Joachim Gräter
Timo Hanke

Elemente der Analysis

Potsdam, Oktober 2002

Prof. Dr. J. Gräter, Dr. T. Hanke
Universität Potsdam, Institut für Mathematik
Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam

Die neueste Version dieses Skriptes ist erhältlich unter
http://users.math.uni-potsdam.de/~graeter/

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1. Logische Zeichen

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, so können auf folgende Weise neue Aussagen gebildet werden:

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$
$\neg\mathcal{A}$	nicht $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$

Ist $\mathcal{A}$ wahr, so ist $\neg\mathcal{A}$ falsch und umgekehrt. Die Wahrheitswerte (w = wahr und f = falsch) der anderen Aussagen ergeben sich aus den Wahrheitswerten von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gemäß der folgenden Tabellen:

$\wedge$	w	f
w	w	f
f	f	f

$\vee$	w	f
w	w	w
f	w	f

$\Rightarrow$	w	f
w	w	f
f	w	w

$\Leftrightarrow$	w	f
w	w	f
f	f	w

Die logischen Zeichen $\wedge$ und $\vee$ nennt man Junktoren. Eine Aussage der Form $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bezeichnet man als Implikation, und man sagt: $\mathcal{A}$ *impliziert* $\mathcal{B}$. Gilt $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, so sagt man, die beiden Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent oder gleichwertig.

Ist A eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ eine für alle Elemente x von A definierte Aussage, dann bedeutet:

$\forall x \in A : \mathcal{A}(x)$	Für alle Elemente x der Menge A gilt die Aussage $\mathcal{A}(x)$.
$\exists x \in A : \mathcal{A}(x)$	Es gibt ein Element x der Menge A, für das die Aussage $\mathcal{A}(x)$ gilt.

Dabei heißen $\forall$ Allquantor und $\exists$ Existenzquantor. $\forall x \in A : \mathcal{A}(x)$ und $\exists x \in A : \mathcal{A}(x)$ sind selbst auch wieder Aussagen.

Für die Negation von Aussagen gelten die folgenden Regeln:

Negationen von Aussagen:

$$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}, \qquad \neg\forall x \in A : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \exists x \in A : \neg\mathcal{A}(x),$$
$$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}, \qquad \neg\exists x \in A : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall x \in A : \neg\mathcal{A}(x).$$

Beispiel.

1. Die Aussage ,,3 ist kleiner als 6" ist wahr.

2. Die Aussage ,,Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist Summe von zwei Primzahlen" ist wahr oder falsch. Allerdings ist bis heute nicht bekannt, welcher der beiden Wahrheitswerte zutrifft.

3. Die Aussagen ,,p ist ein Primteiler von 6" und ,,$p = 2 \vee p = 3$" sind äquivalent.

4. Ist $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, so ist die Aussage

$$\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists r \in \mathbb{Q} : r + r = q$$

wahr, denn sie besagt, daß jede rationale Zahl durch 2 teilbar ist. Falsch dagegen ist die Aussage

$$\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists r \in \mathbb{Q} : r \cdot r = q,$$

denn sie besagt, daß jede rationale Zahl ein Quadrat ist. Wahr ist daher die Negation

$$\exists q \in \mathbb{Q}\ \forall r \in \mathbb{Q} : r \cdot r \neq q,$$

die besagt, daß es eine rationale Zahl gibt, die kein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist. Um dieses zu zeigen, braucht lediglich eine rationale Zahl angegeben zu werden, die in $\mathbb{Q}$ kein Quadrat ist, zum Beispiel 2.

Beweismethoden im Zusammenhang mit logischer Äquivalenz:

1. Der Widerspruchsbeweis beruht auf der Tatsache, daß $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ äquivalent sind (das kann z.B. leicht mit Hilfe der oben angegebenen Tabellen überprüft werden). Statt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zu beweisen zeigt man, daß $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ falsch ist. Es wird also $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ zum Widerspruch geführt.

2. Die Kontraposition beruht auf der Tatsache, daß $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ äquivalent sind (auch das kann z.B. leicht mit Hilfe der oben angegebenen Tabellen überprüft werden). Statt $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zu beweisen zeigt man, daß $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ wahr ist.

