langle p, p \rangle\rangle}_{=-1} - \sinh(t) \cdot \underbrace{\langle\langle p, x \rangle\rangle}_{=0} = \cosh(t)$ gilt für alle $t \geq 0$:

$$d_h(p, c(t)) = t.$$

Wir sagen ein Punkt y liegt zwischen den Punkten x und z genau dann, wenn y ein von x und z verschiedener Punkt des Großhyperbelbogens \overline{xz} ist, d.h. es

gilt $p \in (xz) := \overline{xz} \setminus \{x, z\}$.

Eine andere Beschreibung dieser Relation erhält man, wenn man für die Großhyperbel durch x, y und z die Darstellung $c(t) = \cosh(t) \cdot y + \sinh(t) \cdot u$ mit $\langle\langle y, u \rangle\rangle = 0$ und $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 1$ wählt. Es gilt dann $c(0) = y$ und es existieren eindeutige reelle Zahlen t_x, t_z mit $c(t_x) = x$, und $c(t_z) = z$, für die $t_x \cdot t_z < 0$ gilt.

Damit können nun Anordnungsaussagen im Modell überprüft werden. Für den Nachweis des sogenannten Pasch-Axioms wird eine Abbildung von H^2 auf eine eben offene Kreisscheibe (Kleinsches Modell) benutzt. Wir betrachten die Zentralprojektion $Z : H^2 \rightarrow D$.

Dabei ist die Scheibe $D = \{(1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2^2 + y_3^2 < 1\}$ und $Z(x) = \frac{x}{x_1}$.

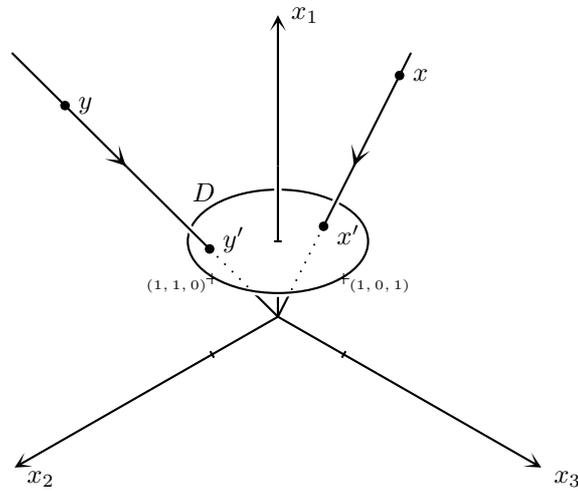


Abb. 4

Z ist bijektiv mit Umkehrabbildung $Z^{-1} : D \rightarrow H^2, Z^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}}$.

Mit $x \in E$ ist auch $Z(x) \in E$ und umgekehrt. Also bildet Z die Großhyperbel $H^2 \cap E$ auf das euklidische Geradensegment, die Sehne $D \cap E$ ab.

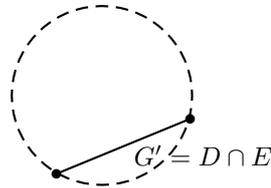


Abb. 5

1.1. DAS MODELL H^2 UND DIE AXIOME DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE 5

Wir sehen auch, dass für $x, y, z \in H^2$ der Punkt y genau dann zwischen x und z liegt, wenn $Z(y)$ im Sinne der euklidischen Anordnungsrelation zwischen $Z(x)$ und $Z(z)$ liegt. Ein hyperbolisches Dreieck wird durch Z auf ein euklidisches Dreieck abgebildet. Die Gültigkeit von Anordnungsassertionen in H^2 kann nun auf deren Gültigkeit in der euklidischen Geometrie zurückgeführt werden.

Wir nutzen diese Zentralprojektion auch um das Parallelenproblem zu diskutieren. Zu jedem Geradensegment L in D und $p \in D, p \notin L$ gibt es offenbar unendlich viele Geradensegmente L' in D mit $p \in L'$ und $L \cap L' = \emptyset$. Damit gilt das euklidische Parallelenaxiom, das die Eindeutigkeit der Parallelen fordert, in dieser Geometrie nicht.

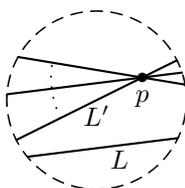


Abb. 6

Kommen wir nun zu den Kongruenzaussagen.

Die hyperbolischen Isometrien sind diejenigen Abbildungen $\varphi : H^2 \rightarrow H^2$, bei denen

$$d_h(\varphi(x), \varphi(y)) = d_h(x, y)$$

für alle Punkte $x, y \in H^2$ gilt.

Es sind dies gerade die Einschränkungen der zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen des \mathbb{R}^3 auf die Menge H^2 . Insbesondere existiert zu je zwei Punkten $x, y \in H^2$ stets eine hyperbolische Isometrie φ mit $\varphi(x) = y$.

Man definiert zwei Strecken (Großhyperbelbögen) \overline{pq} und $\overline{p'q'}$ als kongruent, falls es ein $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ gibt mit $p' = A(p)$ und $q' = A(q)$. Dies ist dann äquivalent dazu, dass $d_h(p, q) = d_h(p', q')$ gilt.

Den Winkel und dessen Winkelgröße zwischen zwei Großhyperbelbögen der hyperbolischen Geometrie erklärt man wie folgt. Sind $G_1 = \{\cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot x \mid 0 \leq t \leq L_1\}$ und $G_2 = \{\cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot y \mid 0 \leq t \leq L_2\}$ zwei Großhyperbelbögen, die vom Punkt p ausgehen. Dann ist die Größe des Winkels $\sphericalangle(G_1, p, G_2)$ zwischen G_1 und G_2 in p die eindeutige Zahl $|\sphericalangle(G_1, p, G_2)| \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(|\sphericalangle(G_1, p, G_2)|) = \langle\langle x, y \rangle\rangle.$$

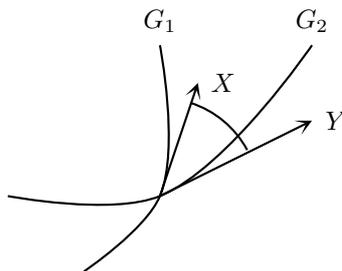


Abb. 7

Zwei Winkel wurden als kongruent definiert, wenn sie durch ein $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ ineinander überführt werden können. Dies ist äquivalent dazu, dass die entsprechenden Winkelgrößen als Zahlen in $[0, \pi]$ übereinstimmen. Damit lassen sich nun etwa die Hilbertschen Kongruenzaxiome für H^2 beweisen.

1.2 Hyperbolische Dreiecke

Im Abschnitt 1.1. haben wir gesehen, dass man die (Modell-)Punkte der hyperbolischen Ebene H^2 sowohl als Punkte des dreidimensionalen affinen Raumes als auch als Vektoren des \mathbb{R}^3 deuten kann. Dementsprechend verwenden wir in diesem Abschnitt, wie in der ebenen Geometrie meist üblich, große Buchstaben zur Bezeichnung der Punkte.

Ein **hyperbolisches Dreieck** ABC ist ein Tripel von Punkten $A, B, C \in H^2$, die linear unabhängig sind. Insbesondere sind diese Punkte paarweise verschieden. A, B , und C heißen die *Ecken* des Dreiecks. Die Großhyperbelbögen, die die Ecken verbinden, heißen die **Seiten** des Dreiecks. Die **Seitenlängen** des Dreiecks sind gegeben durch $a = d_h(B, C)$, $b = d_h(A, C)$ und $c = d_h(A, B)$. Die **Innenwinkelgrößen** des Dreiecks sind gegeben durch $\alpha = |\sphericalangle(\overline{AB}, A, \overline{AC})|$, $\beta = |\sphericalangle(\overline{BA}, B, \overline{BC})|$ und $\gamma = |\sphericalangle(\overline{CA}, C, \overline{CB})|$.

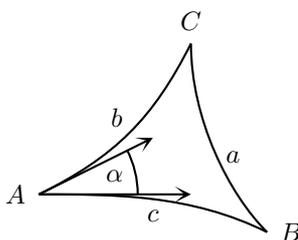


Abb. 8

In der Vorlesung zur Elementargeometrie wurden durch Vergleich kongruenter hyperbolischer Dreiecke bereits einige Sätze der hyperbolischen Trigonometrie abgeleitet.

Insbesondere gelten für die Seitenlängen a, b, c und die Innenwinkelgrößen α, β, γ eines hyperbolischen Dreiecks ABC :

(SKS) Seitenkosinussatz der hyperbolischen Geometrie

$$\begin{aligned}\cosh(a) &= \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha) \\ \cosh(b) &= \cosh(a) \cdot \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta) \\ \cosh(c) &= \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)\end{aligned}$$

(WKS) Winkelkosinussatz der hyperbolischen Geometrie

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cosh(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma), \\ \cos(\beta) &= \cosh(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma), \\ \cos(\gamma) &= \cosh(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta).\end{aligned}$$

(SS) Sinussatz der hyperbolischen Geometrie

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)}$$

Als Folgerung aus diesen Sätzen ergab sich für die Innenwinkelsumme :

(IWS) Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck

Für die Innenwinkelgrößen eines hyperbolischen Dreiecks gilt

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Die Begriffe „gleichschenkelig“, „gleichseitig“, „spitzwinklig“, „rechtwinklig“ und „stumpfwinklig“ werden wie in der euklidischen Geometrie verwendet. Wir geben hier ein Beispiel für ein gleichseitiges hyperbolisches Dreieck an.

Beispiel Das Dreieck ABC mit den Ecken

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat wegen

$$\langle\langle A, B \rangle\rangle = \langle\langle A, C \rangle\rangle = \langle\langle B, C \rangle\rangle = -\frac{7}{4}$$

die übereinstimmenden Seitenlängen

$$a = b = c = \operatorname{Arcosh} \left(\frac{7}{4} \right) \approx 1,16.$$

Für die Winkelgrößen ergibt sich hieraus nach dem Seitenkosinussatz

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{\cosh^2(a) - \cosh(a)}{\sinh^2(a)} = \frac{7}{11}$$

und damit $\alpha = \beta = \gamma = \arccos \frac{7}{11}$ und eine Innenwinkelsumme von $\approx 0,84 \cdot \pi$.

Wir beweisen nun weitere Sätze über hyperbolische Dreiecke.

Satz 1.1 Satz vom Außenwinkel *Bezeichnen wir mit $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ bzw. $\bar{\gamma}$ die Größen der Außenwinkel (Nebenwinkel) zu den Innenwinkeln α, β bzw. γ , dann gilt*

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &> \beta, \gamma, \beta + \gamma \\ \bar{\beta} &> \alpha, \gamma, \alpha + \gamma \\ \bar{\gamma} &> \alpha, \beta, \alpha + \beta.\end{aligned}$$

Beweis. Mit $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$ folgt aus dem Satz über die Innenwinkelsumme bereits $\bar{\alpha} = \pi - \alpha > \beta + \gamma$. Wegen $\beta, \gamma > 0$ gilt auch $\bar{\alpha} > \beta, \gamma$. \square

Die Äquivalenzen des folgenden Satzes gelten auch für euklidische Dreiecke. Der Satz gehört somit zur sogenannten „**absoluten Geometrie**“, zu der alle Aussagen gehören, die ohne die Verwendung des Parallelenaxioms oder dessen Negation bewiesen werden können. Die absolute Geometrie ist also in gewisser Weise die „Schnittmenge“ von euklidischer und hyperbolischer Geometrie.

Satz 1.2 Längen- und Winkelvergleich *Für die Seitenlängen a, b, c und die Innenwinkelgrößen α, β, γ eines hyperbolischen Dreiecks gilt:*

$$\begin{aligned}a < b &\iff \alpha < \beta \\ a = b &\iff \alpha = \beta \\ a > b &\iff \alpha > \beta\end{aligned}$$

Beweis. Für die Seitenlängen und Winkelgrößen hyperbolischer Dreiecke gilt $a, b, c > 0$ und $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Somit ergeben sich die Behauptungen des Satzes als einfache Folgerungen aus dem oben angegebenen Sinussatz. \square

Wir geben hier noch einen zweiten Beweis an, der zwar keine Kenntnisse der hyperbolischen Trigonometrie benutzt, der aber die Gültigkeit entsprechender Kongruenzaxiome voraussetzt.

Gilt $a = b$, dann kann allein mit dem Axiom K_6 (vgl. [1], S. 9) auf $\alpha = \beta$ geschlossen werden, indem man das Axiom auf die „beiden“ Dreiecke ABC und BAC anwendet.

Nun sei $a > b$. Es existiert dann ein Punkt D auf \overline{BC} mit $d_h(CD) = b$. Nach dem bereits bewiesenen Fall gilt dann $|\sphericalangle(\overline{AC}, A, \overline{AD})| = |\sphericalangle(\overline{DC}, D, \overline{DA})|$. Wegen $|\sphericalangle(\overline{AC}, A, \overline{AD})| < \alpha$ folgt nun nach dem Satz vom Außenwinkel

(angewandt auf das Dreieck ABD) $\alpha > |\sphericalangle(\overline{DC}, D, \overline{DA})| > \beta$.

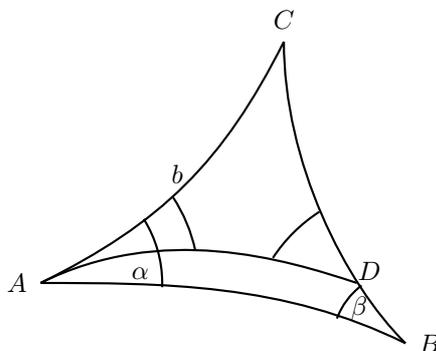


Abb. 9

Der Fall $a < b$ kann analog bewiesen werden.

Die Umkehrungen können dann jeweils indirekt bewiesen werden. Da allerdings durch $a < b$, $a = b$, $a > b$ eine vollständige Fallunterscheidung gegeben ist, genügt auch schon der Verweis auf das „Haubersche Theorem“ der Logik.

Nach diesen allgemeineren Vorbereitungen können wir nun eine Reihe von Kongruenzsätzen für hyperbolische Dreiecke formulieren, wobei die Kongruenz zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ durch die Übereinstimmung in allen Seitenlängen und Innenwinkelgrößen definiert wurde.

Satz 1.3 Dreieckskongruenzsätze *Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei hyperbolische Dreiecke mit den Seitenlängen a, b, c bzw. a', b', c' und den Innenwinkelgrößen α, β, γ bzw. α', β', γ' , dann gelten folgende Kongruenzaussagen:*

- a) (sss): $a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \implies ABC \equiv A'B'C'$
- b) (sws): $\alpha = \alpha' \wedge b = b' \wedge c = c' \implies ABC \equiv A'B'C'$
- c) (www): $\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \wedge \gamma = \gamma' \implies ABC \equiv A'B'C'$
- d) (wsw): $\alpha = \alpha' \wedge b = b' \wedge \gamma = \gamma' \implies ABC \equiv A'B'C'$
- e) (sww): $a = a' \wedge \beta = \beta' \wedge \alpha = \alpha' \implies ABC \equiv A'B'C'$
- f) (ssw): $a = a' \wedge c = c' \wedge \gamma = \gamma' \wedge a < c \implies ABC \equiv A'B'C'$

Beweis. a) Die Gültigkeit von (sss) ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Seitenkosinussatz, nach dem sich aus $a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$ sofort $\cos(\alpha) = \cos(\alpha')$, $\cos(\beta) = \cos(\beta')$ und $\cos(\gamma) = \cos(\gamma')$ ergibt.

b) Um den Kongruenzsatz (sws) zu beweisen, verwenden wir zunächst wieder den Seitenkosinussatz und erhalten

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha) \\ &= \cosh(b') \cosh(c') - \sinh(b') \sinh(c') \cos(\alpha') \\ &= \cosh(a'), \end{aligned}$$

also $a = a'$. Nun folgt aus dem bereits bewiesenen Satz (sss) die Behauptung.

c) Analog zum Beweis von (sss) kann die Aussage (www) aus dem Winkelkosinussatz hergeleitet werden. Wir erhalten $\cosh(a) = \cosh(a')$, $\cosh(b) = \cosh(b')$ und $\cosh(c) = \cosh(c')$ und somit dann $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$.

d) Die Voraussetzungen im Satz (sws) erinnern an die analoge Voraussetzungen in der Aussage b). Auch der Beweis ergibt sich analog zum Beweis von b), diesmal aber unter Verwendung des Winkelkosinussatzes. Aus $\alpha = \alpha'$, $b = b'$ und $\gamma = \gamma'$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \cosh(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma) \\ &= \cosh(b') \sin(\alpha') \sin(\gamma') - \cos(\alpha') \cos(\gamma') \\ &= \cos(\beta') \end{aligned}$$

Nun kann nach dem bereits bewiesenen Satz (www) auf die Kongruenz der Dreiecke geschlossen werden.

e) Wir setzen $a = a'$, $\beta = \beta'$ und $\alpha = \alpha'$ voraus und zeigen $c = c'$. Die Kongruenz der Dreiecke folgt dann nach (wsw) .

Wir nehmen an, es gelte $c \neq c'$. O.B.d.A. sei etwa $c > c'$. Dann existiert ein Punkt A^* auf \overline{AB} mit $d_h(BA^*) = c'$. Nach (sws) wäre nun $A'B'C' \equiv A^*BC$.

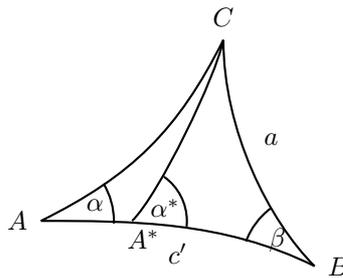


Abb. 10

Der Innenwinkel bei A^* im Dreieck A^*BC ist gleichzeitig Außenwinkel des Dreiecks AA^*C . Mit dem Satz vom Außenwinkel erhalten wir nun den Widerspruch

$$\alpha = \alpha' = |\sphericalangle(\overline{A^*B}, \overline{A^*}, \overline{A^*C})| > |\sphericalangle(\overline{AA^*}, \overline{A}, \overline{AC})| = \alpha.$$

Damit gilt also $c = c'$.

f) Nun zur letzten Behauptung des Satzes. Wir setzen $a = a', c = c', \gamma = \gamma'$ und $a < c$ voraus.

Wir schließen wieder indirekt und nehmen an, es sei $b > b'$. Wie im vorangegangenen Beweisteil existiert dann ein Punkt $A^* \in \overline{AC}$ mit $d_h(A^*C) = b'$. Nach (sws) erhalten wir jetzt $A^*BC \equiv A'B'C'$ und somit $d_h(A^*B) = c' = c$. Das Dreieck ABA^* ist also gleichschenkelig, woraus nach (1.2) dann $|\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{A}, \overline{AA^*})| = |\sphericalangle(\overline{A^*B}, \overline{A^*}, \overline{A^*A})| = \alpha$ folgt.

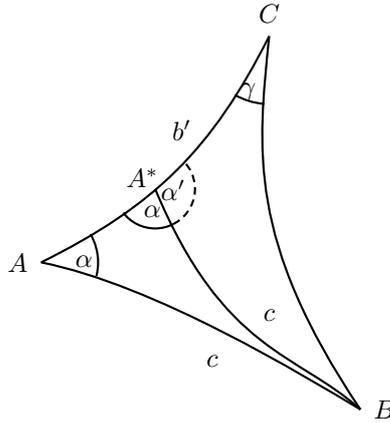


Abb. 11

Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme ist also $\alpha < \frac{\pi}{2}$ und damit dann $\alpha' := \pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$. Damit gilt auch $\alpha' > \gamma$. Wenden wir nun (1.2) auf das Dreieck A^*BC an, dann ergäbe sich der Widerspruch $a > c$ zum letzten Teil unserer Voraussetzung. \square

Bekanntlich gelten die Kongruenzsätze a), b), d), e) und f) aus (1.3) auch in der euklidischen Geometrie. Hier kommt mit c) eine weitere Aussage dieses Typs hinzu. Insbesondere zeigt (www), dass es in der hyperbolischen Geometrie offenbar keinen Unterschied zwischen kongruenten und ähnlichen Dreiecken gibt.

Bemerkung: Da zwei verschiedene Punkte stets durch genau einen Großhyperbelbogen verbunden sind, können wir alternativ auch folgende etwas einfachere

Notierung für Winkel und Winkelgrößen verwenden. Wir schreiben $\sphericalangle(A, B, C)$ und $|\sphericalangle(A, B, C)|$ statt $\sphericalangle(\overline{AB}, B, \overline{BC})$ und $|\sphericalangle(\overline{AB}, B, \overline{BC})|$.

Gilt $A' \in (AB)$ und $C' \in (BC)$, dann ist also $\sphericalangle(A', B, C') \equiv \sphericalangle(A, B, C)$ bzw. $|\sphericalangle(A', B, C')| = |\sphericalangle(A, B, C)|$.

Wir wenden uns nun der Differenz zwischen π und der Innenwinkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks zu.

Definition 1.1 Es sei ABC ein hyperbolisches Dreieck mit den Innenwinkelgrößen α, β, γ . Dann heißt

$$\delta(ABC) := \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

der **Defekt** des Dreiecks ABC .

Satz 1.4 Für Defekte von Dreiecken gilt

- a) $0 < \delta(ABC) < \pi$
- b) Aus $ABC \equiv A'B'C'$ folgt $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$.
- c) Aus $A \notin \overline{BC}$ und $X \in (BC)$ folgt $\delta(ABX) + \delta(AXC) = \delta(ABC)$.
- d) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit $\delta(ABC) < \varepsilon$.

Beweis. a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme gilt $0 < \delta(ABC)$, und wegen $\alpha, \beta, \gamma < 0$ gilt auch $\delta(ABC) < \pi$.

b) Da kongruente Dreiecke gleichgroße Innenwinkel haben ist die Folgerung trivial.

c) Mit $\alpha_1 := |\sphericalangle(B, A, X)|$, $\alpha_2 := |\sphericalangle(X, A, C)|$, $\xi_1 := |\sphericalangle(A, X, B)|$ und $\xi_2 := |\sphericalangle(A, X, C)|$ gilt

$$\begin{aligned} \delta(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) &= \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma) + (\pi - \xi_1 - \xi_2) \\ &= \pi - (\alpha_1 + \beta + \xi_1) + \pi - (\alpha_2 + \gamma + \xi_2) \\ &= \delta(ABX) + \delta(AXC) \end{aligned}$$

d) Es sei $\delta := \delta(ABC)$. Wir wählen einen Punkt X_1 auf (BC) und wenden c) an. Der Defekt δ_1 eines der Teildreiecke ABX_1 oder AX_1C ist dann kleiner oder gleich $\frac{\delta}{2}$. Auf dieses Teildreieck wenden wir erneut c) an, indem wir einen inneren Punkt X_2 einer seiner Seiten wählen. Wir erhalten ein Dreieck mit einem Defekt $\delta_2 \leq \frac{\delta}{4}$.

Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir nach k Schritten ein Dreieck mit dem Defekt $\delta_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot \delta$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

1.3 Parallelität, Orthogonalität und Unverbindbarkeit von Geraden

Wir erinnern zunächst an die Definitionen der Parallelität und Orthogonalität von Geraden. Wie in der euklidischen Geometrie wird die Geradenparallelität (hier für Großhyperbeln) durch

$$G_1 \parallel G_2 \iff G_1 = G_2 \vee G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

definiert.

Zwei Geraden heißen auch in der hyperbolischen Geometrie zueinander orthogonal, wenn der Winkel zwischen Ihnen die Größe $\frac{\pi}{2}$ hat. Letzteres bedeutet aber hier, dass das Minkowskiprodukt der Tangentenvektoren im Schnittpunkt verschwindet.

Ist p der gemeinsame Schnittpunkt zweier Großhyperbeln G_1, G_2 und sind $c_1(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot x$ bzw. $c_2(t) = \cosh(t') \cdot p + \sinh(t') \cdot y$ Darstellungen dieser Hyperbeln, also $G_1 = \{c_1(t) | t \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{c_2(t') | t' \in \mathbb{R}\}$, dann gilt

$$G_1 \perp G_2 \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

Parallelität

Im Skript [1] wurde die Existenz einer Parallelen zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt aus den Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiomen und damit als Satz der absoluten Geometrie hergeleitet.

Eine Realisierung in unserem Modell erhält man wie folgt:

Es sei $G = E \cap H^2$ und p ein nicht auf G liegender Punkt von H^2 . Ist nun v ein Richtungsvektor der Schnittgeraden von E mit der $e_2 - e_3$ -Ebene, also $\mathbb{R}v = E \cap \{e_2, e_3\}$ dann sei E' durch $E' := \overline{\{p, v\}}$ und H durch $H := E' \cap H^2$ definiert. Damit ist H eine Großhyperbel, für die $p \in H$ und

$$H \cap G = (E' \cap H^2) \cap (E \cap H^2) = (E' \cap E) \cap H^2 = \mathbb{R}v \cap H^2 = \emptyset$$

gilt. Also ist H eine Parallele zu G durch p (kurz: $p \in H \parallel G$)

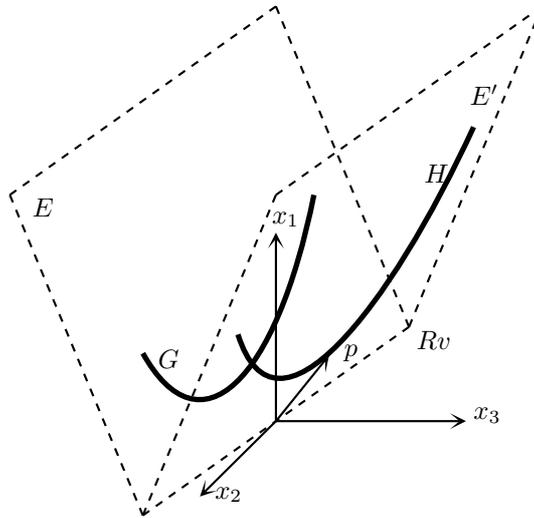


Abb. 12

In ähnlicher Weise geben wir nun ein Beispiel für eine Gerade G , zu der durch einen Punkt p zwei verschiedene Parallele existieren und beweisen damit die Negation des euklidischen Parallelenaxioms P .

(P) Zu jeder Geraden G und jeden Punkt P existiert höchstens eine zu G parallele Gerade H durch den Punkt P .

Wir wählen als G die Großhyperbel in der Ebene $E_{12} := \overline{\{e_1, e_2\}}$ und einen Punkt $p \notin G$. Es sei also $G := E_{12} \cap H^2$ und p durch $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in H^2$ mit $p_3 \neq 0$ gegeben. Wir setzen $H_1 := \overline{\{p, e_1 + e_2\}} \cap H^2$ und $H_2 := \overline{\{p, e_1 - e_2\}} \cap H^2$

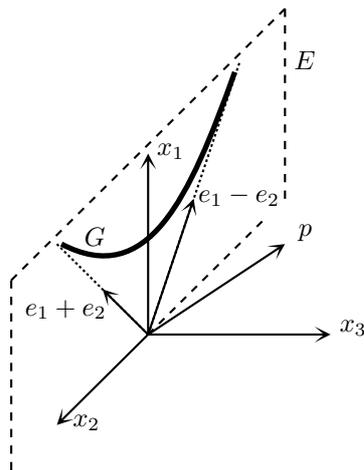


Abb. 13

und zeigen $G \cap H_1 = G \cap H_2 = \emptyset$.

Angenommen, x wäre ein Punkt in $G \cap H_i$, dann gäbe es Zahlen λ, μ, λ' und μ' mit $x = \lambda p + \mu(e_1 \pm e_2) = \lambda'e_1 + \mu'e_2$. Damit wäre $(\lambda p_1 + \mu, \lambda p_2 \pm \mu, \lambda p_3) = (\lambda', \mu', 0)$ woraus wegen $p_3 \neq 0$ sofort $\lambda = 0$ und dann $\mu = \lambda' = \pm \mu'$ folgen würde. Aber $x = \mu e_1 \pm \mu e_2$ ist wegen $-(\mu)^2 + (\mu)^2 = 0$ kein Punkt von H^2 .

Wir haben also $p \in H_1, H_2 \parallel G$ und $H_1 \neq H_2$.

Orthogonalität

Da die Orthogonalität von Geraden durch das Minkowski-Produkt ihrer Tangentenvektoren ausgedrückt wird, stellen wir zuerst einige Hilfssätze über die Minkowskiorthogonalität von Vektoren des \mathbb{R}^3 bereit.

Hilfssatz 1.5 *Ist $v = (a, b, c)^T$ euklidischer Stellungsvektor einer Ebene E des \mathbb{R}^3 , dann ist $Jv = (-a, b, c)^T$ zu allen Vektoren dieser Ebene **minkowskiorthogonal**, d.h., für alle Vektoren $x \in E$ gilt $\langle\langle Jv, x \rangle\rangle = 0$.*

Beweis. Ist $v = (a, b, c)^T$ Stellungsvektor von E , dann ist $ax + by + cz = 0$ eine Gleichung dieser Ebene. Damit gilt dann auch $\langle\langle Jv, x \rangle\rangle = -(-a)x + by + cz = 0$ \square

Wir nennen nun auch zwei Ebenen E_1 und E_2 mit den Stellungsvektoren v_1 und v_2 minkowskiorthogonal zueinander, wenn $\langle\langle Jv_1, Jv_2 \rangle\rangle = 0$ gilt.

Hilfssatz 1.6 *Sind $G_1 = E_1 \cap H^2$ und $G_2 = E_2 \cap H^2$ zwei Großhyperbeln, die sich in einem Punkt p schneiden, dann gilt $G_1 \perp G_2$ genau dann, wenn die Ebenen E_1 und E_2 minkowskiorthogonal zueinander sind.*

Beweis. Es seien a und b Tangentenvektoren an G_1 und G_2 im Punkt p . Dann sind $v_1 := p \times a$ und $v_2 := p \times b$ Stellungsvektoren der Ebenen E_1 und E_2 . Mit den Rechenregeln für das Minkowski-Produkt aus dem Abschnitt 3.1 der Vorlesung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \langle\langle Jv_1, Jv_2 \rangle\rangle &= \langle\langle J(p \times a), J(p \times b) \rangle\rangle \\
 &= \langle\langle p \times a, -J(p) \times J(b) \rangle\rangle \\
 &= -\langle\langle p \times a, J(p) \times J(b) \rangle\rangle \\
 &= -\det \begin{pmatrix} \langle p, J(p) \rangle & \langle p, J(b) \rangle \\ \langle a, J(p) \rangle & \langle a, J(b) \rangle \end{pmatrix} \\
 &= -\det \begin{pmatrix} \langle\langle p, p \rangle\rangle & \langle\langle p, b \rangle\rangle \\ \langle\langle a, p \rangle\rangle & \langle\langle a, b \rangle\rangle \end{pmatrix} \\
 &= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \langle\langle a, b \rangle\rangle \end{pmatrix} \\
 &= \langle\langle a, b \rangle\rangle.
 \end{aligned}$$

Damit gilt also $\langle\langle Jv_1, Jv_2 \rangle\rangle = 0$ genau dann, wenn für die Tangentenvektoren a und b der Großhyperbeln G_1 und G_2 auch $\langle\langle a, b \rangle\rangle = 0$ gilt. Dies war die Behauptung. \square

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir nun einen Satz über Lotgeraden von einem Punkt p auf eine Gerade G .

Satz 1.7 Existenz und Eindeutigkeit der Lotgeraden *Ist $p \in \overline{H^2}$ und G eine Großhyperbel, dann existiert genau eine Großhyperbel H mit $p \in H \perp G$.*

Beweis. Es sei p ein Punkt von H^2 und $G = E \cap H^2$ eine Großhyperbel. Ferner sei v ein Stellungsvektor der Ebene E .

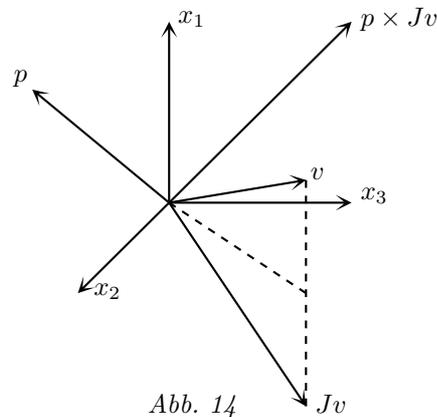


Abb. 14

Wir setzen $H := \overline{\{p, J(v)\}} \cap H^2$ und zeigen $p \in H \perp G$. Offensichtlich gilt $p \in H$, außerdem erhalten wir für den Stellungsvektor $p \times J(v)$ der Ebene $\overline{\{p, J(v)\}}$

$$\langle\langle J(p \times J(v)), J(v) \rangle\rangle = \langle(p \times J(v), J(v))\rangle = 0.$$

Damit sind die Ebenen E und $\overline{\{p, J(v)\}}$ minkowskiorthogonal zueinander und somit gilt nach dem vorangestellten Hilfsatz auch $H \perp G$.

Die Eindeutigkeit der Lotgeraden ergibt sich bereits als Folgerung aus (IWS). \square

Unverbindbarkeit

In der euklidischen Ebene haben parallele Geraden bekanntlich stets gemeinsame Lotgeraden. Zwei Geraden sind dort also stets entweder schneidend oder lotgleich. Im Gegensatz dazu existieren in der hyperbolischen Ebene Geradenpaare, die weder einen gemeinsamen Punkt noch eine gemeinsame Lotgerade besitzen.

Definition 1.2 Zwei Geraden (Großhyperbeln) G und H der hyperbolischen Ebene H^2 heißen **unverbindbar**, wenn weder ein Punkt p mit $p \in G, H$ noch eine Gerade L mit $L \perp G, H$ existiert.

In der Literatur werden unverbindbare Geraden auch **randparallele Geraden** oder kurz **Randparallele** genannt.

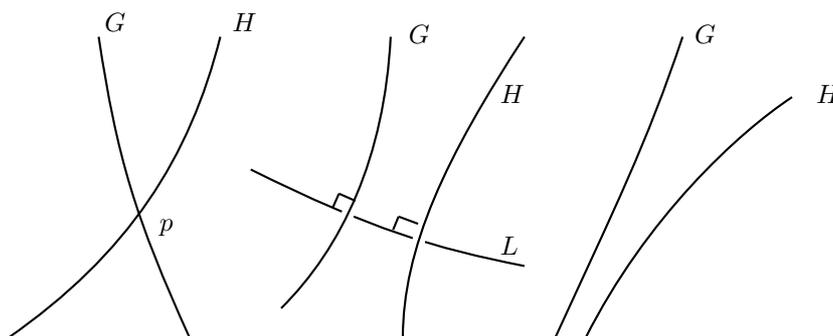


Abb. 15

Beispiel: Es sei G_1 die Großhyperbel, die durch die Ebene $x_3 = 0$ erzeugt wird und G_2 sei durch $G_2 = E \cap H^2$ gegeben wobei E die Ebene mit der Gleichung $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ ist.

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden durch O mit dem Richtungsvektor $l = (1, 1, 0)^T$, diese Gerade ist lichtartig. Damit ist klar, dass $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ gilt. Sucht man nun ein gemeinsames Lot, dann müßte diese Gerade in einer Ebene liegen, für deren Stellungsvektor v nach (1.6)

$$\left\langle \left\langle Jv, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \left\langle Jv, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle = 0$$

gilt. Hieraus folgt $v_3 = 0$ und $v_1 = v_2$. Die Ebene durch O mit einer Gleichung der Form $ax_1 + ax_2 = 0$ schneidet aber die Punktmenge H^2 nicht, liefert also keine Gerade unserer hyperbolischen Ebene. Damit sind G_1 und G_2 unverbindbare Geraden.

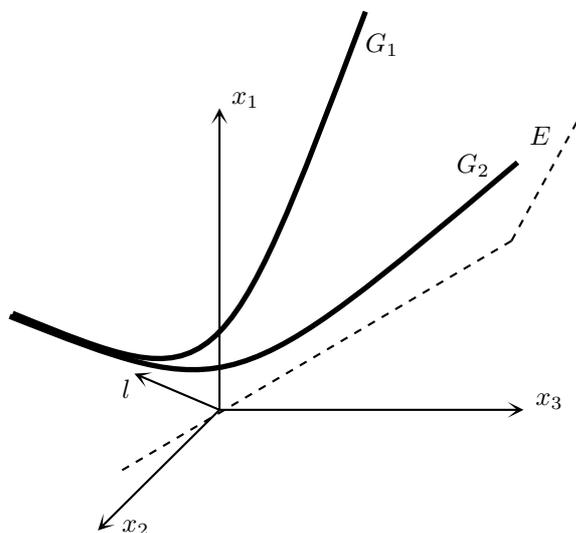


Abb. 16

Bevor wir genauere Aussagen über die Existenz solcher unverbinder Geraden formulieren, stellen wir zunächst einen Hilfssatz bereit, der genau die zweidimensionalen Unterräume kennzeichnet, die Großhyperbeln in H^2 erzeugen.

Hilfssatz 1.8 *Es sei E eine Ebene mit der parameterfreien Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, also eine Ebene durch O mit dem Stellungsvektor $v = (a, b, c)^T$. Dann ist $G := E \cap H^2$ genau dann eine Großhyperbel, wenn v ein raumartiger Vektor ist, das heißt, es gilt $E \cap H^2 \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\langle v, v \rangle > 0$ gilt*

Beweis. Ist E eine Ebene durch O mit dem Stellungsvektor v , dann können wir durch eine euklidische Drehung um die x_1 -Achse erreichen, dass E die x_3 -Achse enthält. O.B.d.A. kann also $c = 0$ angenommen werden.

Wir haben also $ax_1 + bx_2 = 0$. Im Fall $a = 0$ ist E die $x_1 - x_3$ -Ebene und $\langle v, v \rangle = b^2 > 0$. Anderenfalls gilt $x_1 = -\frac{b}{a}x_2$. Folglich gehört $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ genau dann zu $E \cap H^2$, wenn $-(-\frac{b}{a}x_2)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = (1 - (\frac{b}{a})^2)(x_2)^2 + (x_3)^2 = -1$ gilt.

Diese Gleichung besitzt genau dann Lösungen, wenn $(\frac{b}{a})^2 > 1$, also $b^2 > a^2$ und damit $\langle v, v \rangle = -a^2 + b^2 > 0$ gilt. \square

Satz 1.9 *Zu jeder Geraden $G = E \cap H^2$ und jedem Punkt $p \in H^2 \setminus g$ gibt es genau zwei unverbinder Geraden G_1, G_2 durch den Punkt P .*

Zusatz. *Zwei Geraden $G_1 = E_1 \cap H^2$ und $G_2 = E_2 \cap H^2$ sind genau dann unverbinder, wenn $E_1 \cap E_2$ lichtartig ist.*

Folgerung. *Zu zwei sich schneidenden Geraden existieren genau vier mit beiden unverbindbare Geraden.*

Beweis. Da bei Anwendung von zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen das Minkowski-Produkt invariant ist, können wir wie im vorangegangenen Beweis für die gegebene Gerade eine spezielle Lage annehmen.

Wir wählen G als Großhyperbel in der x_1 - x_2 -Ebene E_{12} . Aus $p \notin G$ folgt dann $p_3 \neq 0$. Wir betrachten nun eine beliebige Gerade H durch p . Diese sei von der durch p und $\lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2$ aufgespannten Ebene E erzeugt. Als einen Stellungsvektor v von E erhalten wir

$$v = p \times (\lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2) = \begin{pmatrix} -\mu p_3 \\ \lambda p_3 \\ \mu p_1 - \lambda p_2 \end{pmatrix}.$$

a) Es sei $|\lambda| > |\mu|$: In diesem Fall zeigen wir, dass sich G und H schneiden, weil $(E_{12} \cap E) \cap H^2 \neq \emptyset$ gilt.

Es ist $x = (x_1, x_2, 0)^T \in (E_{12} \cap E)$ genau dann, wenn Zahlen x, y mit

$$x(\lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_2) + y \cdot p = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$$

existieren. Da $\{p, e_1, e_2\}$ linear unabhängig sind, folgt hieraus $y = 0$, $x\lambda = x_1$ und $x\mu = x_2$. Aus $x \in H^2$ folgt nun die Gleichung $-1 = -(x_1)^2 + (x_2)^2 = -(x\lambda)^2 + (x\mu)^2 = x^2(-\lambda^2 + \mu^2)$ also $x^2(\lambda^2 - \mu^2) = 1$. Diese Gleichung ist auf Grund unserer Fallvoraussetzung lösbar.

b) Es sei $|\lambda| < |\mu|$: In diesem Fall können wir eine gemeinsame Lotgerade zu G und H angeben.

Wir setzen $L := E^* \cap H^2$, wobei E^* die Ebene mit dem Stellungsvektor $w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Nach der Fallvoraussetzung gilt $\langle\langle w, w \rangle\rangle = 1 - (\frac{\lambda}{\mu})^2 > 0$, damit ist

$L = E^* \cap H^2$ nach (1.8) eine Gerade in H^2 .

Für die Vektoren $u = (0, 0, 1)^T$ und v erhalten wir

$$\langle\langle Ju, Jw \rangle\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle\langle Jv, Jw \rangle\rangle = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot \mu p_3 + \lambda p_3 = 0.$$

Nach (1.6) gilt folglich $L \perp G, H$.

c) Nun sei $|\lambda| = |\mu|$. Nach dem Beweisteil a) führt die Suche nach gemeinsamen Punkten von G und H auf die unlösbare Gleichung $x^2 \cdot 0 = 1$. Ein gemeinsames Lot gäbe es nur wenn ein Vektor $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ die Bedingung

$$w_3 = \langle\langle u, w \rangle\rangle = \langle\langle v, w \rangle\rangle = -w_1 \cdot \lambda p_3 + w_2 \cdot \lambda p_3 = 0$$

erfüllt. Alle diese Vektoren $w = (w_1, w_2, 0)^T$ sind aber wegen $\langle\langle w, w \rangle\rangle = 0$ lichtartig. Es gibt also nach (1.6) und (1.8) keine geeignete Ebene, die eine gemeinsame

Lotgerade erzeugt.

Die beiden Geraden die man für $\lambda = \mu$ bzw. $\lambda = -\mu$ erhält sind also die beiden eindeutig bestimmten mit G unverbindbaren Geraden durch p .

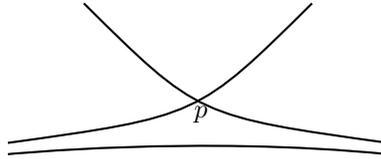


Abb. 17

Die Schnittgerade von E_{12} und E ist im Fall $|\lambda| = |\mu|$ eine der Geraden mit dem Richtungsvektor $e_1 \pm e_2$, also eine Gerade des Lichtkegels. Damit ist auch der Zusatz bewiesen.

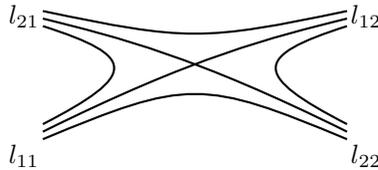


Abb. 18

Da zwei sich in einem Punkt von H^2 schneidende Ebenen E_1, E_2 den Lichtkegel jeweils in genau zwei lichtartigen Geraden l_{11}, l_{12} bzw. l_{21}, l_{22} schneiden, ergeben sich die vier in der Folgerung angegebenen Geraden nach dem Zusatz als die Schnitte mit den anderen vier von diesen Geraden aufgespannten Ebenen. \square

1.4 Saccherische Vierecke, Abstandslinien und die Funktion Π

In der absoluten Geometrie nennt man ein Vierecke $ABCD$ mit rechten Winkel bei A und B sowie $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ nach dem italienischen Mathematiker G. Saccheri (1667 - 1733) Saccherische Vierecke.

Definition 1.3 Ein Viereck $pqrs$ ($p, q, r, s \in H^2$) mit

$$|\sphericalangle(\overline{ps}, p, \overline{pq})| = |\sphericalangle(\overline{qr}, q, \overline{qr})| = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \overline{ps} \equiv \overline{qr}$$

heißt ein **Saccherisches Viereck**.

Während in der euklidische Ebene jedes Saccherische Viereck ein Rechteck ist, gilt in der hyperbolischen Geometrie:

Satz 1.10 Sind γ und δ die Größen der Innenwinkel bei r und s eines Saccherischen Vierecks pqr s mit den rechten Winkeln bei p und q , dann gilt $\gamma = \delta < \frac{\pi}{2}$.

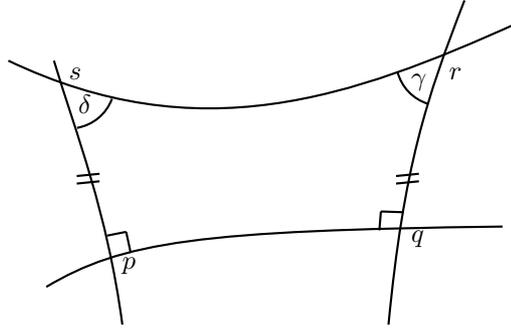


Abb. 19

Folgerung: Es gibt keine Rechtecke in H^2 .

Beweis. Es sei m der Mittelpunkt des Großhyperbelbogens \overline{pq} , dann erhalten wir nach dem Kongruenzsatz sws für Dreiecke zunächst $mps \equiv mqr$, also $\overline{mr} \equiv \overline{ms}$ und $\sphericalangle(p, s, m) \equiv \sphericalangle(q, r, m)$. Mit (1.2) folgt noch $\sphericalangle(m, s, r) \equiv \sphericalangle(m, r, s)$. Insgesamt haben wir also $\delta = |\sphericalangle(p, s, m)| + |\sphericalangle(m, s, r)| = |\sphericalangle(q, r, m)| + |\sphericalangle(m, r, s)| = \gamma$.

Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme von hyperbolischen Dreiecken gilt außerdem

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi &< |\sphericalangle(p, q, r)| + |\sphericalangle(q, p, s)| + \gamma + \delta \\ &= \pi + \gamma + \delta. \end{aligned}$$

Damit haben wir $\gamma + \delta < \pi$ also $\gamma = \delta < \frac{\pi}{2}$. □

Bemerkung In der Literatur wird für die Gleichheit $\gamma = \delta$ oft ein kürzerer Beweis vermöge der Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{pq} angegeben. Dies setzt aber entsprechende Kenntnisse über die Menge der hyperbolischen Isometrien, also über die Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene voraus. Wir werden solche Aussagen im Abschnitt 2 herleiten und beweisen.

Als **Abstand** $d_h(p, G)$ eines Punktes p von einer Großhyperbel G bezeichnen wir üblicherweise, den hyperbolischen Abstand $d_h(p, q)$, wenn $q \in G$ der Schnittpunkt des Lotes von p auf G mit G ist.

Definition 1.4 Eine Punktmenge A heißt **Abstandslinie** zur Geraden G genau dann, wenn $d_h(p, G) = d_h(q, G)$ für alle Punkte $p, q \in A$ gilt und wenn A ganz auf einer Seite von G liegt.

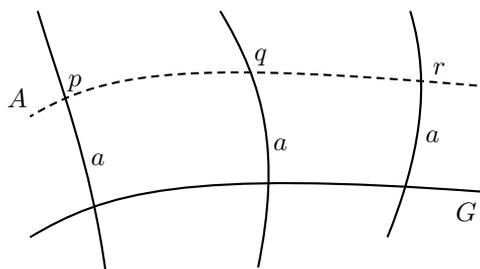


Abb. 20

Als Folgerung aus dem Satz (1.10) erhalten wir sofort, dass Abstandslinien in der hyperbolischen Geometrie keine Geraden sind.

Satz 1.11 Sind p, q, r drei verschiedene Punkte einer Abstandslinie zur Geraden G , dann sind p, q, r nicht kollinear. Umgekehrt folgt für eine Gerade H aus $G \neq H$, dass H keine Abstandslinie zu G ist.

Beweis. Bezeichnen wir die Fußpunkte der Lotgeraden von p, q und r auf G mit p', q' und r' , dann sind $p'q'qp$, $p'r'r'p$ und $q'r'r'q$ drei Saccherische Vierecke. Die drei Punkte p', q', r' sind nach (1.7) paarweise verschieden.

O.B.d.A. sei $q' \in (p'r')$.

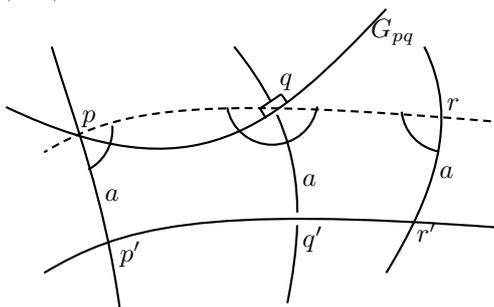


Abb. 21

Nach (1.10) erhalten wir die Kongruenz der vier spitzen Winkel $\sphericalangle(p', p, q)$, $\sphericalangle(p, q, q')$, $\sphericalangle(r', r, q)$ und $\sphericalangle(r, q, q')$ und folglich $|\sphericalangle(p, q, q')| + |\sphericalangle(r, q, q')| < \pi$. \square

Aus der euklidischen Geometrie kennen wir den Satz über die Kongruenz von Stufen- bzw. Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen. In H^2 können zwar solche Kongruenzen ebenfalls auftreten, ein entsprechender Satz läßt sich aber nicht beweisen.

Ist etwa pqr ein Saccherisches Viereck, dann sind die Geraden $G := G_{ps}$ und $G' := G_{qr}$ parallel, den ein gemeinsamer Schnittpunkt x würde ein Dreieck pqx mit einer Innenwinkelsumme $> 2 \cdot \pi$ liefern.

Hier sind nun alle Stufenwinkel und Wechselwinkel an der schneidenden Geraden durch p und q rechte Winkel, also sämtlich untereinander kongruent. Dagegen gilt an der G und G' schneidenden Geraden durch r und s für die Stufenwinkel bei r und s mit $s \in (rs')$

$$|\sphericalangle(p, s, s')| = \pi - |\sphericalangle(p, s, r)| = \pi - |\sphericalangle(q, r, s)| > |\sphericalangle(q, r, s)|.$$

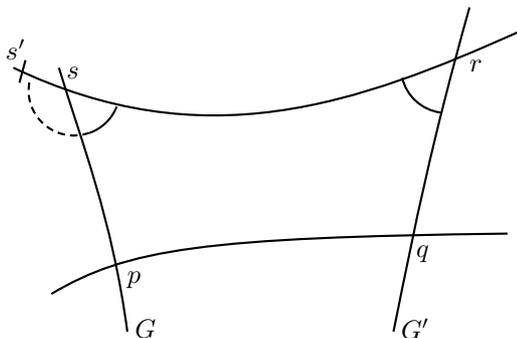


Abb. 22

Nach dem Satz (1.9) wissen wir, dass zu jeder Geraden G durch jeden nicht auf dieser Geraden liegenden Punkt P genau zwei mit G unverbindbare, also randparallele Geraden existieren. Und nach der Folgerung zum Satz gibt es zu zwei schneidenden Geraden G und H in jedem der vier von diesen gebildeten Winkelräumen genau eine mit beiden unverbindbare Gerade.

Wir verwenden diese Aussagen, um wie folgt eine Funktion

$$\Pi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \frac{\pi}{2})$$

zu definieren.

Definition 1.5 Für eine Gerade G und einen Punkt $p(\notin G)$ sei $a := d_h(p, G)$ und H_1, H_2 seien die beiden mit G unverbindbaren Geraden durch p . Ist nun α

die Größe des Winkels zwischen H_1 und H_2 , in dessen Winkelraum die Gerade G liegt, dann setzen wir

$$\Pi(a) = \frac{\alpha}{2}$$

Um uns zu überzeugen, dass es sich bei Π tatsächlich um eine Funktion handelt, müssen wir zeigen, dass aus $a = d_h(p, G) = d_h(q, H) = b$ auch $\Pi(a) = \Pi(b)$ folgt.

Aus dem Kurs Elementargeometrie wissen wir, dass es hyperbolische Isometrien φ_1, φ_2 mit $\varphi_1(p) = \varphi_2(q) = e_1$ gibt. Sind nun p' und q' die Lotfußpunkte von p bzw. q auf G bzw. H , dann gilt wegen $a = b$ jetzt

$$d_h(\varphi_1(p), \varphi_1(p')) = d_h(\varphi_2(q), \varphi_2(q')).$$

Somit finden wir sogar eine euklidische Drehung ρ um die e_1 -Achse mit $\rho(\varphi_2(q')) = \varphi_1(p')$. Da nun die Lotgeraden von $e_1 = \varphi_1(p) = \varphi_2(q)$ auf die Geraden $\varphi_1(G)$ und $\rho(\varphi_2(H))$ identisch sind, gilt nach (1.7) sogar

$$\varphi_1(G) = \rho(\varphi_2(H)).$$

Nun sind auch die beiden Randparallelen zu dieser Geraden identisch und damit deren Schnittwinkel. Da Winkelgrößen und die Eigenschaft der Unverbindbarkeit von Geraden bei hyperbolischen Isometrien invariant sind, folgt hieraus $\Pi(a) = \Pi(b)$.

Eine weitreichende Konsequenz, durch die sich hyperbolische Geometrie signifikant von euklidischer Geometrie unterscheidet, liefert folgende Überlegung. Nach der oben zitierten Folgerung zum Satz (1.9) ist die Funktion Π sogar umkehrbar. Wir können also jeder Winkelgröße zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ eindeutig eine reelle Zahl zuordnen.

Auf diese Weise kann in der hyperbolischen Geometrie nicht nur ein Einheitswinkel sondern auch eine **Einheitsstreckenlänge** innermathematisch definiert werden.

Definition 1.6 Es sei e diejenige reelle Zahl, für die $\Pi(e) = \frac{\pi}{4}$ gilt

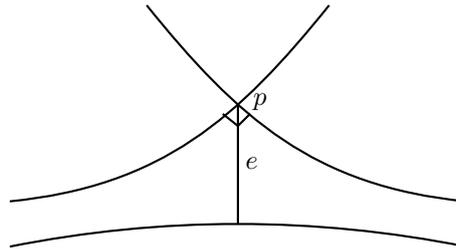


Abb. 23

1.5 Anhang: Zur Axiomatik der hyperbolischen Geometrie

Um aus einer axiomatischen Charakterisierung der euklidischen Geometrie eine entsprechende Beschreibung der hyperbolischen Geometrie zu erhalten, ist lediglich das euklidische Parallelenaxiom (P) durch seine Negation zu ersetzen. (vgl. Abschnitt 1.3)) Unser Modell H^2 stellt ein Modell des derart abgewandelten Axiomensystems dar.

Verzichtet man in einem Axiomensystem der euklidischen Geometrie auf die Forderung von (P) (und natürlich auch auf dessen Negation), dann ergibt sich eine Charakterisierung der oben bereits erwähnten absoluten Geometrie.

Beachtet man die oben bewiesenen Sätze der hyperbolischen Geometrie und vergleicht die Aussagen mit entsprechenden Kenntnissen aus der euklidischen (Schul-)Geometrie, dann ergeben sich folgende logische Äquivalenzen.

Satz 1.12 *Auf der Grundlage eines Axiomensystems der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (PA) *Es gilt das euklidische Parallelenaxiom (P).*
- (WS) *Die Summe der Innenwinkelgrößen in einem Dreieck ist gleich π .*
- (DD) *Für den Defekt δ eines Dreiecks gilt stets $\delta = 0$.*
- (AW) *Die Größe eines Außenwinkels eines Dreiecks ist gleich der Summe der Größen der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.*
- (WW) *Es gibt nichtkongruente Dreiecke, die in allen drei Innenwinkelgrößen übereinstimmen.*
- (SV) *Jedes Saccherische Viereck ist ein Rechteck.*
- (RE) *Es gibt ein Rechteck.*
- (PG) *Die Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge.*
- (AL) *Abstandslinien sind Geraden.*
- (UV) *Es gibt keine unverbindbaren Geraden.*
- (SW) *Beim Schnitt zweier Geraden G, H mit einer dritten Geraden entstehen kongruente Stufen- bzw. Wechselwinkel genau dann, wenn G und H parallele Geraden sind.*

Die Liste solcher zu (P) äquivalenten Sätze ließe sich weiter fortsetzen, etwa durch Aussagen über spezielle Bewegungen, also über die Isometrien dieser metrischen Geometrie. Im Umkehrschluß sind nun alle Negationen der obigen Aussagen äquivalent zur Negation ($\sim P$) des euklidischen Parallelenaxioms.

($\sim\mathbf{P}$) Es gibt Geraden G, H_1, H_2 und einen Punkt P mit $P \in H_1, H_2 \parallel G$ und $H_1 \neq H_2$.

Diese Aussage und die Negationen der Aussagen aus (1.12) sind damit Sätze der hyperbolischen Geometrie. Eine detailliertere Darstellung der logischen Zusammenhänge und ausführliche Beweise auf axiomatischer Basis findet man in [5] und [6].

Kapitel 2

Die Isometriegruppe $\mathcal{B}_h(2)$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene, also die Gruppe der hyperbolischen Isometrien. Diese Abbildungen sind gerade die Einschränkungen der zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen des \mathbb{R}^3 auf H^2 . Es werden Erzeugendensysteme dieser Gruppe, einige ihrer Untergruppen und schließlich affine Deutungen der einzelnen Isometrien angegeben.

2.1 Lorentzorthogonale Matrizen

Als hyperbolische Isometrien wurden diejenigen Abbildungen $\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ definiert, bei denen der hyperbolische Abstand $d_h(x, y)$ invariant ist. Hinreichend hierfür ist wegen $\cosh(d_h(x, y)) = -\langle\langle x, y \rangle\rangle$ die Invarianz des Minkowski-Produkts im \mathbb{R}^3 . Dies trifft insbesondere für alle Lorentztransformationen zu. Die Teilmenge der zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen, die in [1] mit $L^\uparrow(3)$ bezeichnet wurde, bildet überdies die Teilmenge H^2 des \mathbb{R}^3 auf sich ab.

Wir zeigen später, dass die hyperbolischen Isometrien genau die Einschränkungen dieser Abbildungen auf H^2 sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_h(2)$ die Menge der hyperbolischen Isometrien auf H^2 . In [1, Beispiel 1.5.8] wurde bereits gezeigt, dass die Inclusion

$$\{\Phi_{/H^2} | \phi \in \mathcal{L}^\uparrow(3)\} \subset \mathcal{B}_h(2)$$

gilt.

Die 3×3 -Matrizen $A = (a_{ik})$ der Abbildungen aus $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ sind die sogenannten lorentzorthogonalen Matrizen mit $A(I_+) \subset I_+$, das heißt, es gilt $J = A^T J A$ bzw. $A^{-1} = J A^T J$ und $a_{11} > 0$. Hier bezeichnet I_+ die Menge der zeitartigen Vektoren mit positiver x_1 -Koordinate (vgl. Abschnitt 1.4 in [1]).

Wie in der linearen Algebra oft üblich identifizieren wir im folgenden die Abbildungen mit ihren Abbildungsmatrizen, also

$$\mathcal{L}^\uparrow(3) := \{A = (a_{ik}) \mid J = A^T J A \wedge A(I_+) \subset I_+\}.$$

Wie für alle Lorentztransformationen gilt $\det A = \pm 1$ für $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$.

Satz 2.1 Die Menge $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, eine Untergruppe der Gruppe aller Lorentztransformationen.

Zusatz: Die Teilmenge $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3) := \{A \in \mathcal{L}^\uparrow(3) \mid \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe vom Index 2, die Untergruppe der **eigentlichen** zeiorientierungserhaltenden Lorentztransformationen.

Beweis. Die Behauptung des Satzes entspricht dem Korollar 1.4.18 in [1]. Die Untergruppeneigenschaft der Menge $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ ist trivial. Schließlich gilt für jedes $S \in \mathcal{L}^\uparrow(3) \setminus \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ die Gleichheit $\mathcal{L}^\uparrow(3) = \mathcal{L}^{\uparrow+}(3) \cup S \cdot \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$, denn aus $B \in \mathcal{L}^\uparrow(3) \setminus \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ folgt $SB \in \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ und damit $B \in S \cdot \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$. \square

Als spezielle Matrizen aus $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ kennen wir bereits die Matrizen der euklidischen Drehungen um die e_1 -Achse

$$D_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

und die Boostmatrizen

$$B_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

und

$$B_3(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, dass sich jede Matrix aus $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ als ein Produkt aus solchen speziellen Matrizen schreiben läßt.

Satz 2.2 Für jede Matrix A aus $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ gibt es Zahlen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$A = D_1(t_1) \cdot B_2(t_2) \cdot B_3(t_3)$$

.

Beweis. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^{\uparrow+}(3).$$

Insbesondere gilt also $a > 0$. Wir multiplizieren mit einer Boostmatrix $B_3(t)$ und erhalten

$$A' := A \cdot B_3(t) = \begin{pmatrix} a \cosh t + b \sinh t & a \sinh t + b \cosh t & c \\ d' & e' & f \\ g' & h' & i \end{pmatrix}.$$

Wir wissen nach (2.1) gilt wieder $a' = a \cosh t + b \sinh t > 0$. Ferner wäre $b' = a \sinh t + b \cosh t = 0$ genau dann, wenn $\tanh t = -\frac{b}{a}$ gilt. Wegen $-a^2 + b^2 + c^2 = -1$ wissen wir, dass $|a| > |b|$ gilt. Wir haben also $|\frac{b}{a}| < 1$. Somit können wir $t_3 := t$ für B_3 so wählen, dass $b' = 0$ gilt.

Analog erhalten wir nach Multiplikation mit $B_2(t)$

$$A'' := A \cdot B_3(t_3) \cdot B_2(t) = \begin{pmatrix} a' \cosh t + c \sinh t & 0 & a' \sinh t + c \cosh t \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Wie eben kann $t = t_2$ so gewählt werden, dass auch $c' = a' \sinh t + c \cosh t = 0$ gilt.

Da die entstandene Produktmatrix A'' natürlich ebenfalls lorentzorthogonal ist, gilt bereits $a'' = 1$ und $d'' = g'' = 0$.

Wir multiplizieren nun noch mit einer Drehmatrix $D_1(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \cdot D_1(t) = A \cdot B_3(t_3) \cdot B_2(t_2) \cdot D_1(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e'' & f'' \\ 0 & h'' & i'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e'' \cos t + f'' \sin t & -e'' \sin t + f'' \cos t \\ 0 & h'' & i'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wäre nun bereits $f'' = 0$, dann hätte A'' bereits die Form

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e'' & 0 \\ 0 & h'' & i'' \end{pmatrix},$$

also wäre $e'' = i'' = \pm 1$ und $h'' = 0$.

Im Fall $f'' \neq 0$ kann aber $t = t_1$ so gewählt werden, dass $\cot t_1 = \frac{e''}{f''}$ und damit $f''' = 0$ erreicht wird. Damit ist dann

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e''' & 0 \\ 0 & 0 & i''' \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad e''' = i''' = \pm 1,$$

denn auch für diese Matrix gilt $\det A''' = e''' \cdot i''' = 1$.

Falls nun $e''' = i''' = -1$ gilt, wäre $A''' = D_1(\pi)$. In diesem Fall würden wir im letzten Schritt mit $D_1(t_1 + \pi)$ statt mit $D_1(t_1 + \pi)$ multiplizieren um $A''' = E$ zu erhalten.

Nach Multiplikation mit den inversen Matrizen erhalten wir schließlich

$$A = (D_1(t_1))^{-1} \cdot (B_2(t_2))^{-1} \cdot (B_3(t_3))^{-1} = D_1(-t_1) \cdot B_2(-t_2) \cdot B_3(-t_3)$$

womit der Satz bewiesen ist. \square

Nach dem Zusatz zu (2.1) erhalten alle Matrizen aus $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ mit negativer Determinante, wenn wir zusätzlich noch mit

$$S_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\uparrow(3),$$

der Spiegelung an der $e_1 - e_3$ -Ebene multiplizieren.

Damit folgt dann das

Korollar 2.3 *Die Mengen*

$$\mathcal{E}^+ := \{D_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{B_2(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{B_3(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

bzw.

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}^+ \cup \{S_{13}\}$$

sind Erzeugendensysteme der Gruppen $\mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$ bzw. $\mathcal{L}^\uparrow(3)$.

2.2 Translationen

Wir kennen die Matrizen des Typs $D_1(t)$ bereits als Abbildungsmatrizen euklidischer Drehungen des \mathbb{R}^3 um die e_1 -Achse. Dementsprechend bewirkt auch $D_1(t)_{/H^2}$ eine Drehung in H^2 um den Punkt e^1 . Wir wollen nun auch die anderen Elemente des Erzeugendensystems \mathcal{E}^+ als affine Abbildungen des \mathbb{R}^3 und insbesondere deren Wirkung auf H^2 näher untersuchen.

Für die Boostmatrizen $B_2(t)$ mit $t \neq 0$ erhalten wir aus dem Ansatz $B_2(t)x = x$ die jeweils äquivalenten Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 \cosh t + x_3 \sinh t &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \\ x_1 \sinh t + x_3 \cosh t &= x_3 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1(\cosh t - 1) + x_3 \sinh t &= 0 \\ x_1 \sinh t + x_3(\cosh t - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Deren Lösungsmenge ist die x_2 -Achse. Man nennt $B_2(t)$ eine **hyperbolische Drehung** um diese Achse.

Bemerkung: Die Rechtfertigung des Begriffs „Hyperbolische Drehung“ ergibt sich aus der Tatsache, dass die Bahnen der Punkte bei solchen Drehungen Hyperbelbögen, also Teile der Kreise der minkowskischen Geometrie sind.

Eine Deutung des Arguments t in $B_2(t)$ erhält man wie folgt:

Man betrachtet den Punkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und dessen Bildpunkt} \quad Q = B_2(P) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ 0 \\ \cosh t \end{pmatrix}$$

in der $x_1 - x_3$ -Ebene.

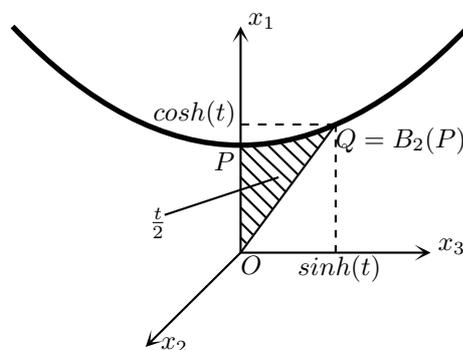


Abb. 24

Für die Fläche zwischen der Geraden durch O und Q , der x_1 -Achse und der Hyperbel $x_1^2 - x_3^2 = 1$ ergibt sich mit $R = (\cosh t, 0, 0)^T$

$$\begin{aligned} F &= F_{OQR} - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \\ &= \frac{\cosh t \sinh t}{2} - \left[\frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{Arcosh} x) \right]_1^{\cosh t} \\ &= \frac{\cosh t \sinh t}{2} - \frac{1}{2} [(\cosh t \sinh t - t) - 0 - 0] \\ &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Der „Drehwinkel“ t ist also ein Maß für die von dem Ortsvektor des Punktes P bei der Abbildung (hyp. Drehung) auf Q „überstrichene“ Fläche.

Nun zurück zur Abbildung $B_2(t)$. Da kein Punkt der x_2 -Achse zu H^2 gehört, besitzt die hyperbolische Isometrie $B_2(t)_{/H^2}$ keine Fixpunkte.

Die Großhyperbel

$$G_{13} = \{c(t) \mid c(t) = e_1 \cosh t + e_3 \sinh t; t \in \mathbb{R}\}$$

in der $x_1 - x_3$ -Ebene ist allerdings eine Fixgerade. Wir interpretieren $B_2(t)_{/H^2}$ als eine Verschiebung der hyperbolischen Ebene längs G_{13} . Ein Punkt p außerhalb dieser Großhyperbel wird auf einer Abstandslinie zu G_{13} „verschoben“. Für die Matrizen $B_3(t)$ gelten analoge Aussagen.

Solche Isometrien $B(t)_{/H^2}$ mit $\det B(t) = 1$, die eine Großhyperbel als Fixgerade aber keine Fixpunkte haben, nennen wir im folgenden **Translationen** der hyperbolischen Ebene H^2 .