Beispiele hierzu werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

2. Mengen

Ist M eine Menge und x ein Element von M, so schreibt man $x \in M$, anderenfalls $x \notin M$. Beispiele für Mengen sind:

$\emptyset$ die leere Menge,
$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen,
$\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Die leere Menge ist dadurch charakterisiert, daß sie keine Elemente hat. Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von A auch Element von M ist. Man schreibt dann $A \subseteq M$:

$$A \subseteq M \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in M.$$

Gilt $A \subseteq M$ und $A \neq M$, so heißt A echte Teilmenge von M, geschrieben: $A \subset M$. Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$ und $\emptyset \subseteq M$.

Ist für alle Elemente x aus M die Aussage $\mathcal{A}(x)$ definiert, so ist

$$A := \{x \in M | \mathcal{A}(x)\}$$

eine Teilmenge von M, und jedes x aus M ist genau dann in A, wenn $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.

Beispiel. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ein Quadrat und } n \leq 10\} = \{1, 4, 9\}$.

Definition 2.1 *Sind A und B Teilmengen der Menge M, so heißen*

$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\}$ *Vereinigung,*
$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B\}$ *Durchschnitt und*
$A \setminus B := \{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ *Differenz von A und B.*
$\mathcal{C}A := M \setminus A$ *heißt Komplement von A.*

Satz 2.2 *Sind A und B Teilmengen der Menge M, so gilt*

i) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$.
ii) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$.

Beweis. i) Für jedes x aus M gilt:
$x \in \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B \Longleftrightarrow x \in \mathcal{C}A \wedge x \in \mathcal{C}B \Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow$
$\neg(x \in A \vee x \in B) \Longleftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow x \in \mathcal{C}(A \cup B)$.
Für jedes $x \in M$ folgt somit $x \in \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B \Longleftrightarrow x \in \mathcal{C}(A \cup B)$, d.h. $\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B = \mathcal{C}(A \cup B)$.
ii) beweist man analog.

$\square$

Definition 2.3 *I sei eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei A_i eine Teilmenge der Menge M. Dann heißen*

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad \textit{Vereinigung und}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid \forall i \in I : x \in A_i\} \quad \textit{Durchschnitt}$$

der $A_i, i \in I$.

Beispiel.
Sei $I = \mathbb{N}$ sowie $A_i = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \frac{1}{i}\}$ und $B_i = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < \frac{1}{i}\}$.
Dann gilt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \{0\}$.

A, B seien Mengen und $a \in A, b \in B$. Dann heißt (a, b) geordnetes Paar. Sind $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$, so definiert man

$$(a, b) = (a', b') :\Longleftrightarrow a = a' \wedge b = b',$$

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

$A \times B$ ist eine Menge und heißt Produktmenge von A und B. Entsprechend definiert man

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

als Produkt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Die Elemente $(a_1, \ldots, a_n)$ von $A_1 \times \ldots \times A_n$ heißen n-Tupel .

$$A^n := A \times \ldots \times A = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

Definition 2.4 *Ist A eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von A die Potenzmenge von A, geschrieben: $\wp(A)$.*

Beispiel.

1. $A = \emptyset$. $\wp(A) = \{\emptyset\}$.
2. $A = \{a\}$. $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
3. $A = \{a, b\}$. $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
4. $A = \{a, b, c\}$. $\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Definition 2.5 *Ist A eine Menge, so bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Hat A unendlich viele Elemente, so schreibt man $|A| = \infty$.*

Satz 2.6 *Ist A eine endliche Menge mit n Elementen, so hat $\wp(A)$ genau 2^n Elemente:*

$$|A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n.$$

Bevor wir Satz 2.6 durch vollständige Induktion beweisen, soll diese Beweismethode kurz vorgestellt werden.

Beweis durch vollständige Induktion

Ist $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$ eine Aussage, so ist $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0$ wahr, wenn folgendes gilt:

(i) $\mathcal{A}(n_0)$ (Induktionsanfang).
(ii) $\forall n \geq n_0 : (\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1))$ (Induktionsschluß).

Beispiel.
$\mathcal{A}(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1), n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{A}(n)$.
Induktionsanfang: $\mathcal{A}(1) : 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$.
Induktionsschluß: $1 + 2 + \ldots + n + n + 1 \underset{\uparrow \mathcal{A}(n)}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)$.