Auf Grund der Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen wurde in der Elementargeometrie bereits bewiesen, dass

$$B_2(t) \circ B_2(t') = B_2(t+t') \quad \text{und} \quad B_3(t) \circ B_3(t') = B_3(t+t')$$

gilt. Außerdem ist $B_2(0) = B_3(0) = E$ und $(B_i(t))^{-1} = B_i(-t)$ für $i = 1, 2$.

Satz 2.4 Die Mengen $\{B_2(t)_{/H^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{B_3(t)_{/H^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ bilden Untergruppen von Translationen längs G_{13} bzw. längs G_{12} der Isometriegruppe $\mathcal{B}_h(2)$.

Bezeichnen wir mit \mathbb{D}_1 die Menge der auf H^2 eingeschränkten Drehungen um die x_1 -Achse und mit

$$\mathbb{T}_{13} := \{B_2(t)_{/H^2} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{T}_{12} := \{B_3(t)_{/H^2} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

die oben angegebenen Translationsmengen, dann erzeugen deren Vereinigungsmengen bereits transitive Gruppen auf H^2 .

Satz 2.5 Die Gruppen

$$\langle \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{T}_{13} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{T}_{12} \rangle$$

sind transitive Untergruppen hyperbolischer Isometrien auf H^2 .

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage. Es ist

$$\begin{aligned} D_1(-t) \circ B_2(t') &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cosh t' & 0 & \sinh t' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t' & 0 & \cosh t' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t' & 0 & \sinh t' \\ \sinh t' \sin t & \cos t & \cosh t' \sin t \\ \sinh t' \cos t & -\sin t & \cosh t' \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für das Bild von e_1 ergibt sich

$$D_1(-t) \circ B_2(t') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t' \\ \sinh t' \sin t \\ \sinh t' \cos t \end{pmatrix}.$$

Die Bahn von e_1 unter diesen Abbildungen ist also ganz H^2 , insbesondere erhalten wir bei festem t' einen euklidischen Kreis in der Ebene $x_1 = \cosh t'$ und bei festem t die Großhyperbel $\{c(t') = \cosh t' e_1 + x \sinh t' \mid t' \in \mathbb{R}\}$ mit dem Tangentenvektor $x = (0, \sin t, \cos t)^T$. \square

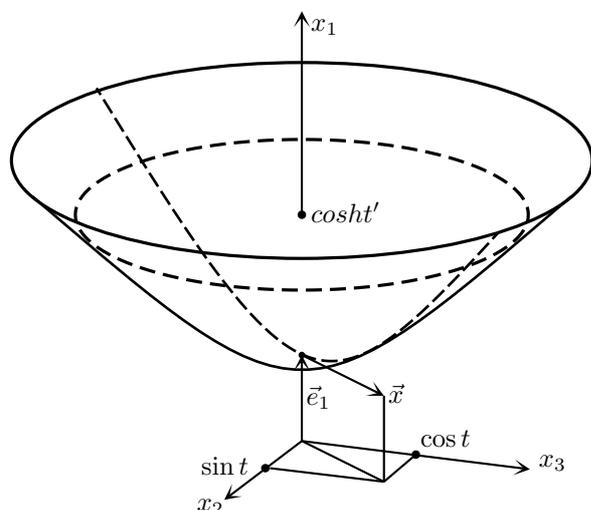


Abb. 25

Bemerkung: Die Abbildung $(t, t') \mapsto D_1(-t) \circ B_2(t') e_1$ ist analog zur entsprechenden Darstellung der Kugel im \mathbb{R}^3 eine Parameterdarstellung der Fläche H^2 in hyperbolischen Polarkoordinaten.

Nach unseren Kenntnissen der euklidischen Geometrie bilden alle Translationen der Ebene (bzw. des Raumes) eine Untergruppe der Bewegungsgruppe. Für die hyperbolische Geometrie gilt diese Aussage nicht mehr. Man kann zeigen, dass die Nacheinanderausführung zweier Translationen längs verschiedener Großhyperbeln G und H genau dann wieder eine Translation ist, wenn G und H sich in einem Punkt schneiden.

Beispiel: Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : H^2 \longrightarrow H^2, \quad p \mapsto \varphi(p) := B_2(t)_{/H^2} \circ B_3(t)_{/H^2}(p).$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 t & \cosh t \sinh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ \sinh t \cosh t & \sinh^2 t & \cosh t \end{pmatrix},$$

wonach für die Bestimmung der Fixpunkte das folgende homogene Gleichungssystem zu lösen ist.

$$\begin{aligned} x_1(\cosh^2 t - 1) + x_2 \cosh t \sinh t + x_3 \sinh t &= 0 \\ x_1 \sinh t + x_2(\cosh t - 1) &= 0 \\ x_1 \sinh t \cosh t + x_2 \sinh^2 t + x_3(\cosh t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Als Fixpunktmenge erhalten wir die Gerade durch O mit dem Richtungsvektor

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\cosh t - 1}{\sinh t} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

der wegen

$$-\left(\frac{\cosh t - 1}{\sinh t}\right)^2 + 1 + 1 = -\left(\frac{\cosh t - 1}{\cosh t + 1}\right) + 2 = \frac{\cosh t + 3}{\cosh t + 1} > 0$$

ein raumartiger Vektor ist. Er ist Stellungsvektor der Ebene

$$E' : -\frac{\cosh t - 1}{\sinh t} \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

die nach (1.8) eine Großhyperbel $G' = E' \cap H^2$ erzeugt. Mit v ist aber auch Jv ein raumartiger Vektor und demzufolge ist auch $G^* = E^* \cap H^2$ mit

$$E^* : \frac{\cosh t - 1}{\sinh t} \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

eine Großhyperbel. Da v zu allen Vektoren aus E^* minkowskiorthogonal ist, gilt $\varphi(E^*) = E^*$ bzw. $\varphi(G^*) = G^*$, also ist φ eine Translation längs G^* .

Man sieht bereits an diesem einfachen Beispiel, dass der vollständige Beweis der obigen Behauptungen über Produkte von Translationen in unserem Modell einen erheblichen Rechenaufwand erfordern würde, denn wir müßten solche Produkte auch für parallele und unverbindbare Großhyperbeln untersuchen.

Wir werden später sehen, dass in anderen Modellen manche dieser Aussagen leichter einzusehen sind. Umgekehrt ist aber in anderen Modellen zum Beispiel die Beschreibung der Metrik, also des hyperbolischen Abstands, mit wesentlich mehr Aufwand verbunden.

Die Rechnungen zum obigen Beispiel zeigen aber andererseits, wie man nun umgekehrt zu jeder Großhyperbel G die Translationsgruppe längs G angeben

kann.

Es sei $G = E \cap H^2$, wobei E die Ebene $ax + by + cz = 0$ ist. Der raumartige Einheitsvektor

$$v = \frac{1}{\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ist dann minkowskiorthogonal zu E . Wir suchen die zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen, die die Gerade g mit diesem Richtungsvektor als Fixpunktreihe besitzen.

Dazu bestimmen wir zunächst eine Abbildung $D \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$, die e_2 auf v abbildet. Man nehme etwa die Drehung $D_1(t_1)$ die v in die $x_1 - x_2$ -Ebene dreht, also $v' := D_1(t_1)(v)$, und bestimmt dann wie im Beweis von (2.2) ein t' so, dass $B_3(t')(v') = e_2$ gilt. Für $D := B_3(t') \circ D_1(t_1)$ gilt dann $D(v) = e_2$ und $D \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$.

Wir setzen $B^*(t) := D \circ B_2(t) \circ D^{-1}$ und erhalten

$$B^*(v) = D^{-1} \circ B_2(t) \circ D(v) = D \circ B_2(t)(e_2) = D^{-1}(e_2) = v.$$

Damit ist jeder Punkt von g ein Fixpunkt von B^* . Andererseits gilt

$$\begin{aligned} (B^*)^T J B^* &= (D^{-1} B_2 D)^T J D^{-1} B_2 D \\ &= (J D^T J B_2 D)^T J J D^T J B_2 D \\ &= D^T B_2^T J D J J D^T J B_2 D \\ &= D^T B_2^T J D J D^T J B_2 D \\ &= D^T B_2^T J B_2 D = D^T J D = J. \end{aligned}$$

Also sind $\{B^*(t) | t \in \mathbb{R}\}$ zeitorientierungserhaltende lorentzorthogonale Matrizen. Die zugehörigen Transformationen haben die Großhyperbel G als Fixgerade, besitzen aber keine Fixpunkte in H^2 . Es sind die Translationen längs G .

Satz 2.6 *Zu jeder Großhyperbel $G \subset H^2$ existiert eine auf der Punktmenge von G einfach transitive Gruppe von Translationen längs G .*

2.3 Geradenspiegelungen

Die am einfachsten zu realisierenden Spiegelungen an Großhyperbeln erhalten wir als Einschränkungen der euklidischen Spiegelungen

$$S_{13} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

an entsprechenden Koordinatenebenen auf H^2 .

Offensichtlich gilt $S_{13}, S_{12} \in \mathcal{L}(3)$ und die Einschränkungen $S_{1i}/H^2 \in \mathcal{B}_h(2)$

können als Spiegelungen von H^2 an den Großhyperbeln

$$G_{1i} := \{c(t) | c(t) = \cosh t e_1 + \sinh t e_i; t \in \mathbb{R}\}$$

gedeutet werden.

Entsprechend erhalten wir Spiegelungen dieser Art an allen Großhyperbeln durch e_1 als Verknüpfung von S_{1i} mit den Drehungen $D_1(t)$. So ist etwa

$$S_2(t) := S_{12} \circ D_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

für $t \neq 0$ die euklidische Spiegelung an der Ebene $x_2 = \frac{\sin t}{\cos t - 1} x_3$ und für $t = 0$ gilt $S_2(t) = S_{12}$.

Nach diesem Vorbild setzen wir jetzt

$$S_2^*(t) := S_{12} \circ B_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh t & 0 & -\cosh t \end{pmatrix}$$

und

$$S_3^*(t) := S_{13} \circ B_3(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ -\sinh t & -\cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch diese affinen Transformationen haben gewisse Eigenschaften von „Ebenspiegelungen“. Es sind sogenannte Schrägspiegelungen an Ebenen. Die Schrägspiegelungen des \mathbb{R}^3 erzeugen eine Gruppe inhaltstreuer affiner Abbildungen. In der affinen Geometrie existieren solche Abbildungen an jeder Ebene und zu jeder nicht zur Ebene parallelen Richtung als Spiegelungsrichtung. Die euklidischen Spiegelungen ordnen sich hier als Sonderfall (Orthogonalspiegelungen) ein. In unserem Fall wird die Spiegelungsrichtung durch das minkowskiorthogonale Komplement bestimmt.

Hilfssatz 2.7 Für die Lorentztransformationen $S_i^*(t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt:

- $\det(S_i^*(t)) = -1$, d.h. $S_i^*(t) \in \mathcal{L}^\uparrow(3) \setminus \mathcal{L}^{\uparrow+}(3)$.
- $S_i^*(t) \circ S_i^*(t) = \mathbf{1}$, die Abbildungen sind für $t \neq 0$ involutorisch.
- Die Menge der Fixpunkte von $S_i^*(t)$ ist eine Ebene E durch o , die H^2 in einer Großhyperbel schneidet.
- Für $x \neq x' := S_i^*(t)x$ ist die Gerade $g_{xx'}$ minkowskiorthogonal zu E und der Mittelpunkt der Strecke xx' liegt in E .

Beweis. a) ist trivial.

b) Ist $t \neq 0$, dann gilt $S_i^*(t) \neq \mathbf{1}$ aber wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt $(S_i^*(t))^2 = \mathbf{1}$.

c) Der Ansatz $S_3^*(t)(x) = x$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1(\cosh t - 1) + x_3 \sinh t &= 0 \\ -x_1 \sinh t + x_3(-\cosh t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Ebene $(\cosh t - 1)x_1 + \sinh t x_3 = 0$ für $t \neq 0$ bzw. mit der Ebene $x_3 = 0$ für $t = 0$ als Lösungsmenge. Alle Punkte dieser Ebenen sind Fixpunkte der Lorentztransformation $S_3^*(t)$.

Der Stellungsvektor dieser Ebenen ist wegen

$$-1 + 2 \cosh t - \cosh^2 t + \sinh^2 t = 2(\cosh t - 1) > 0$$

für $t \neq 0$ stets raumartig. Nach (1.8) ist c) für S_3 vollständig bewiesen. Völlig analog zeigt man c) für S_2 .

d) Es sei $x' := S_2(t)x$. Dann erhalten wir für

$$x' - x = \begin{pmatrix} x_1(\cosh t - 1) + x_3 \sinh t \\ 0 \\ -x_1 \sinh t - x_3(\cosh t + 1) \end{pmatrix} \text{ und die Vektoren } y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$z = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ 0 \\ \cosh t - 1 \end{pmatrix} \text{ der Fixpunktebene}$$

$$\langle\langle x' - x, y \rangle\rangle = \langle\langle x' - x, z \rangle\rangle = 0.$$

Und da auch

$$(x_1(\cosh t + 1) + x_3 \sinh t)(\cosh t - 1) + (-x_1 \sinh t - x_3(\cosh t - 1)) \sinh t = 0$$

gilt, erfüllt auch

$$m := \frac{1}{2}(x' + x) = \begin{pmatrix} (\cosh t + 1) + x_3 \sinh t \\ x_2 \\ -x_1 \sinh t - x_3(\cosh t - 1) \end{pmatrix}$$

die Gleichung $x_1(\cosh t - 1) + x_3 \sinh t = 0$ der Fixpunktebene. \square

Die Einschränkungen σ dieser Schrägspiegelungen auf H^2 sind die **Spiegelungen an Großhyperbeln** der hyperbolischen Ebene.

Der Hilfssatz (2.7) zeigt auch, wie man zu jeder Großhyperbel aus H^2 die entsprechende Spiegelung angeben kann.

Satz 2.8 *Zu jeder Großhyperbel $G \subset H^2$ existiert genau eine Spiegelung an σ_G .*

Beweis. Ist G , die von der Ebene E erzeugte Großhyperbel, also $G = E \cap H^2$, dann ist deren Stellungsvektor v und der zu E minkowskiorthogonale Vektor Jv raumartig. Es sei nun $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch die Eigenschaft d) aus (2.7) definierte Schrägspiegelung an E in Richtung von Jv .

Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi_{/H^2}$ eine hyperbolische Isometrie ist. Sind p und q zwei Punkte aus H^2 , dann zerlegen wir p und q in Komponenten

$$p = p_1 + p_2, \quad q = q_1 + q_2 \quad \text{mit} \quad p_1, q_1 \in E \quad \text{und} \quad p_2, q_2 \parallel Jv.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \langle\langle \varphi(p), \varphi(q) \rangle\rangle &= \langle\langle \varphi(p_1 + p_2), \varphi(q_1 + q_2) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle p_1 - p_2, q_1 - q_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle p_1, q_1 \rangle\rangle + \langle\langle -p_2, -q_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle p_1, q_1 \rangle\rangle + \langle\langle p_2, q_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle p_1 + p_2, q_1 + q_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle p, q \rangle\rangle \end{aligned}$$

Außerdem ist wegen

$$\langle\langle \varphi(p), \varphi(p) \rangle\rangle = \langle\langle p_1, p_1 \rangle\rangle + \langle\langle -p_2, -p_2 \rangle\rangle = \langle\langle p_1, p_1 \rangle\rangle + \langle\langle p_2, p_2 \rangle\rangle = \langle\langle p, p \rangle\rangle = -1$$

auch $\varphi(H^2) = H^2$, also ist $\sigma_G = \varphi_{/H^2}$. □

Für die Verknüpfungen zweier solcher Spiegelungen an G und H erhalten wir in Abhängigkeit von der Lagerrelation zwischen G und H unterschiedliche resultierende Isometrien.

Beispiel: Das Produkt

$$\begin{aligned} S_2^*(t) \circ S_2^*(t') &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh t & 0 & -\cosh t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cosh t' & 0 & \sinh t' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh t' & 0 & -\cosh t' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t' - t) & 0 & \sinh(t' - t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(t' - t) & 0 & \cosh(t' - t) \end{pmatrix} = B_2(t' - t) \end{aligned}$$

ist offenbar wieder eine hyperbolische Drehung. Die beiden Großhyperbeln, an denen hier gespiegelt wurde sind parallel und haben mit der Großhyperbel L in der $x_1 - x_3$ -Ebene ein gemeinsame Lot. In H^2 erzeugen diese beiden Spiegelungen also eine Translation längs L .

Völlig analog erhält man auch $S_3^*(t) \circ S_3^*(t') = B_3(t' - t)$, und für die euklidischen Spiegelungen gilt natürlich

$$S_2(t) \circ S_2(t') = S_3(t) \circ S_3(t') = D_1(t' - t).$$

Beachten wir noch die Sonderfälle

$$S_2(0) = S_2^*(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S_{12} \quad \text{und} \quad S_3(0) = S_3^*(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{13},$$

dann gilt also für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_1(t) &= S_2(0) \circ S_2(t) = S_3(0) \circ S_3(t), \\ B_2(t) &= S_2^*(0) \circ S_2^*(t), \\ \text{und } B_3(t) &= S_3^*(0) \circ S_3^*(t). \end{aligned}$$

Damit gilt dann

Satz 2.9 *Die folgenden Teilmengen von $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ sind von Spiegelungen erzeugte Untergruppen:*

$$a) \quad D_1 := C_1 \cup S_2(0) \circ C_1 \quad \text{mit} \quad C_1 := \{D_1(t) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$b) \quad D_2 := B_2 \cup S_2^*(0) \circ B_2 \quad \text{mit} \quad B_2 := \{B_2(t) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$c) \quad D_3 := B_3 \cup S_3^*(0) \circ B_3 \quad \text{mit} \quad B_3 := \{B_3(t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Mit dem Korollar (2.3) aus 2.1 ergibt sich als

Folgerung. Die gesamte Gruppe $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ ist eine von (Schräg-)Spiegelungen an Ebenen durch O erzeugte Untergruppe von Lorentztransformationen, d.h., die Gruppe $B_h(2)$ der hyperbolischen Isometrien von H^2 ist eine von Spiegelungen an Großhyperbeln erzeugte Gruppe.

2.4 Drehungen und Grenzdrehungen

Die im Satz (2.9) unter a) definierte Gruppe C_1 ist die von den Matrizen des Typs $D_1(t)$ erzeugte euklidische Drehgruppe. Die Bahn eines Punktes $p \neq e_1$ unter der von diesen Drehungen auf H^2 erzeugten Gruppe, der Abstandskreis um e_1 , ist ein zur $x_2 - x_3$ -Ebene paralleler euklidischer Kreis durch p .

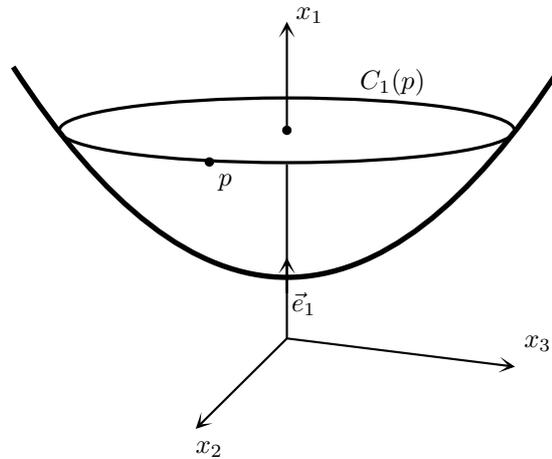


Abb. 26

Satz 2.10 Die hyperbolischen Isometrien $\{D_1(t)_{/H^2} | t \in \mathbb{R}\}$ bilden eine Untergruppe von Drehungen um e_1 von $\mathcal{B}_h(2)$.

Für sich in einem Punkt p schneidende Großhyperbeln G und H liefert das Produkt der Spiegelungen eine Isometrie mit genau einem Fixpunkt, dem Schnittpunkt p , denn ein weiterer von p verschiedener Fixpunkt q würde zunächst $q \in G, H$ und damit nach I_2 bereits $G = H$ bedeuten.

Die Bahn eines Punktes $q \in H^2 \setminus \{p\}$ in H^2 unter der von diesem Spiegelungsprodukt $\rho := \sigma_G \circ \sigma_H$ erzeugten Gruppe liegt wieder auf dem Abstandskreis um p durch q . Die Abbildung $\rho : H^2 \rightarrow H^2$ ist eine **Drehung um p** .

Beispiel: Es sei

$$\begin{aligned} B(t) := S_2^*(t) \circ S_3^*(0) &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh t & 0 & -\cosh t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sinh t & 0 & -\cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix $B(t) - \mathbb{I}$ hat den Rang 2, der Lösungsraum von $B(t)x = x$ ist die Gerade $\mathbb{R}p$ für

$$p = \sqrt{\frac{\cosh t - 1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sinh t}{1 - \cosh t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist p der Schnittpunkt der Großhyperbeln, deren Spiegelungen durch $S_2^*(t)$ und $S_3^*(0)$ gegeben sind.

Kommen wir nun zum Fall unverbindbarer Geraden. Sind G und H zwei solche Großhyperbeln, dann kann $\sigma_G \circ \sigma_H$ keinen Fixpunkt besitzen, denn dann müßte auch $\sigma_G(p) = \sigma_H(p)$ und somit $p \in G, H$ oder $G = H$ gelten.

Da Unverbindbarkeit auch ein gemeinsames Lot ausschließt, existiert auch keine Großhyperbel, die bei $\sigma_G \circ \sigma_H$ „Fixgerade“ ist. Die Bahn eines Punktes unter der von $\sigma_G \circ \sigma_H$ erzeugten Gruppe liegt also weder auf einer Großhyperbel, noch auf einem Kreis.

In der hyperbolischen Geometrie nennt man solche Spiegelungsprodukte **Grenzdrehungen**, und die Bahnen der Punkte liegen auf sogenannten **Grenzkreisen**.

Wir geben auch hierfür ein Beispiel:

Die durch die Gleichungen $x_3 = 0$ und $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ gegebenen Ebenen

$$E := \overline{\{e_1, e_2\}} \quad \text{und} \quad E' := \overline{\{e_1 + e_2, e_1 + e_3\}}$$

erzeugen nach dem Zusatz zu (1.9) unverbindbare Großhyperbeln in H^2 , da sie sich in der Geraden $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ schneiden. Die Spiegelungen an diesen Ebenen sind durch

$$\sigma_E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma'_E := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für die Matrix σ'_E kann dies etwa durch Rechnungen wie im Beweis von (2.7) verifiziert werden.