Beweis von Satz 2.6: $\mathcal{A}(n) : |A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n, n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Induktionsanfang: $\mathcal{A}(0)$.
$|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\wp(A)| = 1 = 2^0$.
Induktionsschluß: $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$.
$|A| = n+1$, etwa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Definiere $A' := \{a_1, \ldots, a_n\}$, also $|A'| = n$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $|\wp(A')| = 2^n$, etwa $\wp(A') = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2^n}\}$.
Die M_i sind genau die Teilmengen von A, die a_{n+1} nicht enthalten. Es folgt

$$\wp(A) = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2^n}, M_1 \cup \{a_{n+1}\}, M_2 \cup \{a_{n+1}\}, \ldots, M_{2^n} \cup \{a_{n+1}\}\},$$

d.h. $|\wp(A)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

□

3. Abbildungen

Sind A und B Mengen, so heißt eine Vorschrift f, die jedem a aus A genau ein b aus B zuordnet, eine Abbildung oder Funktion von A nach B, geschrieben

$$f : A \longrightarrow B.$$

Wird a aus A das Element b aus B zugeordnet, so schreibt man

$$a \longmapsto b \qquad \text{oder} \qquad f(a) = b.$$

A heißt Definitionsbereich von f, und B heißt Bildbereich von f.
Zwei Funktionen $f : A \to B,\quad f' : A' \to B'$ heißen gleich, wenn $A = A', B = B'$ und $f(a) = f'(a)$ für alle $a \in A$ gilt.

Beispiel.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 1 + x^2, \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto 1 + x^2$. Da f und g verschiedene Bildbereiche haben, sind f und g verschieden.

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \frac{1}{2}(1 - (-1)^x)$.

   $$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} 0 & falls \;\; x \quad gerade \\ 1 & \quad ungerade. \end{cases}$$

   f und g sind gleich.

Definition 3.1 *Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so heißt*

$$f(A) := \{b \in B | \exists a \in A : f(a) = b\}$$

das Bild von f, und f heißt surjektiv, wenn $f(A) = B$, d.h., wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

Beispiel.
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$. Dann ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ das Bild von f, und f ist nicht surjektiv. Hier wurde die Eigenschaft von $\mathbb{R}$ benutzt, daß ein $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Quadrat in $\mathbb{R}$ ist, wenn $a \geq 0$.

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$. Dann ist $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ das Bild von g, d.h., g ist surjektiv. Für die Berechnung von $g(\mathbb{R})$ wurde ausgenutzt, daß jede Gleichung $x^3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ lösbar ist.

Definition 3.2 *Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so heißt f injektiv, wenn für alle $a, a' \in A$ gilt:*

$$f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

Beispiel.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(1) = f(-1)$, aber $1 \neq -1$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ist injektiv:
Zunächst gilt für alle $a \in \mathbb{R} : \quad a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$, denn es gilt $a^3 \leq 0$ falls $a \leq 0$ und $1 > a > a^2 > a^3$ falls $0 < a < 1$ sowie $1 < a < a^2 < a^3$ falls $1 < a$.

Wir zeigen nun, daß g injektiv ist:
Gilt $x^3 = y^3$ und $x = 0$, dann folgt $x^3 = 0$, also $y^3 = 0$ und $y = 0 = x$.
Gilt $x^3 = y^3$ und $x \neq 0$, dann folgt $1 = \left(\frac{y}{x}\right)^3$, also $\frac{y}{x} = 1$, d.h. $x = y$.

Für den Nachweis der Injektivität von g wurden wesentlich die Ordnungseigenschaften von $\mathbb{R}$ ausgenutzt.

Definition 3.3 *Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so heißt f bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.*

Zum Beispiel ist $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$ bijektiv.

Die Hintereinanderschaltung (Komposition) von Abbildungen.

Sind

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{und} \quad g : B \longrightarrow C$$

Abbildungen, so definiert man

$$g \circ f : A \longrightarrow C, a \longmapsto g(f(a)).$$

$g \circ f$ heißt Komposition von g und f, und $g \circ f$ ist auch definiert, wenn $f(A)$ *nur* im Defintionsbereich von g enthalten ist.

Beispiel.
$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0, z \longmapsto z^2$.
$g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n - 9$,
$g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, z \longmapsto 2z^2 - 9$,
$f \circ g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0, n \longmapsto 4n^2 - 36n + 81$.
Im allgemeinen gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Satz 3.4 *Sind $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen, so gilt*
i) f, g surjektiv $\Longrightarrow g \circ f$ surjektiv.
ii) f, g injektiv $\Longrightarrow g \circ f$ injektiv.
iii) f, g bijektiv $\Longrightarrow g \circ f$ bijektiv.

Beweis. i) Zu jedem $c \in C$ gibt es $b \in B$ mit $g(b) = c$, da g surjektiv. Zu b gibt es $a \in A$ mit $f(a) = b$, da f surjektiv. Also $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.
ii) Gilt $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, so folgt $g(f(a)) = g(f(a'))$ und $f(a) = f(a')$, da g injektiv ist. Da f injektiv ist, folgt $a = a'$.
iii) folgt aus i) und ii).

□

Satz 3.5 *$f : A \to B$ ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ Es gibt $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

Bemerkung. Für jede Menge C ist $\mathrm{id}_C : C \longrightarrow C, c \longmapsto c$ die identische Abbildung von C.

Beweis $'' \Rightarrow''$: Da f surjektiv ist, existiert zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, und da f injektiv ist, ist a eindeutig bestimmt. $g : B \to A$ sei nun die Funktion, die jedem $b = f(a)$ genau dieses a zuordnet.
$(g \circ f)(a) = a$ folgt sofort nach Definition von g, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
Jedes $b \in B$ läßt sich in der Form $b = f(a)$ schreiben, also $(f \circ g)(b) = (f \circ g)(f(a)) = f(g(f(a)) = f(a) = b$, d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
$'' \Leftarrow''$: Für jedes $b \in B$ gilt $b = \mathrm{id}_B(b) = f(g(b)) \in f(A)$, d.h. f ist surjektiv.
Für $a, a' \in A$ gilt: $f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$, d.h. f ist injektiv.

□

4. Die reellen Zahlen

Im folgenden sollen grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen ohne Beweise aufgelistet werden. Alle übrigen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und weitere Resultate der reellen Analysis lassen sich dann hieraus ableiten. Die genaue Definition und Begründung von $\mathbb{R}$ soll hier im Einzelnen nicht vorgenommen werden. Dazu sei auf die Vorlesung *Algebra und Arithmetik* verwiesen, in der $\mathbb{R}$ zum Beispiel als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des gewöhnlichen Absolutbetrages eingeführt wird. Diese Eigenschaft legt $\mathbb{R}$ im wesentlichen eindeutig fest.

Das Axiomensystem von $\mathbb{R}$ zerfällt in drei Axiomengruppen:

- Die Körperaxiome (Axiome 1-6).
- Die Anordnungsaxiome (Axiome 7-9).
- Das Stetigkeitsaxiom (Axiom 10).

<u>Die Körperaxiome</u>

1) In $\mathbb{R}$ sind eine Addition "$+$" und eine Multiplikation "$\cdot$" definiert.

2 a) Die Addition ist assoziativ: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$.
  b) Die Multiplikation ist assoziativ: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3 a) Die Addition ist kommutativ: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$.
  b) Die Multiplikation ist kommutativ: $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$.

4 a) $\mathbb{R}$ besitzt bezüglich der Addition ein neutrales Element 0: $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$.
  b) $\mathbb{R}$ besitzt bezüglich der Multiplikation ein neutrales Element 1: $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$.
  c) $1 \neq 0$.

5 a) Jedes $a \in \mathbb{R}$ hat bezüglich "$+$" ein Inverses: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a + b = 0$.
  b) Jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat bezüglich "$\cdot$" ein Inverses: $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1$.

6) Es gilt das Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Bemerkung.

1. Die Axiome 1-6 besagen gerade, daß $\mathbb{R}$ ein Körper ist. 0 und 1 sind durch 4a) und 4b) eindeutig bestimmt.

2. Das zu jedem $a \in \mathbb{R}$ wegen 5a) existierende $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$ ist eindeutig durch a bestimmt und wird mit $-a$ bezeichnet, also $a + (-a) = 0$. Es folgt $-(-a) = a$. Abkürzend schreibt man auch $a' - a$ statt $a' + (-a)$ für alle $a, a' \in \mathbb{R}$.