Wir erhalten

$$\sigma_E \circ \sigma'_E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass tatsächlich nur die Punkte der Geraden $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ Fixpunkte dieser Abbildung sind. Andererseits liefert

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)^3$$

den einzigen Eigenwert $+1$, es gibt also auch keine weiteren Fixgeraden bei dieser affinen Transformation des \mathbb{R}^3 .

2.5 Anhang

Wir beweisen abschließend, dass sämtliche hyperbolische Isometrien der Ebene durch die Einschränkungen der zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen auf H^2 gegeben sind.

Satz 2.11 *Es ist $\mathcal{B}_h(2) = \{\Phi_{/H^2} | \phi \in \mathcal{L}^\uparrow(3)\}$.*

Beweis. Um den Satz zu beweisen bleibt zu zeigen, dass zu jeder hyperbolischen Isometrie φ eine zeitorientierungserhaltende Lorentztransformation $\Phi \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ mit $\varphi = \Phi_{/H^2}$ existiert.

Dazu sei $x := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H^2$ mit $y_2 > 0$. Mit c bezeichnen wir den hyperbolischen Abstand $d_h(x, y)$, also gilt $\cosh c = -\langle\langle x, y \rangle\rangle = y_1$. Wegen $-1 = \langle\langle y, y \rangle\rangle = -(y_1)^2 + (y_2)^2$ erhalten wir $y = \begin{pmatrix} \cosh c \\ \sinh c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da wir $d_h(x, y) = d_h(\varphi(x), \varphi(y))$ voraussetzen, können wir für x' aus der Darstellung

$$c(t) = \cosh tx' + \sinh tb \quad \text{mit} \quad \langle\langle x', b \rangle\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle\langle b, b \rangle\rangle = 1$$

für den Großhyperbelbogen von $x' := \varphi(x)$ nach $y' := \varphi(y)$ für y' die Darstellung

$$y' = \cosh cx' + \sinh cb$$

entnehmen.

Ist nun $A = (a_{ik})$ eine 3×3 -Matrix mit $Ax = x'$ und $By = y'$, dann haben wir

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

und

$$Ay = A \begin{pmatrix} \cosh c \\ \sinh c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cosh c + a_{12} \sinh c \\ a_{21} \cosh c + a_{22} \sinh c \\ a_{31} \cosh c + a_{32} \sinh c \end{pmatrix} = \cosh cx' + \sinh c \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $b = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \frac{y' + \cosh cx'}{\sinh c}$.

Die ersten beiden Spalten der gesuchten Matrix sind also durch x' und b gegeben.

Wir definieren $v := \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \frac{J(x' \times b)}{\sqrt{|\langle\langle x' \times b, x' \times b \rangle\rangle|}}$ und erhalten eine lorentzorthogonale Matrix $A = (a_{ik}) = (x', b, v)$, denn neben $1 = -\langle\langle x', x' \rangle\rangle = \langle\langle b, b \rangle\rangle = \langle\langle v, v \rangle\rangle$ gilt wegen

$$\langle\langle x', J(x' \times b) \rangle\rangle = \langle x', x' \times b \rangle \quad \text{und} \quad \langle\langle x', J(x' \times b) \rangle\rangle = \langle b, x' \times b \rangle$$

auch $\langle\langle x', b \rangle\rangle = \langle\langle x', v \rangle\rangle = \langle\langle b, v \rangle\rangle = 0$. Außerdem ist $a_{11} = \cosh c > 0$, die durch A realisierte Abbildung ist somit auch zeitorientierungserhaltend.

Ist nun z ein weiterer nicht auf der Großhyperbel G durch x, y liegender Punkt, dann sind auch $\varphi(z)$, x' und y' nicht kollinear. Die Dreiecke $\varphi(z)x'y'$ und $AzAxAy = Azx'y'$ sind kongruent. Falls Az und $\varphi(z)$ auf derselben Seite von $\varphi(G)$ liegen, folgt $Az = \varphi(z)$ nach der Eindeutigkeit des Winkelantrags aus dem Axiom K_5 . Damit ist $\varphi(p) = Ap$ für alle $p \in H^2$.

Anderenfalls sei S die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Großhyperbel $\varphi(G)$. In diesem Fall gilt dann $\varphi(p) = Sap$. \square

Kapitel 3

Weitere Modelle der hyperbolischen Geometrie

Die Begründung der hyperbolischen Geometrie und damit die Lösung des zweitausend Jahre alten Parallelenproblems erfolgte nahezu zeitgleich durch verschiedene Mathematiker (C.F. Gauß, N. Lobačevskij, J. Bolyai) des 19. Jahrhunderts. Zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit dieser neuen geometrischen Theorie, in der alle bekannten Inzidenz, Anordnungs-, Kongruenz- und Vollständigkeitsaxiome und dazu die Negation des Parallelenaxioms gelten sollten, wurde damals und auch später verschiedene Modelle innerhalb der euklidischen Geometrie entwickelt. Wegen des Bezugs zur euklidischen Geometrie, der durch die Beschreibung der Modelle im \mathbb{R}^2 bzw. im \mathbb{R}^3 gegeben ist, spricht man häufig von „relativer Widerspruchsfreiheit“ der nichteuklidischen Geometrie.

3.1 Das Kleinsche Modell

Das nach Felix Klein (1849 - 1925) benannte Modell der hyperbolischen Ebene besteht aus der Punktmenge einer offenen Kreisscheibe. Die Modellgeraden sind hier die offenen Sehnen dieser Scheibe. Die bereits im Abschnitt 1.1 betrachtete Zentralprojektion

$$Z : H^2 \rightarrow D \quad \text{mit} \quad D = \{(1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2^2 + y_3^2 < 1\} \quad \text{und} \quad Z(x) = \frac{x}{x_1}$$

liefert eine direkte Abbildung der Punkte und Geraden des Modells H^2 auf das Kleinsche Modell D .

Die Menge der Modellpunkte als Teilmenge und die Modellgeraden als offene Strecken einer euklidischen Ebene erfüllen offensichtlich alle Inzidenzaxiome. Die Anordnungsrelation ist lediglich eine Einschränkung der entsprechenden

euklidischen Relation auf die Teilmenge D . Damit sieht man auch leicht, dass die entsprechenden Axiome gelten.

Wir haben uns auch schon an diesem Modell klargemacht, dass das euklidische Parallelenaxiom P nicht gilt, denn hier sind zwei sich nicht schneidende Sehnen der Kreisscheibe D stets parallele Modellgeraden.

Wir kommen nun zur Interpretation der Relationen „orthogonal“ und „unverbindbar“ im Kleinschen Modell und stellen dazu einige Begriffe und Aussagen aus der euklidischen Kreisgeometrie bereit.

Definition 3.1 Ist $k = k(M, r)$ ein Kreis mit dem Radius r um den Punkt M und g eine Gerade die den Kreis in den Punkten P und Q schneidet aber nicht durch M geht, dann heißt der Schnittpunkt X der Tangenten t_P und t_Q an diesen Kreis in den Punkten P und Q der **Pol der Geraden g** bezüglich k . Wir schreiben $X := \text{pol}_k(g)$.

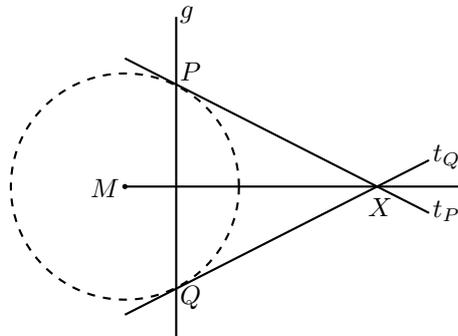


Abb. 27

Eine andere der Beschreibung der Polarität bezüglich eines Kreises k liefert der Kathetensatz der euklidischen Geometrie für rechtwinklige Dreiecke.

Hilfssatz 3.1 Ist $g \cap k = \{P, Q\}$ für eine Gerade g und einen Kreis $k = k(M, r)$ mit $M \notin g$, dann ist X der Pol von g bezüglich des Kreises k genau dann, wenn für den Schnittpunkt S der zueinander senkrechten Strecken \overline{PQ} und \overline{MX}

$$|\overline{MS}| \cdot |\overline{MX}| = r^2$$

gilt.

Beweis. Da Tangenten im Berührungspunkt mit dem Kreis mit den jeweiligen Radien rechte Winkel bilden, sind die Dreiecke MPX und MQX bei P bzw. Q rechtwinklig. Nach dem Kathetensatz gilt dann die behauptete Gleichung.

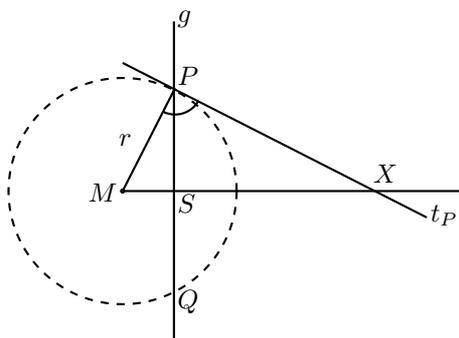


Abb. 28

Umgekehrt gilt diese Gleichung für einen Punkt X' auf dem Lot von M auf die Gerade g , dann sind die Dreieck MPX' und MQX' rechtwinklig, also ist $X' = \text{pol}_k(g)$. \square

Wir beweisen nun, dass die durch die Zentralprojektion Z in D induzierte Orthogonalität \perp_D durch die Polarität bezüglich $k := \partial D := \{x \mid x_2^2 + x_3^2 = 1 \wedge x_1 = 1\}$ beschrieben werden kann.

Satz 3.2 Sind g und h zwei Sekanten des Kreises $k = \partial D = k(M, 1)$ mit $M \notin g, h$, dann gilt

$$(g \cap D) \perp_D (h \cap D) \iff \text{pol}_k(g) \in h$$

Gilt $M \in g$ oder $M \in h$, dann sind die Modellgeraden $(g \cup D)$ und $(h \cup D)$ genau dann orthogonal, wenn g und h euklidisch orthogonale Geraden sind.

Zusatz. Es gilt $\text{pol}_k(g) \in h$ genau dann, wenn auch $\text{pol}_k(h) \in g$ gilt.

Beweis. Die Modellgeraden des Kleinschen Modells sind Bilder von Großhyperbeln unter der Projektion Z . Hier sei $g \cap D = Z(G)$ und $h \cap D = Z(H)$ für $G = E \cap H^2$ und $H = F \cap H^2$. Die Ebenen E bzw. F seien durch die Gleichungen $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ bzw. $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$ gegeben.

Durch eine Drehung $D_1(t)$ können wir nun noch erreichen, dass $c' = 0$ und $a' \cdot b' \leq 0$ gilt.

Die Strecken $g \cap D$ und $h \cap D$ liegen dann auf den Geraden der Ebene $x_1 = 1$ mit den Gleichungen

$$bx_2 = -cx_3 - a \quad \text{und} \quad b'x_2 = -a'.$$

Nach dem Hilfssatz 1.8 sind G und H genau dann orthogonal, wenn die Stellungsvektoren der Ebene E und F minkowskiorthogonal sind, also wenn $-aa' + bb' = 0$ gilt.

a) Wir setzen $M \notin g, h$ voraus, dann gilt wegen $0 \in E, F$ zunächst $a, a' \neq 0$ und damit auch $b' \neq 0$. Wir berechnen den Pol Q der Geraden h . Da h zur x_3 -Achse parallel ist, liegt Q auf der x_2 -Achse. und nach dem Hilfssatz 3.1 gilt für seine x_2 -Koordinate $q_2 = |\overline{MQ}|$ die Gleichung

$$q_2 \cdot \left| -\frac{a'}{b'} \right| = q_2 \cdot -\frac{a'}{b'} = r^2 = 1.$$

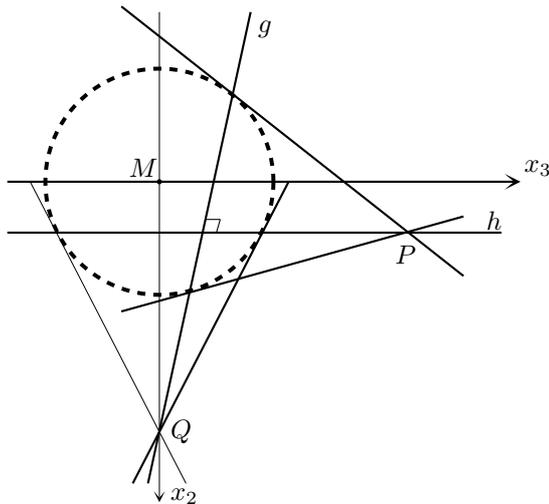


Abb. 29

Der Punkt $Q = (1, -(b'/a'), 0)^T$ liegt aber nun auf g genau dann, wenn

$$a + b \cdot -(b'/a') + c \cdot 0 = 0 \quad \text{also wenn} \quad aa' = bb'$$

gilt. Damit ist die Behauptung für den Pol von h bewiesen, analog zeigt man (mit $c = 0$), dass auch $pol_k(g) \in h$ äquivalent zu $G \perp H$ ist. Somit ist auch der Zusatz bewiesen.

b) Nun sei $M \in h$. In diesem Fall ist H die Großhyperbel in der x_3 -Ebene mit dem Stellungsvektor e_2 . Alle zu G orthogonalen Großhyperbeln liegen somit in Ebenen, für deren Stellungsvektor $v = (a, b, c)^T$ dann $b = 0$ gilt. Die Schnittgeraden solcher Ebenen mit der Ebene $x_1 = 1$ sind Parallelen zur x_2 -Achse und damit euklidisch orthogonal zu h .

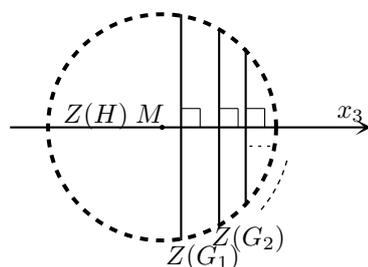


Abb. 30

Umgekehrt folgt aus $g \perp h$ auch die Minkowskiorthogonalität der Ebenen E und F bzw. der Großhyperbeln G und H . \square

Nach dem Satz 3.2 können wir nun die Konstruktion der Lotgeraden im Kleinschen Modell mit Zirkel und Lineal ausführen. Die Konstruktion der Tangenten in den Endpunkten der Strecke \overline{PQ} an den Kreis k liefert den Pol der Geraden g_{PQ} und die Geraden h durch diesen Pol erzeugen genau die sämtlichen Lote $h \cap D$ auf $g_{PQ} \cap D = (PQ)$.

Damit lassen sich nun einige Begriffe und Sachverhalte der ebenen hyperbolischen Geometrie sehr leicht veranschaulichen.

Beispiele:

1. Unverbindbare Geraden

Im Modell H^2 waren Großhyperbeln unverbindbar, wenn der Schnitt der erzeugenden Ebenen eine lichtartige Gerade war. Die Projektion Z bildet diese Geraden auf die Punkte des Kreises $k = \partial D$ ab. In der Tat sind es genau die Geraden, die sich auf dem Rand von D schneiden, deren Pole auf einer gemeinsamen Tangente an k in diesem Punkt liegen. Diese Tangente wäre das einzige gemeinsame Lot.

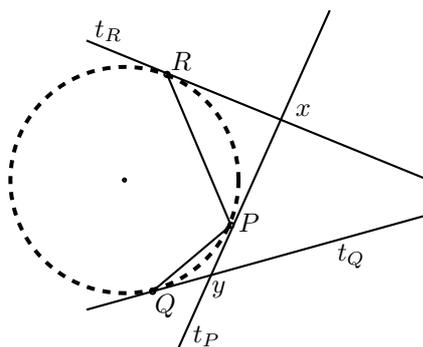


Abb. 31

2. Eindeutigkeit der Lotgeraden zu zwei Parallelen

Sind $g \cap D$ und $h \cap D$ zwei sich nicht schneidende Modellgeraden und sind P und Q deren Pole, dann liefert die Verbindungsgerade g_{PQ} das einzige gemeinsame Lot $g_{PQ} \cap D$.

Geht eine der Geraden durch den Mittelpunkt M von D , also sei etwa $M \in g$, dann erhalten wir das eindeutig bestimmte gemeinsame Lot l durch die euklidische Lotgerade zu g durch den Pol von h .

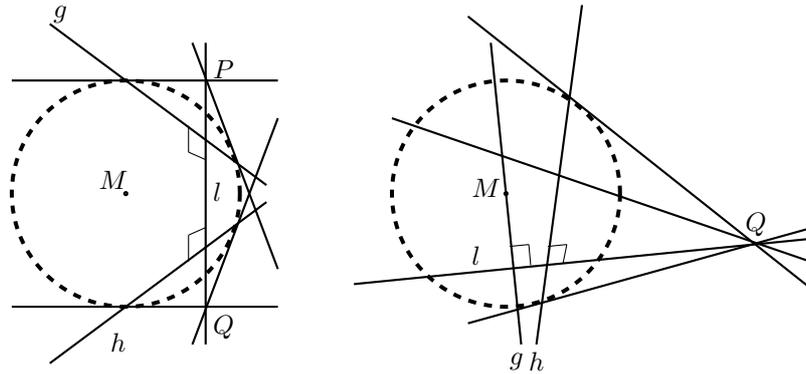


Abb. 32

3. Winkelsumme im Dreieck und Stufenwinkel

Wir wählen Punkte P und Q symmetrisch bezüglich M , also auf einem Durchmesser von D . Nach 3.2. sind die euklidischen Lote in P und Q auch Lote in diesem Modell. Wir betrachten ein euklidisches Rechteck $PQRS$ mit $R, S \in D$. Nach 2. ist die Strecke $g_{PQ} \cap D$ das einzige gemeinsame Lot auf $g_{PS} \cap D$ und $g_{QR} \cap D$.

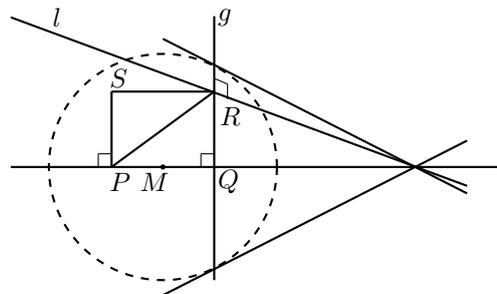


Abb. 33

Die Gerade l durch den Pol von g_{QR} und R zeigt, dass der Winkel bei R im Viereck $PQRS$ ein spitzer Winkel ist, denn diese liefert ein Lot auf die Modellgerade durch Q und R . Analog gilt dies für den Winkel bei S . Die Innenwinkelsumme im Viereck $PQRS$ ist somit kleiner als 2π .

Zerlegt man das Viereck durch die Diagonale \overline{PR} in zwei Dreiecke, dann hat mindestens eines dieser Dreiecke einen von Null verschiedenen Defekt. Die beiden parallelen Modellgeraden $g_{PQ} \cap D$ und $l \cap D$ erzeugen beim Schnitt mit der Modellgeraden $g_{QR} \cap D$ inkongruente Stufenwinkel bzw. Wechselwinkel bei Q und R .

4. Saccherisches Viereck

Um zu beweisen, dass das in 3. angegebene Viereck $PQRS$ sogar ein Saccherisches Viereck ist, muss noch die Kongruenz von (QR) und (PS) gezeigt werden.

Die Spiegelung σ an der Mittellotebene zu \overline{PQ} ist bekanntlich eine Abbildung aus $\mathcal{L}^\uparrow(3)$. Man überlegt sich leicht, dass $Z(\sigma(Z^{-1}(R))) = S$ bzw. $\sigma(Z^{-1}(R)) = Z^{-1}(S)$ gilt. Damit sind (QR) und (PS) kongruente Strecken.

Das letzte Beispiel deutet an, dass man die Bewegungen des Kleinschen Modells auch aus den Bewegungen des Modells H^2 ableiten kann, indem man die Abbildungen

$$\phi' : D \longrightarrow D \quad \text{mit} \quad \phi'(P) := Z(\phi(Z^{-1}(P))) \quad \text{für} \quad \phi \in \mathcal{B}_h(2)$$

betrachtet. Dieses Verfahren würde aber oft zu recht aufwendigen analytischen Rechnungen führen, wenn man mit diesem Bewegungsbegriff arbeiten wollte.

Wir erinnern uns, dass die Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene (wie auch in der euklidischen Geometrie) eine von Spiegelungen erzeugte Gruppe ist. Dementsprechend werden wir zunächst „Modellspiegelungen“, also Spiegelungen an Modellgeraden definieren.

Definition 3.2 Es sei (UV) eine offene Sehne des Kreises $k = \partial D$ und X ein Punkt von D , der nicht auf dieser Sehne liegt.

- a) Falls $M \in (UV)$ sei σ die Einschränkung der euklidischen Geradenspiegelung an g_{UV} auf D .
- b) Ist $P = \text{pol}_k(g_{UV})$ und g die Gerade durch X und P dann wählen wir einen Punkt $W \in g_{UV} \setminus g$, bezeichnen mit X_1 einen der Schnittpunkte von g_{XW} mit k und verbinden diesen wiederum mit dem Pol P . Die Gerade g_{X_1P} schneidet den Kreis k in einem weiteren Punkt X_2 . Verbindet man nun W mit dem Punkt X_2 , dann erhält man als Schnittpunkt mit der Geraden g einen Punkt X' . Die Abbildung σ sei nun durch $X \mapsto X' = \sigma(X)$ erklärt.

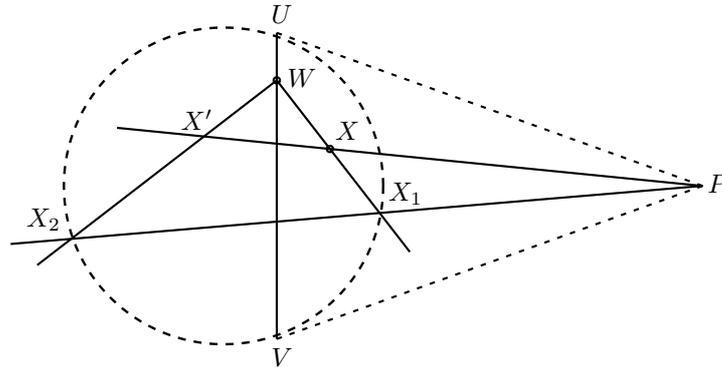


Abb. 34

σ heißt die **Spiegelung an der Modellgeraden** (UV) (in der Literatur auch: *Polarenspiegelung*) und X' ist Bild von X bei der Spiegelung an (UV) .

Offensichtlich bedarf diese Definition für den Fall b) noch einer Rechtfertigung. Es fehlt der Nachweis der Unabhängigkeit des Bildpunktes X' von der Wahl von W . Um diesen Nachweis erbringen zu können, benötigen wir den Begriff und einige Aussagen über das Doppelverhältnis von Punkten. (vgl. [4, Abschnitt 2.1.6] bzw. [5, Abschnitt 3.2.1])

Definition 3.3 Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte einer Geraden, dann heißt

$$(ABCD) := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

das **Doppelverhältnis** der Punkte A, B, C und D .

Das Doppelverhältnis ist also ein Quotient zweier Teilverhältnisse.

Beispiel: Für die Punkte A, B, C und D , die den Werten 0, 2, 3 und 4 der Zahlengeraden entsprechen, erhalten wir

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 3 : 2 = \frac{3}{2} \\ (ACBD) &= \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = -2 : 4 = -\frac{1}{2} \\ (ADBC) &= \frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} = -1 : -3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

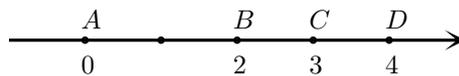


Abb. 35

Hilfssatz 3.3 *Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten ist gegen Zentralprojektion auf vier Punkte einer anderen Gerade invariant*

Beweis. Es seien A, B, C und D Punkte der Geraden g und A', B', C', D' seien deren Bilder auf der Geraden g' .

Für parallele Geraden g und g' ergibt sich aus dem Strahlensatz die Invarianz aller Teilverhältnisse, damit gilt auch die Gleichheit der Doppelverhältnisse.

Nun sei $g \nparallel g'$ vorausgesetzt.

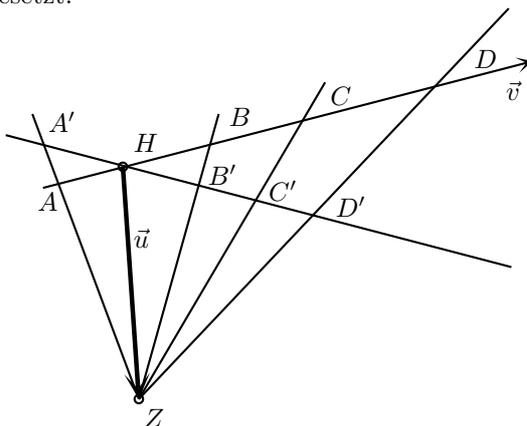


Abb. 36

Es sei Z das Projektionszentrum der Zentralprojektion und H der Schnittpunkt der Geraden g und g' . Die Vektoren $u := \overrightarrow{HZ}$ und ein beliebiger Richtungsvektor v der Geraden g sind offenbar linear unabhängig.

Somit existieren reelle Zahlen α, α' und μ mit

$$\overrightarrow{HA} = \alpha v \quad \text{und} \quad \overrightarrow{HA'} = \alpha'(u + \mu v).$$

Ist nun λ die reelle Zahl mit $\overrightarrow{AA'} = \lambda \overrightarrow{ZA}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha' u + \alpha' \mu v &= \alpha'(u + \mu v) \\ &= \overrightarrow{HA'} \\ &= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AA'} \\ &= \alpha v + \lambda \overrightarrow{ZA} \\ &= \alpha v + \lambda(\alpha v - u) \\ &= -\lambda u + \alpha(1 + \lambda)v. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\alpha' = -\lambda$ und $\alpha'\mu = \alpha(1 + \lambda)$, also

$$\alpha'\mu = \alpha(1 - \alpha')$$

und schließlich

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\mu + \alpha}.$$

Analog erhält man für $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ mit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'} &= \lambda' \overrightarrow{ZB} \\ \overrightarrow{CC'} &= \lambda'' \overrightarrow{ZC} \\ \overrightarrow{DD'} &= \lambda''' \overrightarrow{ZD}\end{aligned}$$

die entsprechenden Gleichungen

$$\beta' = \frac{\beta}{\mu + \beta}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\mu + \gamma} \quad \text{und} \quad \delta' = \frac{\delta}{\mu + \delta}.$$

Nun ergibt sich die behauptete Invarianz aus folgender Rechnung.

$$\begin{aligned}(A'B'C'D') &= \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} \\ &= \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} : \frac{\delta' - \alpha'}{\delta' - \beta'} \\ &= \frac{\frac{\gamma}{\mu + \gamma} - \frac{\alpha}{\mu + \alpha}}{\frac{\beta}{\mu + \beta} - \frac{\alpha}{\mu + \alpha}} : \frac{\frac{\delta}{\mu + \delta} - \frac{\alpha}{\mu + \alpha}}{\frac{\delta}{\mu + \delta} - \frac{\beta}{\mu + \beta}} \\ &= \frac{\frac{\mu(\gamma - \alpha)\mu(\delta - \beta)}{(\mu + \alpha)(\mu + \beta)(\mu + \gamma)(\mu + \delta)}}{\frac{\mu(\beta - \alpha)\mu(\delta - \alpha)}{(\mu + \alpha)(\mu + \beta)(\mu + \gamma)(\mu + \delta)}} \\ &= \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\beta - \alpha)(\delta - \alpha)} \\ &= \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD)\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 3.4 Ist (UV) eine offene Sehne des Kreises $k = \partial D$, die nicht durch dessen Mittelpunkt M geht, P der Pol von g_{UV} bezüglich k und g eine Kreissekante durch P , die den Kreis in Punkten P_1 und P_2 sowie (UV) im Punkt P_0 trifft, dann gilt

$$(PP_0P_1P_2) = -1.$$

Beweis. Mit $a := \overrightarrow{MP}$, $a_2 := \overrightarrow{MP_2}$ und $u := \overrightarrow{MU}$ gilt wegen $a_u = u$

$$1 = u^2 = \langle u, u \rangle = \langle a_u, u \rangle = \langle a, u \rangle = \langle u, a \rangle = \langle u_a, a \rangle.$$

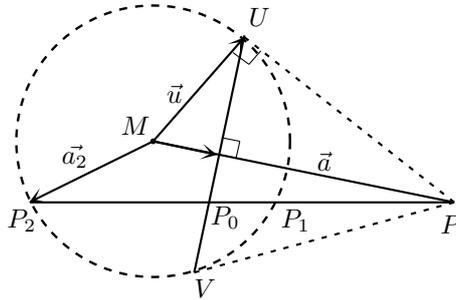


Abb. 37

Folglich gilt für die Parallelkomponente von u bezüglich a

$$u_a = \frac{\langle a, u \rangle}{a^2} a = \frac{1}{a^2} a.$$

Es sei t die reelle Zahl mit $\overrightarrow{a_0} := \overrightarrow{MP_0} = a + t(a_2 - a)$. Da $(a_0)_a = u_a$ gilt erhalten wir aus

$$1 = \langle u_a, a \rangle = \langle (a_0)_a, a \rangle = \langle a_0, a \rangle = a^2 + t(\langle a_2, a \rangle - a^2)$$

die Formel

$$t = \frac{1 - a^2}{\langle a_2, a \rangle - a^2}.$$

Es sei nun $P_1^* = M + a_1$ derjenige Punkt, für den $(PP_0P_1^*P_2) = -1$ gilt.

In Anlehnung an die Definition von Teilverhältnissen für kollineare Punkte vereinbaren wir nun auch für Vektoren v, v' mit $v \neq o$:

$$\frac{v'}{v} = t : \iff v' = tv$$

Wir erhalten so

$$-1 = \frac{a_1 - a}{a_1 - a_0} : \frac{a_2 - a}{a_2 - a_0} = \frac{a_1 - a}{a_1 - a_0} \cdot (1 - t)$$

also nacheinander

$$\begin{aligned} (1 - t)(a_1 - a) &= -(a_1 - a_0), \\ (2 - t)a_1 &= a_0 + (1 - t)a = (2 - 2t)a + ta_2, \\ a_1 &= \frac{2(1 - t)}{2 - t}a + \frac{t}{2 - t}a_2. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun abschließend $P_1^* = P_1$ indem wir $P_1^* \in k$, also $a_1^2 = 1$ zeigen. Wegen $a_2^2 = 1$ gilt

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{1}{(2 - t)^2} [4(1 - t)^2 a^2 + 4(1 - t)t \langle a, a_2 \rangle + t^2] \\ &= \frac{1}{(2 - t)^2} [(4 - 4t)a^2 + t(4 - 4t)(\langle a, a_2 \rangle - a^2) + t^2]. \end{aligned}$$

Mit $t(\langle a, a_2 \rangle - a^2) = 1 - a^2$ folgt

$$a_1^2 = \frac{(4 - 4t) + t^2}{(2 - t)^2} = 1.$$

□

Die fehlende Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes W bei der Definition des Bildpunktes X' im Fall 3.2 b) ergibt sich nun wie folgt. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden g_{X_1P} bzw. g_{XP} mit (UV) mit X_3 bzw. X_0 , dann gilt nach dem zuletzt bewiesenen Hilfssatz $(PX_3X_1X_2) = -1$. Die Zentralprojektion der Geraden g_{PX_1} auf g mit W als Zentrum liefert dann nach Hilfssatz 3.3 für die Bildpunkte ebenfalls das Doppelverhältnis $(PX_0XX') = -1$.

Somit wird bei gegebenem Punkt X der Bildpunkt X' eindeutig durch den Pol P von g_{UV} , $\{X_0\} := g_{PX} \cap (UV)$ und das Doppelverhältnis $(PX_0XX') = -1$ bestimmt.

Die Bewegungen in diesem Modell sind nun die Nacheinanderausführungen solcher Spiegelungen an Modellgeraden. Diese Definition der Bewegungen ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn es sich um Abbildungen handelt, für die der hyperbolische Abstand eine Invariante ist.

Definition 3.4 Sind X und Y zwei Punkte des Modells D , dann heißt

$$d_D(X, Y) := \begin{cases} 0 & \text{für } X = Y \\ \frac{1}{2} |\ln(X, Y, U, V)| & \text{für } X \neq Y \text{ und } \{U, V\} = g_{XV} \cap k \end{cases}$$

der hyperbolische Abstand der Punkte X und Y im Kleinschen Modell D .

Wir wollen nun zeigen, dass $d_D(X, Y)$ die Eigenschaften einer Abstandsfunktion besitzt. In Analogie zum Satz 1.5.5 in [1] gilt hier, dass d_D eine Metrik auf der Punktmenge D ist.

Satz 3.5 Die Punktmenge D bildet zusammen mit d_D einen metrischen Raum, d. h. für alle $X, Y, Z \in D$ gilt:

- (i) $d_D(X, Y) \geq 0$ und $d_D(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$,
- (ii) $d_D(X, Y) = d_D(Y, X)$,
- (iii) $d_D(X, Z) \leq d_D(X, Y) + d_D(Y, Z)$.

Beweis. Um (i) zu beweisen, bleibt nur zu zeigen, dass aus $X \neq Y$ auch $d_D(X, Y) \neq 0$ folgt. Wäre $d_D(X, Y) = \frac{1}{2} |\ln(X, Y, U, V)| = 0$, dann hätten wir $|\ln(X, Y, U, V)| = 0$ also $(X, Y, U, V) = \frac{XU}{YU} : \frac{XV}{YV} = 1$. Aus der Teilverhältnissgleichheit $\frac{XU}{YU} = \frac{XV}{YV}$ würde aber mit $X \neq Y$ der Widerspruch $U = V$ folgen.

Die Symmetrie in X und Y ergibt sich aus einer Eigenschaft für Doppelverhältnisse, denn es ist

$$(YXUV) = \frac{YU}{XU} : \frac{YV}{XV} = \left(\frac{XU}{YU} : \frac{XV}{YV} \right)^{-1} = (XYUV)^{-1},$$

und draus folgt

$$|\ln(YXUV)| = |\ln(XYUV)^{-1}| = |\ln(1) - \ln(XYUV)| = |\ln(XYUV)|.$$

Der direkte Nachweis der Dreiecksungleichung für Abstandsfunktionen erfordert meist einen erheblichen Rechenaufwand. Wir werden diesen Nachweis hier dadurch erbringen, dass wir erneut den Zusammenhang zwischen den Modellen D und H^2 nutzen, der durch die Zentralprojektion Z gegeben ist.

Wir zeigen, dass für alle Punkte $X, Y \in D$ und deren Urbilder $X' := Z^{-1}(X)$ und $Y' := Z^{-1}(Y)$ in H^2 die Gleichung $d_D(X, Y) = d_h(X', Y')$ gilt. Die Zentralprojektion Z bzw. Z^{-1} wird somit eine isometrische Abbildung zwischen den metrischen Räumen (H^2, d_h) und (D, d_D) . (Vgl. [9] Abschn. 3.1)

Es seien X und Y zwei verschiedene Punkte aus D . Bekanntlich gehören die euklidischen Drehungen $D_1(t)$ um die x_1 -Achse zu den Isometrien von H^2 . Diese Drehungen induzieren in der Ebene $x = 1$ euklidische Drehungen um den Mittelpunkt von D . Somit bleibt auch der auf D definierte Abstand d_D unverändert. Deshalb können wir vereinfachend annehmen, dass die Punkte X und Y auf einer zur x_3 -Achse parallelen Sehne in D liegen. Ihre Koordinaten seien durch

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$ angenommen.

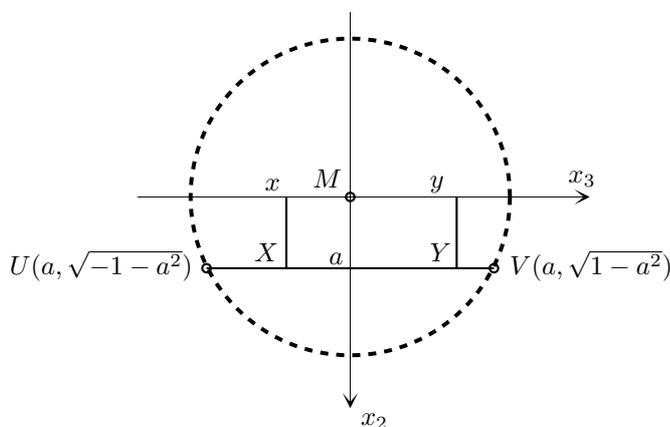


Abb. 38

Die Schnittpunkte U, V mit dem Rand von D haben dann die x_3 -Koordinaten $-\sqrt{1-a^2}$ und $\sqrt{1-a^2}$, wobei noch $|x|, |y| < \sqrt{1-a^2}$ gilt. Wir erhalten

$$d_D(X, Y) = \frac{1}{2} |\ln(X, Y, U, V)| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{XU}{YU} : \frac{XV}{YV} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{x + \sqrt{1-a^2}}{y + \sqrt{1-a^2}} : \frac{x - \sqrt{1-a^2}}{y - \sqrt{1-a^2}} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(x + \sqrt{1-a^2})(y - \sqrt{1-a^2})}{(x - \sqrt{1-a^2})(y + \sqrt{1-a^2})} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(x + \sqrt{1-a^2})^2 (y - \sqrt{1-a^2})^2}{(1-a^2-x^2)(1-a^2-y^2)} \right|
\end{aligned}$$

Mit $c_x := \sqrt{1-a^2-x^2}$ und $c_y := \sqrt{1-a^2-y^2}$ und unter Beachtung von $x + \sqrt{1-a^2} > 0$ und $y - \sqrt{1-a^2} < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
d_D(X, Y) &= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(x + \sqrt{1-a^2})^2 (y - \sqrt{1-a^2})^2}{c_x^2 \cdot c_y^2} \right| \\
&= \left| \ln \sqrt{\frac{(x + \sqrt{1-a^2})^2 (y - \sqrt{1-a^2})^2}{c_x^2 \cdot c_y^2}} \right| \\
&= \left| \ln \frac{1}{c_x \cdot c_y} (x + \sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-a^2} - y) \right| \\
&= \left| \ln \frac{1}{c_x \cdot c_y} (1-a^2 - xy + (x-y)\sqrt{1-a^2}) \right|.
\end{aligned}$$

Mit der bereits gezeigten Symmetrie von $d_D(X, Y)$ gilt nach Vertauschung von x und y auch

$$d_D(Y, X) = d_D(X, Y) = \left| \ln \frac{1}{c_x \cdot c_y} (1-a^2 - xy + (y-x)\sqrt{1-a^2}) \right|.$$

Die Zentralprojektion von D auf H^2 liefert die Punkte

$$X' = \frac{1}{c_x} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y' = \frac{1}{c_y} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$-\langle\langle X', Y' \rangle\rangle = -\frac{1}{c_x \cdot c_y} (-1 + a^2 + xy) = \frac{1}{c_x \cdot c_y} (1 - a^2 - xy)$$

und

$$\begin{aligned}
\sqrt{(-\langle\langle X', Y' \rangle\rangle)^2 - 1} &= \frac{1}{c_x \cdot c_y} \sqrt{(1-a^2-xy)^2 - c_x^2 c_y^2} \\
&= \frac{1}{c_x \cdot c_y} \sqrt{(1-a^2-xy)^2 - (1-a^2-x^2)(1-a^2-y^2)} \\
&= \frac{1}{c_x \cdot c_y} \sqrt{(y-x)^2 \cdot (1-a^2)} \\
&= \frac{1}{c_x \cdot c_y} (y-x) \sqrt{1-a^2}.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned}
 d_D(X, Y) &= \left| \ln \frac{1}{|x| \cdot |y|} (1 - a^2 - xy + (x - y) \sqrt{1 - a^2}) \right| \\
 &= \left| \ln(-\langle X', Y' \rangle) + \sqrt{(-\langle X', Y' \rangle)^2 - 1} \right| \\
 &= |\operatorname{Arcosh} - \langle X', Y' \rangle| = |d_h(X', Y')| = d_h(X', Y')
 \end{aligned}$$

Da d_h eine Metrik auf H^2 ist, gilt dies nun auch für d_D auf D . Die Zentralprojektion ist eine isometrische Abbildung zwischen diesen beiden Modellen der hyperbolischen Ebene. \square

Abschließend zeigen wir, dass der hyperbolische Abstand $d_D(X, Y)$ bei Spiegelungen an Modellgeraden und damit bei den als Verknüpfungen solcher Polarspiegelungen erklärten Modellbewegungen invariant ist.

Satz 3.6 *Für jede Spiegelung σ und alle Punkte $X, Y \in D$ gilt*

$$d_D(\sigma(X), \sigma(Y)) = d_D(X, Y).$$

Beweis. Es sei σ die Spiegelung an der Modellgeraden (UV) .

Im Fall $M \in (UV)$ ist nichts zu zeigen.

Nun sei $M \notin (UV)$.

Wir zeigen zuerst, dass σ eine Kollineation ist.

Dazu sei $(AB) = g_{XY} \cap D$ und X' und Y' seien die Bilder der Punkte X, Y bei der Spiegelung σ . P sei der Pol der Geraden g_{UV} , $\{X_0\} = g_{PX} \cap (UV)$ und $\{Y_0\} = g_{PY} \cap (UV)$. Falls nun $g_{UV} \parallel g_{XY}$ gilt, haben wir neben $(PX_0XX') = (PY_0YY') = -1$ auch $\frac{PX}{X_0X} = \frac{PY}{Y_0Y}$. Damit gilt auch $\frac{PX'}{X_0X'} = \frac{PY'}{Y_0Y'}$. Somit liegt Y' und auch jeden weiteren Punkt $Z \in (AB)$ auch dessen Bildpunkt Z' auf der Parallelen zu (UV) durch X' .

Ist $g_{UV} \not\parallel g_{XY}$ und Z der Schnittpunkt von g_{UV} mit g_{XY} , dann folgt bereits aus der Definition 3.2 der Spiegelung $g_{ZX'} = g_{ZY'}$.

Nun zur Invarianz von $d_D(X, Y)$ bzw. der Doppelverhältnisse von vier Punkten. Auch hierbei ist der Fall $g_{UV} \parallel g_{XY}$ besonders einfach, da dann bereits nach dem Strahlensatz die entsprechenden Teilverhältnisse invariant sind. Allgemeiner folgt die Behauptung aus dem Hilfssatz 3.3, wenn die Punkte X, Y nicht auf einer Geraden durch den Pol P von UV gehen.

Gilt $P \in g_{XY}$, dann betrachten wir eine solche Gerade g durch M , für die dann $\sigma(P) \notin g_{XY}$ gilt. Man überlegt sich leicht, dass durch $\sigma' := \sigma^g = \sigma_g \sigma \sigma_g$ die Modellspiegelung an (U^gV^g) gegeben ist. Da er Pol dieser Modellgeraden nun nicht auf g_{XY} liegt, haben wir die Invarianz der Doppelverhältnisse auf g_{XY} für σ' . Da dies trivialerweise auch für die euklidische Spiegelung an g gilt, ergibt sich die Behauptung für σ aus $\sigma = \sigma_g \sigma' \sigma_g$.

Die Invarianz des hyperbolischen Abstands d_D ist nun auf Grund seiner Definition eine einfache Folgerung aus der Invarianz der Doppelverhältnisse bei

Modell- bzw. Polarenspiegelungen. □

Bemerkung: *Im Beweis von 3.5 wurde die durch die Zentralprojektion gegebene Abbildung zwischen den Modellen H^2 und D genutzt. In analoger Weise hätte auch 3.6 bewiesen werden können. Dazu wäre zu zeigen, dass die Spiegelungen an Großhyperbeln in H^2 vermöge der Zentralprojektion gerade die von uns in Definition 3.2 eingeführten Polarenspiegelungen auf D induzieren.*

3.2 Das Poincaré Modell

Abschließend betrachten wir ein weiteres nach Henri Poincaré (1854 - 1912) benanntes Modell der hyperbolischen Ebene. Im Gegensatz zu dem im Abschnitt 3.5.2 der Vorlesung zur Elementargeometrie behandelten Poincaré Modell D^2 wird hier eine unbeschränkte Punktmenge der Ebene als Modell verwendet.

Als Modellpunkte wählen wir die Punkte einer offenen Halbebene \mathbb{H} . Die Geraden des Modells sind die zur Trägergeraden u der Halbebene senkrechten Halbgeraden und die offenen Halbkreise in \mathbb{H} , deren Mittelpunkte auf u liegen.

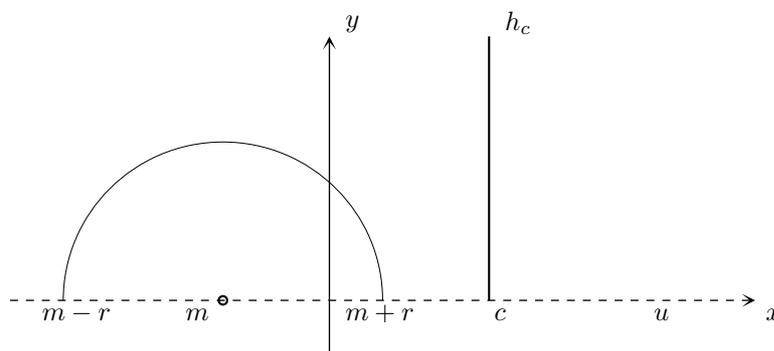


Abb. 39

In kartesischen Koordinaten kann dieses Modell durch die Mengen

$$\mathbb{P} := \mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

und

$$\mathbb{G} := \{h_c \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{k_{m,r} \mid m, r \in \mathbb{R}\}$$

mit $h_c = \{(c, y) \mid y > 0\}$ und $k_{m,r} = \{(x, y) \mid (x - m)^2 + y^2 = r^2; y > 0\}$ beschrieben werden.

Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit der Inzidenzaxiome. Insbesondere kann die Verbindungsgerade zweier Punkte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Als Anordnungsrelation betrachten wir auf den Halbgeraden h_c die Einschränkung der euklidischen Anordnung. Für die Halbkreise $k_{m,r}$ wird eine Zwischenbeziehung in natürlicher Weise durch die Anordnung der x -Koordinatenwerte ihrer Punkte definiert. Damit gelten dann auch die Axiome A_1 bis A_5 . Die folgende Abbildung zeigt verschiedene Dreiecke in diesem Modell.

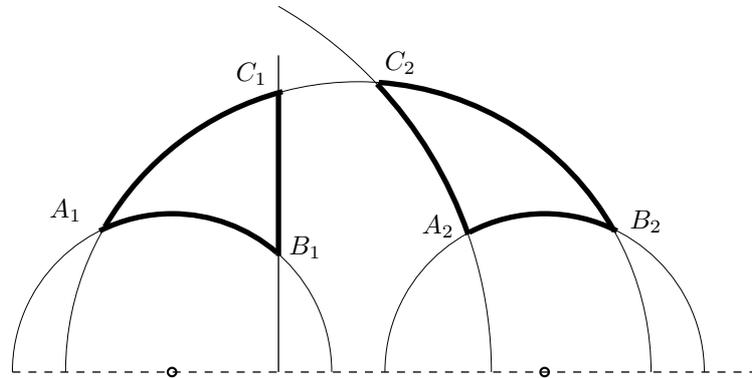


Abb. 40

Bevor wir zu den Definitionen des hyperbolischen Abstands zweier Punkte, der Isometrien dieses Modells und damit auch des Kongruenzbegriffs kommen, wollen wir zunächst den Bezug zu dem in der Vorlesung betrachteten Poincaré Modell herstellen. Die im Abschnitt 3.5 der Vorlesung behandelten Modelle wurden durch Zentralprojektionen der Punktmenge $H^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf offene Kreisscheiben in der Ebene $x_1 = 1$ bzw. $x_1 = 0$ gewonnen. Diese Abbildungen erwiesen sich dann als Isometrien zwischen den metrischen Räumen (H^2, d_h) und (D, d_D) bzw. (D^2, d_p) .

Die Punktmenge D^2 des Poincaré Kreisscheibenmodells soll nun wiederum durch eine bijektive Abbildung auf die Punktmenge \mathbb{H} des Poincaré Halbebenenmodells abgebildet werden. Dies gelingt hier durch eine Kreisspiegelung, der Inversion an einem geeigneten Kreis.

Wir kennen die Inversion am Einheitskreis s_1 bereits als eine spezielle Antimöbiustransformation der komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$. Es ist

$$s_1 : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \text{mit } s_1(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

also ist $s_1 = F_A \circ \text{conj}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entsprechend erhalten wir die Inversion

an am Kreis um $z = 0$ mit dem Radius r als $s_r = F_{A'} \circ \text{conj}$ mit $A' = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an einem beliebigen Kreis $k = k_r(z_o)$ der komplexen Ebene erhalten wir nun aus s_r durch Transformation mit der Translation

$$t : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \text{mit } t(z) = z + z_o,$$

also $s_k = t \circ s_r \circ t^{-1}$. Dies ergibt

$$s_k : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \text{mit } s_k(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_o} + z_o,$$

oder nach Erweiterung mit $(z - z_o)$

$$s_k(z) = z_o + \frac{r^2}{|z - z_o|^2}(z - z_o).$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung der Elemente $z \in \hat{\mathbb{C}}$ und $X \in \mathbb{R}^2$, die durch

$$z = x + yi \longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben ist, kann diese Abbildung für $z = x + iy$ und $z_o = x_o + iy_o$ auch in der Form

$$s_k(X) = X_o + \frac{r^2}{\|X - X_o\|^2}(X - X_o)$$

angegeben werden. Da wir am Beginn dieses Abschnitts die Punkte und Geraden des Modells in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 definiert haben, werden wir auch die Inversionen als Transformationen des \mathbb{R}^2 beschreiben und darstellen.

Definition 3.5 Ist $k = k(O, r)$ ein Kreis der Ebene ε mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r , dann heißt die durch

$$\sigma_k : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, \quad X' := \sigma_k(X) = O + \frac{r^2}{\|X - O\|^2} (X - O)$$

definierte Abbildung die **Inversion** am Kreis k .

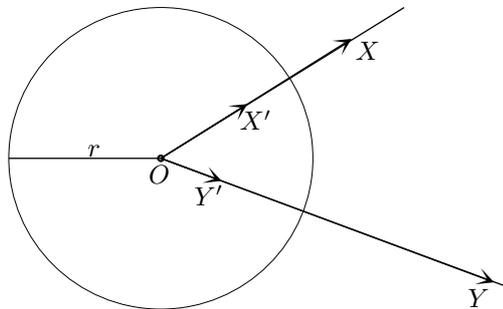


Abb. 41

Auf eine Einbeziehung des Punktes O in den Definitionsbereich können wir hier verzichten, da später nur Inversionen an Modellgeraden betrachtet werden, bei denen $O \in u$ gilt. Der Mittelpunkt ist somit niemals ein Punkt unseres Modells \mathbb{H} .

Unmittelbar der Definition entnimmt man erste Eigenschaften dieser Abbildung.

Satz 3.7 Ist σ_k die Inversion am Kreis $k = k(O, r)$, dann gilt:

- a) σ_k ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.
- b) Für alle Punkte X gilt $\langle X - O, \sigma_k(X) - O \rangle = r^2$.
- c) Es ist $\sigma_k(X) = X$ genau dann, wenn $X \in k$ gilt.
- d) σ_k ist involutorisch, d.h., für alle X gilt $\sigma_k(\sigma_k(X)) = X$.

Beweis. Die in 3.5 angegebene Abbildungsvorschrift für $\sigma_k(X)$ ist äquivalent zur Bedingung

$$\|X - O\| \cdot \|\sigma_k(X) - O\| = r^2.$$

Leicht erhält man aus dieser Gleichung die Eigenschaften a) - d). □

Da wir die Inversionen an Kreisen zur Definition von Spiegelungen in unserem Modell verwenden wollen, sind die Bilder von Geraden und Kreisen bei solchen Abbildungen von besonderem Interesse. Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz.

Hilfssatz 3.8 Ist σ_k die Inversion am Kreis $k = k(O, r)$ und sind die Punkte A, B und O nicht kollinear, dann sind die Dreiecke ABO und $A'B'O$ zueinander ähnlich, insbesondere gilt $\angle OAB \equiv \angle OB'A'$ und $\angle OBA \equiv \angle OA'B'$.

Beweis. Die beiden Dreiecke haben den gemeinsamen Winkel $\angle AOB = \angle A'OB'$ und aus $\|A - O\| \cdot \|A' - O\| = r^2 = \|B - O\| \cdot \|B' - O\|$ folgt

$$\frac{\|A - O\|}{\|B - O\|} = \frac{\|B' - O\|}{\|A' - O\|}.$$

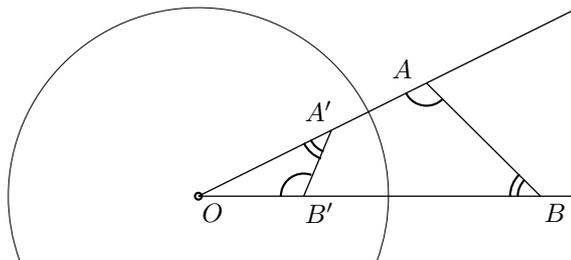


Abb. 42

Hieraus ergibt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke, wobei den Innenwinkeln bei A bzw. B im Ausgangsdreieck gerade die Innenwinkel bei B' und A' des Bilddreiecks entsprechen. □

Satz 3.9 Für die Inversion σ_k am Kreis $k = k(O, r)$ gilt:

- Für jede Gerade g mit $O \in g$ gilt $\sigma_k(g) = g$.
- Das Bild $g' = \sigma_k(g)$ ist für jede Gerade mit $O \notin g$ ein Kreis durch den Punkt O .
- Das Bild $k'_1 = \sigma_k(k_1)$ ist für jeden Kreis k_1 mit $O \in k_1$ eine Gerade, die nicht durch den Punkt O geht.
- Das Bild $k'_2 = \sigma_k(k_2)$ ist für jeden Kreis k_2 mit $O \notin k_2$ ein Kreis, der ebenfalls nicht durch den Punkt O geht.

Beweis. Die Behauptung unter a) ist eine weitere einfache Folgerung aus der Definition 3.5, nach der $\sigma_k(X) - O$ ein zu $X - O$ paralleler Vektor ist. Es sei nun g eine nicht durch O gehende Gerade und L sei der Fußpunkt des Lotes von O auf g .

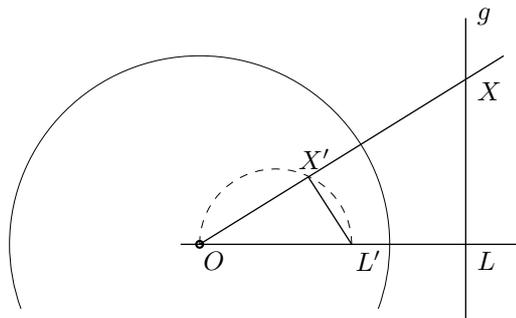


Abb. 43

Für einen beliebigen von L verschiedenen Punkt X der Geraden g und dessen Bildpunkt $X' = \sigma_k(X)$ gilt dann nach dem eben bewiesenen Hilfssatz

$$\angle OX'L' \equiv \angle O LX,$$

also ist der Winkel bei X' im Bilddreieck ebenfalls ein rechter Winkel. Nach der Umkehrung des Thalesatzes liegt X' auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{OL'}$. Mit einer völlig analogen Argumentation ergibt sich, dass zu jedem von O verschiedene Punkt Y' dieses Kreises ein Punkt $Y \in g$ mit $Y' = \sigma_k(Y)$ existiert. Damit ist b) bewiesen.

Die Behauptung c) ist nach 3.7 d) eine unmittelbare Folgerung aus b).

Nun sei $k_2 = k(M, r_2)$ ein von k verschiedener Kreis, der nicht durch O geht. Die Schnittpunkte der Geraden g_{OM} mit k_2 bezeichnen wir mit A und B und deren Bildpunkte seien A' und B' . X sei ein weiterer Punkt des Kreises k_2 .

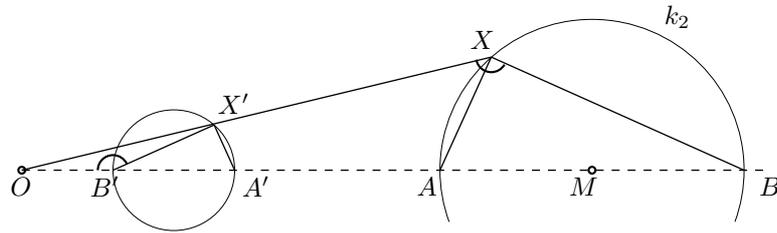


Abb. 44

Nach dem Hilfssatz 3.8 sind sowohl die Dreiecke OXA und $OX'A'$ als auch OXB und $OX'B'$ zueinander ähnlich. Wir erhalten

$$\angle OA'X' \equiv \angle OXA \quad \text{und} \quad \angle OB'X' \equiv \angle OXB.$$

Betrachten wir die Größen der Winkel, dann erhalten wir nach dem euklidischen Außenwinkelsatz

$$|\angle A'X'B'| = |\angle OB'X'| - |\angle OA'X'| = |\angle OXB| - |\angle OXA| = |\angle AXB| = \frac{\pi}{2}.$$

Wiederum liegt also X' auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{A'B'}$. Analog zeigt man, dass jeder Punkt dieses Kreises Bildpunkt eines Punktes von k_2 ist. \square

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unseren Modellen der hyperbolischen Ebene zurück.

Im \mathbb{R}^2 ist die Punktmenge D^2 der offene Einheitskreis um den Ursprung unseres Koordinatensystems. Wir betrachten die Inversion am Kreis $k = k_r(-I)$, wobei $r = \sqrt{2}$ und $-I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sei.

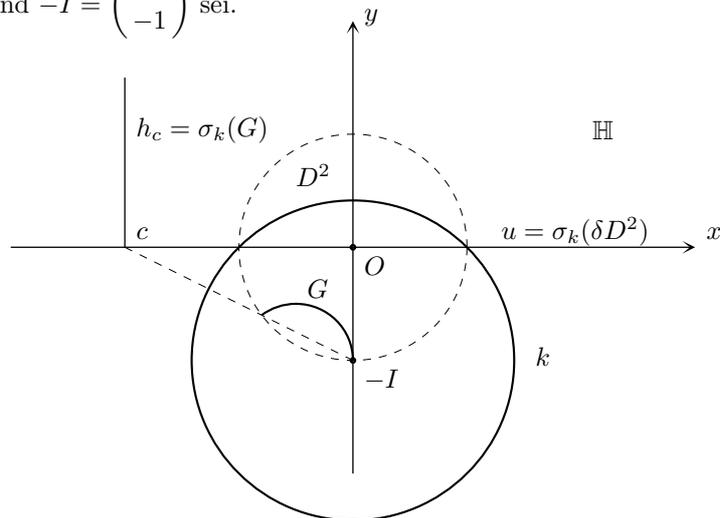


Abb. 45

Die Schnittpunkte von k und δD^2 sind die Punkte $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x -Achse und nach 3.7 b und 3.9 c ist dann diese Gerade das Bild des Kreises δD^2 , also $u = \sigma_k(\delta D^2) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

Ist $X \in D^2$, dann gilt

$$X' = \sigma_k(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{x^2 + (y+1)^2} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}.$$

Für die y -Koordinate des Bildpunktes X' gilt wegen $x^2 + y^2 < 1$ dann

$$\begin{aligned} y' &= -1 + \frac{2}{x^2 + (y+1)^2}(y+1) \\ &= \frac{-(x^2 + (y+1)^2) + 2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 + y^2) + 1}{x^2 + (y+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Die Inversion σ_k ist eine bijektive Abbildung zwischen den Punkten von D^2 und den Punkten der Halbebene \mathbb{H} . Wir erinnern daran, dass die Möbiustransformationen also insbesondere die Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen winkeltreue Abbildungen sind, die verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise abbilden. Somit werden also die Modellgeraden aus D^2 genau auf die Modellgeraden in \mathbb{H} abgebildet. Dabei sind die Halbgeraden h_c genau die Bilder derjenigen Modellgeraden G in D^2 , die im Punkt $-I$ senkrecht zu δD^2 sind. (vgl. Abb. 45) Das Bild des Durchmessers von δD^2 mit dem Endpunkt $-I$ ist der in \mathbb{H} liegende Teil der y -Achse.

Wir definieren nun den hyperbolischen Abstand zweier Punkte $X_1, X_2 \in \mathbb{H}$. Wie bei der Definition des Abstands d_D im Kleinschen Modell und von d_p im Modell D^2 nutzen wir dabei die bijektive Abbildung zwischen D^2 und \mathbb{H} .

Definition 3.6 Sind X und Y zwei Punkte aus \mathbb{H} , dann heißt

$$d(X, Y) := d_p(\sigma(X), \sigma(Y))$$

der hyperbolische Abstand der Punkte X und Y .

Auf diese Weise wird (\mathbb{H}, d) zu einem metrischen Raum und σ ist eine Isometrie zwischen (D^2, p) und (\mathbb{H}, d) . Für die so definierte Metrik kann aus der bekannten Formel für die Abstandsfunktion im Ausgangsraum auch eine entsprechende Formel für die Metrik im neuen Modell abgeleitet werden.

Wir werden zeigen, dass sich hier aus

$$\cosh(d_p(X, Y)) = 1 + \frac{2\|X - Y\|^2}{(1 - \|X\|^2)(1 - \|Y\|^2)}$$

für die Metrik in \mathbb{H}

$$\cosh(d(\sigma(X), \sigma(Y))) = 1 + \frac{\|\sigma(X) - \sigma(Y)\|^2}{2x'_2 y'_2}$$

ergibt, wobei $\sigma(X) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ und $\sigma(Y) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ ist.

Zur Vorbereitung des Beweises der angegebenen Formel stellen wir einige Begriffe und Hilfssätze bereit. Zunächst wollen wir die Spiegelungen an den Modellgeraden aus \mathbb{G} definieren.

Definition 3.7 a) Ist $h_c = \{(c, y) \mid y > 0\}$, dann heißt die Einschränkung der euklidischen Geradenspiegelung an der Geraden $x = c$ auf die Halbebene \mathbb{H} die Spiegelung an der Modellgeraden h_c .

b) Ist $k_{m,r} = \{(x, y) \mid (x-m)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$, dann heißt die Einschränkung der Inversion am Kreis $k_{m,r} = \{(x, y) \mid (x-m)^2 + y^2 = r^2\}$ auf die Halbebene \mathbb{H} die Spiegelung an der Modellgeraden $k_{m,r}$.

Bemerkung: In der komplexen Zahlenebene \mathbb{C} entsprechen diesen Spiegelungen Einschränkungen von speziellen Möbiustransformationen auf die Halbebene $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Hilfssatz 3.10 Ist $\sigma_{m,r}$ die Spiegelung an der Modellgeraden $k_{m,r}$ und $t : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ die Translation um den Vektor $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$, also $t(X) = X + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $\sigma_{m,r} = t \circ \sigma_{0,r} \circ t^{-1}$.

Beweis. Wir setzen $M = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$ und $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und berechnen unter Verwendung der Definition 3.5

$$\begin{aligned} t \circ \sigma_{0,r} \circ t^{-1}(X) &= \sigma_{0,r}(X - M) + M \\ &= O + \frac{r^2}{\|(X - M) - O\|^2}((X - M) - O) + M \\ &= M + \frac{r^2}{\|X - M\|^2}(X - M) \\ &= \sigma_{m,r}(X) \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 3.11 Sind X und Y zwei beliebige Punkte aus \mathbb{H} , dann existiert immer eine Spiegelung σ an einer Modellgeraden mit $\sigma(X), \sigma(Y) \in h_0$.

Beweis. Falls $x_1 = y_1 = c$, also $X, Y \in h_c$ gilt, spiegelt man an $h_{\frac{c}{2}}$. Gilt $x_1 \neq y_1$, dann existiert eine Modellgerade $k = k_{m,r}$ mit $X, Y \in k_{m,r}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir hier $m > 0$ annehmen. Wir betrachten nun die Spiegelung an der Modellgeraden $\bar{k} = k_{\bar{m},\bar{r}}$, wobei $\bar{m} = m+r$ und $\bar{r} = \sqrt{2r(m+r)}$ sei.

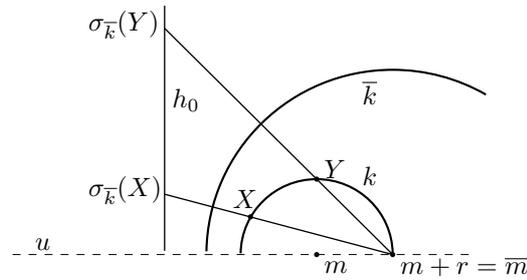


Abb. 46

Mit den Eigenschaften b) aus Satz 3.7 und c) aus Satz 3.9 ergibt sich nun für die Inversion an \bar{k} , dass $\sigma_{\bar{k}}(k) = h_0$ gilt. \square

Hilfssatz 3.12 Für zwei beliebige Punkte $X, Y \in \mathbb{H}$ und jede Spiegelung σ an einer Modellgeraden gilt

$$\frac{\|\sigma(X) - \sigma(Y)\|^2}{2x'_2 y'_2} = \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2 y_2}.$$

Beweis. Ist die Modellgerade vom Typ h_c , das heißt, σ ist Einschränkung einer euklidischen Bewegung, dann gilt $\|\sigma(X) - \sigma(Y)\| = \|X - Y\|$. Außerdem gilt dann $x_2 = x'_2$ und $y_2 = y'_2$. Damit ist die Behauptung klar.

Nun sei σ Spiegelung an einer Modellgeraden $k_{m,r}$. Nach dem Hilfssatz 3.10 genügt es die Behauptung für Spiegelungen an den Modellgeraden $k_{0,r}$ und Translationen t parallel zur Trägergeraden u zu zeigen.

Für die Translationen kann wie eben für die Spiegelung an h_c argumentiert werden.

Nun sei σ die Spiegelung an $k_{0,r}$. Es gilt dann

$$\sigma(X) = \frac{r^2}{\|X\|^2} X \text{ und } \sigma(Y) = \frac{r^2}{\|Y\|^2} Y$$

und wir erhalten

$$\frac{\|\sigma(X) - \sigma(Y)\|^2}{2x'_2 y'_2} = \frac{\left\| \frac{r^2}{\|X\|^2} X - \frac{r^2}{\|Y\|^2} Y \right\|^2}{2 \frac{r^2 x_2}{\|X\|^2} \cdot \frac{r^2 y_2}{\|Y\|^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left\| \frac{X}{\|X\|^2} - \frac{Y}{\|Y\|^2} \right\|^2}{2 \frac{x_2}{\|X\|^2} \cdot \frac{y_2}{\|Y\|^2}} \\
&= \frac{\frac{1}{\|X\|^2} - \frac{2\langle X, Y \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2} + \frac{1}{\|Y\|^2}}{\frac{2x_2 y_2}{\|X\|^2 \|Y\|^2}} \\
&= \frac{\|Y\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|X\|^2}{2x_2 y_2} \\
&= \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2 y_2}.
\end{aligned}$$

□

Schließlich berechnen wir noch den hyperbolischen Abstand zweier Punkte X, Y auf h_0 aus dem Abstand $d_p(\sigma(X), \sigma(Y))$ in D^2 .

Hilfssatz 3.13 *Sind X und Y zwei Punkte der Modellgeraden h_0 , dann gilt für deren hyperbolischen Abstand im Modell (\mathbb{H}, d)*

$$\cosh(d(X, Y)) = 1 + \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2 y_2}.$$

Beweis. Es seien $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ und $\bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in (-1, 1)$ die Bilder bzw. Urbilder der Punkte bei der Inversion am Kreis um $-I$ mit dem Radius $r = \sqrt{2}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\cosh(d_p(\bar{X}, \bar{Y})) &= 1 + \frac{2\|\bar{X} - \bar{Y}\|^2}{(1 - \|\bar{X}\|^2)(1 - \|\bar{Y}\|^2)} \\
&= 1 + \frac{2(a - b)^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)}.
\end{aligned}$$

Die Punkte X und Y ergeben sich dann als

$$X = \sigma(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{(a+1)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ a+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \sigma(\bar{Y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{(b+1)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ b+1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = -\frac{a-1}{a+1}$ und $y_2 = -\frac{b-1}{b+1}$. Damit ergibt sich nach längerer aber elementarer Rechnung

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2 y_2} &= 1 + \frac{\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{b-1}{b+1}\right)^2}{2 \frac{a-1}{a+1} \frac{b-1}{b+1}} \\
&= 1 + \frac{\frac{(2(a-b))^2}{(a+1)(b+1)}}{2(a-1)(b-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(a-1)((b-1) + \frac{(2(a-b))^2}{(a+1)(b+1)})}{2(a-1)(b-1)} \\
&= \frac{2(a^2-1)(b^2-1) + 4(a-b)^2}{2(a^2-1)(b^2-1)} \\
&= 1 + \frac{2(a-b)^2}{(a^2-1)(b^2-1)} \\
&= \cosh(d_p(\bar{X}, \bar{Y}))
\end{aligned}$$

Da nach Definition $\cosh(d(X, Y)) = \cosh(d_p(\bar{X}, \bar{Y}))$ gilt, haben wir für diese speziellen Punkte $\cosh(d(X, Y)) = 1 + \frac{\|X-Y\|^2}{2x_2y_2}$ gezeigt. \square

Satz 3.14 *Sind X und Y zwei beliebige Punkte aus \mathbb{H} , dann gilt für deren hyperbolischen Abstand*

$$\cosh(d(X, Y)) = 1 + \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2y_2}.$$

Beweis. Es seien X und Y zwei Punkte aus \mathbb{H} und σ sei die Isometrie zwischen (D^2, d_p) und (\mathbb{H}, d) . Da σ als Inversion an einem Kreis involutorisch ist, gilt für $\bar{X} = \sigma(X)$ und $\bar{Y} = \sigma(Y)$ auch $\sigma(\bar{X}) = X$ und $\sigma(\bar{Y}) = Y$. Nach dem Hilfssatz 3.11 existiert eine Spiegelung σ_1 an einer Modellgeraden, bei der X und Y auf h_0 abgebildet werden. Dementsprechend sei $X^1 := \sigma_1(X) \in h_0$ und $Y^1 := \sigma_1(Y) \in h_0$. Schließlich bezeichnen wir deren Bilder bzw. Urbilder bei σ wieder mit $\bar{X}^1 = \sigma(X^1)$ und $\bar{Y}^1 = \sigma(Y^1)$.

Die Abbildung $\phi := \sigma \circ \sigma_1 \circ \sigma$ ist eine Abbildung von D^2 auf D^2 bei der \bar{X} und \bar{Y} auf \bar{X}^1 und \bar{Y}^1 abgebildet werden. Da es sich um die Verknüpfung von Möbiustransformationen handelt, gehört ϕ zu den Isometrien von D^2 .

Damit gilt $d_p(\bar{X}, \bar{Y}) = d_p(\bar{X}^1, \bar{Y}^1)$ und mit 3.13 erhalten wir zunächst

$$\cosh(d(X, Y)) = \cosh(d_p(\bar{X}, \bar{Y})) = \cosh(d_p(\bar{X}^1, \bar{Y}^1)) = \left(1 + \frac{\|X^1 - Y^1\|^2}{2x_2^1 y_2^1}\right).$$

Nach 1.12 gilt aber auch $1 + \frac{\|X^1 - Y^1\|^2}{2x_2^1 y_2^1} = 1 + \frac{\|X - Y\|^2}{2x_2 y_2}$. Damit gilt die angegebene Formel für beliebige Punkte aus \mathbb{H} . \square

Bemerkung: *Unter Verwendung von $\text{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ rechnet man leicht nach, dass sich für den Fall $x_1 = y_1 = c$, also für den Abstand zweier Punkte auf einer Modellgeraden des Typs h_c aus obiger Formel die einfache Beziehung*

$$d_h(X, Y) := \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right|$$

ergibt.

Wir wollen nun auch in diesem Modell einige Begriffe und Aussagen der ebenen hyperbolischen Geometrie veranschaulichen.

Beispiele:

1. Parallelität

Modellgeraden sind parallel, wenn sie identisch sind oder sich nicht schneiden. Um die Negation von P zu veranschaulichen sind zu einer Modellgeraden g durch einen nicht auf g liegenden Punkt lediglich zwei g nicht schneidende Elemente aus \mathbb{G} zu konstruieren. In der folgenden Abbildung gilt $P \in h_c, k_1, k_2 \parallel h_d$.

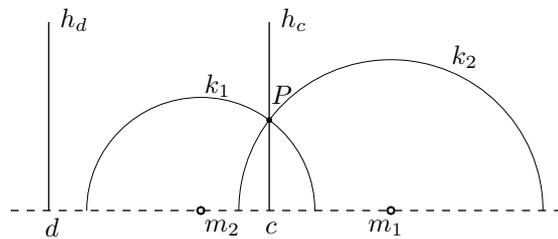


Abb. 47

2. Orthogonalität

Die Orthogonalität von Modellgeraden kann wie bereits im Kleinschen Modell praktiziert durch die Spiegelungen an diesen Geraden definiert werden. Zwei Modellgeraden g_1 und g_2 heißen zueinander orthogonal ($g_1 \perp g_2$), wenn g_1 bei der Spiegelung an g_2 auf sich abgebildet wird. Man überlegt sich leicht, dass auch diese Definition symmetrisch ist.

Für die Geraden der verschiedenen Typen bedeutet dies

- 2.1 Für Modellgeraden h_c und h_d gilt niemals $h_c \perp h_d$
- 2.2 Für h_c und $k_{m,r}$ gilt $h_c \perp k_{m,r}$ genau dann, wenn $c = m$.
- 2.3 Für $k_{m,r}$ und k_{m_1,r_1} gilt $k_{m,r} \perp k_{m_1,r_1}$ genau dann, wenn die Gleichung $(m_1 - m + r_1) \cdot (m_1 - m - r_1) = r^2$ gilt.

Zur Veranschaulichung von 2.3 kann $m = 0$ gewählt werden, so dass sich die angegebene Bedingung zu $m_1^2 = r^2 + r_1^2$ vereinfacht.

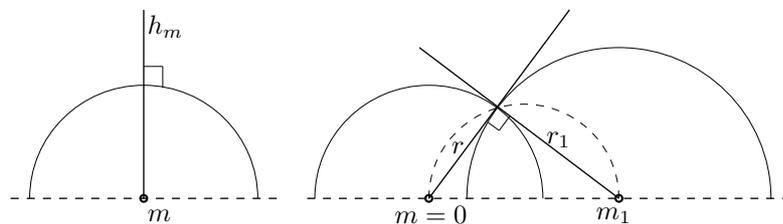


Abb. 48

Die Konstruktion der eindeutig bestimmten Lotgeraden l zu einer Geraden g durch einen gegebenen Punkt P zeigen die folgenden Abbildungen. Im nichttrivialen Fall $g = k_{m,r}$ und $P \notin h_m$ bestimmen wir $P' = \sigma_k(P)$ und konstruieren die euklidische Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{PP'}$. Deren Schnittpunkt $(m_1, 0)$ mit der Trägergeraden u ist der Mittelpunkt des Kreises, für die gesuchte Modellgerade $l = k_{m_1, r_1}$ durch P , die zu g senkrecht ist.

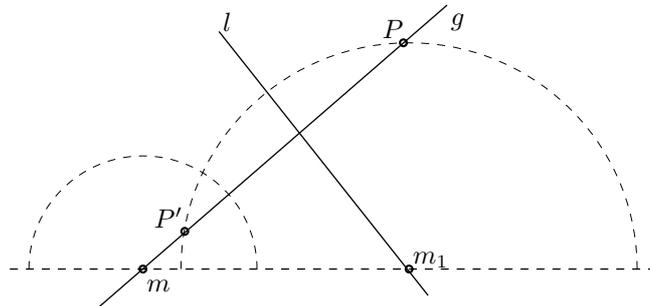


Abb. 49

3. Unverbindbarkeit

Da wir zwei Sorten von Modellgeraden zu betrachten haben ergeben sich auch mehrere Arten von unverbindbaren Geraden.

3.1 Modellgeraden h_c und h_d mit $c \neq d$ sind stets unverbindbar.

3.2 Modellgeraden h_c und $k_{m,r}$ sind genau dann unverbindbar, wenn $c = m + r$ oder $c = m - r$ gilt.

3.3 Zwei Modellgeraden $k_{m,r}$ und k_{m_1, r_1} sind genau dann unverbindbar, wenn $|m_1 - m| = r - r_1$ oder $|m_2 - m| = r + r_2$ gilt.

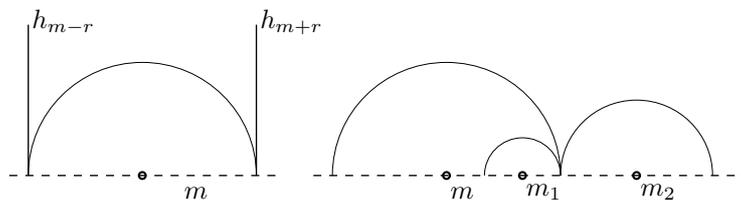


Abb. 50

4. Winkelsumme, Stufenwinkel und Saccherische Vierecke

Da Inversionen an den Modellgeraden des Typs $k_{m,r}$ zu den Bewegungen

dieser Geometrie gehören, können wir auf einfache Weise ein Saccherisches Viereck konstruieren. Dazu seien $k_1 = k_{m,r_1}$ und $k_0 = k_{m,r_0}$ zwei konzentrische Halbkreise mit $r_1 < r_0$. Die Inversion des Kreises k_1 an k_0 liefert offensichtlich den Halbkreis $k_2 := k_{m,r_2}$ mit $r_1 \cdot r_2 = r_0^2$. Sind nun P bzw. Q die Schnittpunkte, in denen k_2 und k_1 von der Halbgeraden h_m rechtwinklig geschnitten wird, dann erhalten wir mit einem beliebigen Punkt $R \in k_1 \setminus \{Q\}$ und dessen Bildpunkt S bei obiger Inversion ein Saccherisches Viereck $PQRS$.

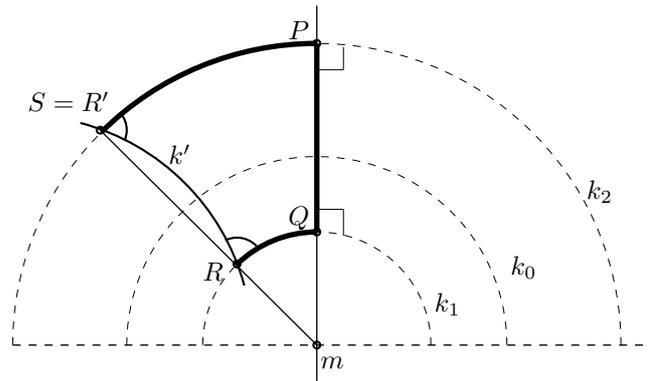


Abb. 51

Die euklidische Gerade durch R und S ist offenbar eine Sekante des Halbkreises k' , der die eindeutige Verbindungsgerade durch R und S in diesem Modell darstellt. Somit sind h_m und k' echt parallele Geraden, an denen in den Schnittpunkten mit k_1 bzw. k_2 inkongruente Stufen- und Wechselwinkel auftreten. Dagegen liefert h_m in den Schnittpunkten mit den parallelen Modellgeraden k_1 und k_2 kongruente (rechte) Stufenwinkel.

Wir geben nun noch eine Abbildung an, mit der die Punkte des Kleinschen Modells auf die Punkte von \mathbb{H} abgebildet werden können.

In kartesischen Koordinaten sind die Punktmenge dieser Modelle durch

$$D = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < 1\} \quad \text{bzw.} \quad D = \{(1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 < 1\}$$

und

$$\mathbb{H} = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_3 > 0\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{H} = \{(1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

gegeben. Wir definieren nun die Transformation $\varphi: D \rightarrow \mathbb{H}$ durch

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} := \varphi \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x'_2 = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{und} \quad x'_3 = \frac{\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}}{1 - x_3}.$$

Die Bildpunkte bei dieser Abbildung lassen sich wie folgt mit Zirkel und Lineal konstruieren.

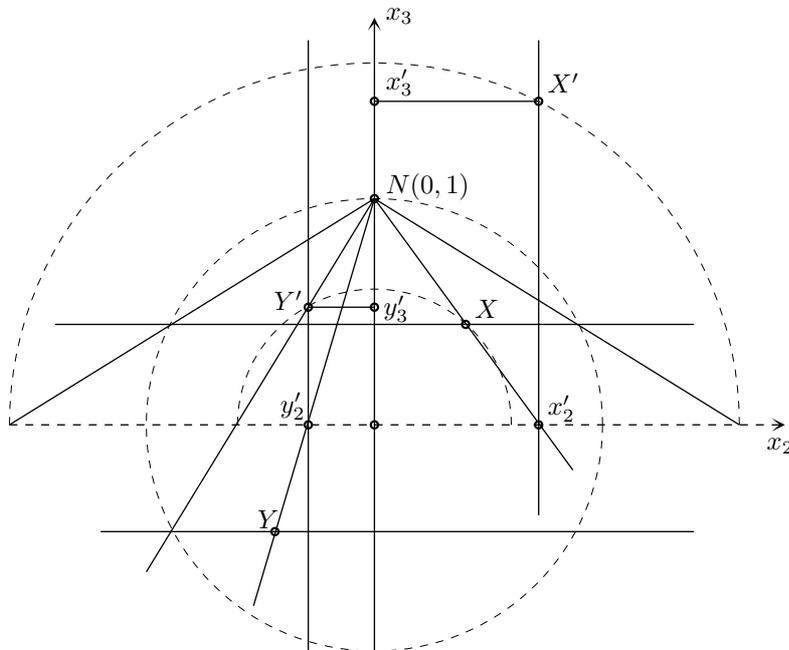


Abb. 52

Ist $X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ein Punkt von D , dann ergibt sich die Koordinate x'_2 seines Bildes durch Zentralprojektion des Punktes X auf die x_2 -Achse mit dem Zentrum im Punkt $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Bild der Kreissehne durch N und X ist somit die Modellgerade h_c mit $c = x'_2$.

Die zur x_2 -Achse parallele Sehne durch X wird ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt O . Sein Durchmesser ergibt sich aus der obigen Zentralprojektion dieser Sehne auf die x_2 -Achse.

Der Bildpunkt X' kann also immer als Schnittpunkt eines solchen Halbkreises und einer zur x_2 -Achse senkrechten Halbgeraden konstruiert werden.

Bemerkung: Die Abbildung φ ist bijektiv, ihre Umkehrabbildung φ^{-1} ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} := \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ mit } x_2^* = \frac{2x'_2}{(x'_2)^2 + (x'_3)^2 + 1} \text{ und } x_3^* = \frac{(x'_2)^2 + (x'_3)^2 - 1}{(x'_2)^2 + (x'_3)^2 + 1}.$$

Es seien nun $X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zwei Punkte aus D , ihre Bildpunkte bei den Abbildungen Z^{-1} bzw. φ wären

$$X' = \frac{1}{1 - x_2^2 - x_3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y' = \frac{1}{1 - y_2^2 - y_3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{in } H^2$$

bzw.

$$X'' = \frac{1}{1 - x_3} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y'' = \frac{1}{1 - y_3} \begin{pmatrix} y_2 \\ \sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2} \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{H}.$$

Mit der folgenden Rechnung zeigen wir

$$d(X', Y') = d(X'', Y''),$$

und damit ist $Z \circ \varphi$ eine isometrische Abbildung von (H^2, d_h) auf (\mathbb{H}, d) . Mit obigen Bezeichnungen gilt hier

$$\begin{aligned} \cosh d_h(X'', Y'') &= 1 + \frac{\langle X'' - Y'', X'' - Y'' \rangle}{2x_3y_3} \\ &= 1 + \frac{(1 - x_3)(1 - y_3)}{2\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}} \cdot \langle X'' - Y'', X'' - Y'' \rangle. \end{aligned}$$

Für das Quadrat von $X'' - Y''$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle X'' - Y'', X'' - Y'' \rangle &= \langle X'', X'' \rangle - 2\langle X''Y'' \rangle + \langle Y''Y'' \rangle \\ &= \frac{1}{(1 - x_3)^2}(x_2^2 + 1 + x_2^2 - x_3^2) \\ &\quad - 2\frac{1}{(1 - x_3)(1 - y_3)}(x_2y_2 + \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}) \\ &\quad + \frac{1}{(1 - y_3)^2}(y_2^2 + 1 + y_2^2 - y_3^2) \\ &= \frac{1 + x_3}{1 - x_3} + \frac{1 + y_3}{1 - y_3} \\ &\quad - 2\frac{1}{(1 - x_3)(1 - y_3)}(x_2y_2 + \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}) \\ &= \frac{2 - 2x_3y_3}{(1 - x_3)(1 - y_3)} \\ &\quad - 2\frac{1}{(1 - x_3)(1 - y_3)}(x_2y_2 + \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\cosh d(X'', Y'') &= 1 + \frac{(1-x_3)(1-y_3)}{2\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\sqrt{1-y_2^2-y_3^2}} \cdot \langle X'' - Y'', X'' - Y'' \rangle \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\sqrt{1-y_2^2-y_3^2}} \cdot (1-x_3y_3 - x_2y_2 - \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\sqrt{1-y_2^2-y_3^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\sqrt{1-y_2^2-y_3^2}} (1-x_2y_2 - x_3y_3) \\
&= -\langle\langle X', Y' \rangle\rangle = \cosh d_h(X', Y')
\end{aligned}$$

Abschließend formulieren wir noch einige Aussagen über die Isometriegruppe dieses Modells. Die in Definition 3.7 definierten Spiegelungen und deren Vernüpfungen sind nach dem Hilfssatz 3.12 Isometrien des metrischen Raumes (\mathbb{H}, d) . Man kann zeigen, dass diese Spiegelungen ein Erzeugendensystem der Isometriegruppe bilden. Jede Isometrie läßt sich als Produkt, also als Nacheinanderausführung von Modellspiegelungen darstellen.

Wir betrachten einige Sonderfälle solcher Spiegelungsprodukte.

Es sei $t = \sigma_g \circ \sigma_h$, wobei g und h zu u senkrechte Halbgeraden sind. Da es sich in diesem Fall um Einschränkungen euklidischer Geradenspiegelungen auf \mathbb{H} handelt, ist t die entsprechende Einschränkung einer Translation längs u .

Ist $g = h_c$ und $h = h_d$, dann ist t durch

$$t(x) = x + \begin{pmatrix} 2(d-c) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Ist $d = \sigma_k \circ \sigma_{k_1}$ mit $k = k_{m,r}$ und $k_1 = k_{m,r_1}$, dann ist d die Einschränkung einer zentrischen Streckung auf \mathbb{H} . Das Streckungszentrum ist der Punkt

$$M = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und der Streckungsfaktor ist } \frac{r_1}{r}. \text{ Das heißt } d = \theta(M, \frac{r_1}{r})|_{\mathbb{H}}.$$

In der hyperbolischen Ebene ist d ein Beispiel für eine hyperbolische **Translation**. In Analogie zur euklidischen Geometrie bezeichnen wir alle Produkte von Modellspiegelungen an parallelen aber verbindbaren Geraden als Translationen. Ist l das gemeinsame Lot der Modellgeraden g und h , dann ist $\sigma_g \circ \sigma_h$ Translation längs l .

Haben die Modellgeraden g und h einen Schnittpunkt P , dann heißt $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine **Drehung** der hyperbolischen Ebene um den Punkt P . Als Sonderfall ergibt sich auch hier für $g \perp h$ die Punktspiegelung an P .

Sind g und h unverbindbare Geraden, dann heißt $\sigma_g \circ \sigma_h$ **Grenzdrehung**. Zu diesem Typ gehört als Sonderfall auch die oben betrachtete Abbildung t .

Literaturverzeichnis

- [1] Bär, C.: *Elementargeometrie*. Skript, Potsdam, 2008.
- [2] Benz, W.: *Geometrische Transformationen*. BI-Wissenschaftsverlag, 1992.
- [3] Buchmann, G.: *Nichteuklidische Elementargeometrie*. Teubner-Verlag, 1975.
- [4] Filler, A.: *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*. BI-Wissenschaftsverlag, 1993.
- [5] Klotzek, B.: *Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrie*. Harri-Deutsch-Verlag, 2001.
- [6] Klotzek, B. u. E-Quaisser: *Nichteuklidische Geometrie*. DVW, 1978.
- [7] Nöbeling, G.: *Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene*. de Gruyter, 1976.
- [8] Rinow, W.: *Die Innere Geometrie der metrischen Räume*. Springer, 1961.
- [9] Roeser, E.: *Die nichteuklidischen Geometrien und ihre Beziehungen untereinander*. Oldenburg, 1957.
- [10] Schierhorn, U.: *Über Modelle der Lobatschewskischen Geometrie*. Wissenschaftliche Hausarbeit, Uni. Potsdam, 1996.

Index

- Seiten eines Dreiecks, 6
- absolute Geometrie, 8
- Abstand eines Punktes von einer Geraden, 21
- Abstandskreis, 39
- Außenwinkel eines Dreiecks, 8
- Defekt eines Dreiecks, 12
- Doppelverhältnis, 52
- Ecken eines Dreiecks, 6
- eigentliche zeiorientierungserhaltende LT, 28
- Einheitstreckenlänge, 24
- euklidisches Parallelenaxiom, 14
- Grenzdrehung, 41
- Grenzkreis, 41
- Großhyperbelbogen, 3
- Haubersches Theorem, 9
- hyperbolische Drehung, 31
- hyperbolische Isometrie, 5, 27
- hyperbolischer Abstand, 2
- hyperbolisches Dreieck, 6
- Innenwinkelgrößen eines Dreiecks, 6
- Innenwinkelsumme, 7
- Inversion am Kreis, 63
- Kleinsches Modell, 4, 45
- kongruent, 5
- liegt zwischen, 3
- lorenzorthogonale Matrix, 27
- Minkowski-Produkt, 1
- minkowskiorthogonal, 15
- Modellgeraden, 2
- Modellpunkt, 1
- parallel, 13
- Parallelität von Geraden, 13
- Pol einer Geraden, 46
- Polarität, 47
- Randparallele, 17
- randparallele Geraden, 17
- Saccherisches Viereck, 20
- Seitenlängen eines Dreiecks, 6
- Spiegelung an einer Großhyperbel, 36
- Spiegelungen an Großhyperbeln, 37
- Spiegelungen an Modellgeraden, 51
- Stufenwinkel, 23
- Tangentenvektor, 2
- Translation der hyp. Ebene, 32
- unverbindbare Geraden, 17
- Wechselwinkel, 23
- Winkel, 5
- Winkelgröße, 5
- Zentralprojektion, 4