3. Das zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wegen 5b) existierende $b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot b = 1$ ist eindeutig durch a bestimmt und wird mit a^{-1} bezeichnet, also $a \cdot a^{-1} = 1$. Es folgt $(a^{-1})^{-1} = a$. Abkürzend schreibt man auch $\frac{a'}{a}$ statt $a' \cdot a^{-1}$ für alle $a, a' \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

4. Wegen Axiom 4b) gilt $1 \in \mathbb{R}$. Ist nun weiterhin n eine natürliche Zahl mit $n \in \mathbb{R}$, so folgt $n+1 \in \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ bezüglich $''+''$ abgeschlossen ist. Somit ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gezeigt, und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ergibt sich jetzt unmittelbar aus den Axiomen 4a) und 5a). Schließlich ist $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen Axiom 5b) und damit $\frac{m}{n} \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, da $\mathbb{R}$ bezüglich $''\cdot''$ abgeschlossen ist, d.h. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrational.

5. Aus den Axiomen 1-6 lassen sich bereits viele Rechenregeln für die reellen Zahlen ableiten. Dazu folgende Beispiele.

   (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot 0 = 0$.
   Beweis: $0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot (0+0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$.

   (b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
   Beweis: Wegen $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$ folgt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Die Anordnungsaxiome

7) In $\mathbb{R}$ ist eine lineare Ordnung $'' \leq ''$ definiert, d.h.

   (a) $'' \leq ''$ ist reflexiv: $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$.

   (b) $'' \leq ''$ ist transitiv: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : ((a \leq b \wedge b \leq c) \Longrightarrow a \leq c)$.

   (c) $'' \leq ''$ ist antisymmetrisch: $\forall a, b \in \mathbb{R} : ((a \leq b \wedge b \leq a) \Longrightarrow a = b)$.

   (d) $'' \leq ''$ ist linear: $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b \vee b \leq a)$.

8) $'' \leq ''$ ist mit der Addition verträglich: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c)$.

9) $'' \leq ''$ ist mit der Multiplikation verträglich: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : ((a \leq b \wedge c \geq 0) \Longrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c)$.

Bemerkung.

1. Die Axiome 1-9 besagen gerade, daß $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist.

2. Gilt $a \leq b$, so schreibt man $b \geq a$, und $a < b$ bzw. $b > a$ bedeutet $a \leq b, a \neq b$. Gilt $a > 0$, so heißt a positiv und negativ, wenn $a < 0$. Offenbar ist a genau dann positiv, wenn $-a$ negativ ist (vgl. Axiom 8).

3. Mit Hilfe der Axiome 1-9 lassen sich bereits wesentliche Eigenschaften der reellen Zahlen beweisen. Hierzu zwei Beispiele.

   (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a^2 \geq 0$.
   Beweis: Gilt $a \geq 0$, so folgt $a^2 \geq 0$ unmittelbar wegen Axiom 9. Gilt jedoch $a \leq 0$, so folgt $-a \geq 0$, also $a^2 = -(-a) \cdot a = (-a)^2 \geq 0$.

   (b) Für alle $a \in \mathbb{R}, a \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die

   $$\text{Bernoullische Ungleichung: } (1+a)^n \geq 1 + na.$$

   Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt die Behauptung offensichtlich. Gilt nun $(1+a)^n \geq 1+na$, so folgt $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$, und damit die Behauptung für $n+1$.

Definition 4.1 *Ist $a \in \mathbb{R}$, so heißt*

$$| a | := \begin{cases} a & \\ & falls \\ -a & \end{cases} \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ \\ a < 0 \end{matrix}$$

der Absolutbetrag oder Betrag von a.

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht davon, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$| a | \geq 0, \ | a | = | -a |, \ | a \cdot b | = | a | \cdot | b | \text{ und } | a | = \max\{a, -a\}.$$

Satz 4.2 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$| a + b | \leq | a | + | b | \quad \textit{und} \quad || a | - | b || \leq | a - b | \,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Ungleichung. Wegen $a \leq | a |$ und $b \leq | b |$ folgt $a + b \leq | a | + | b |$, und wegen $-a \leq | a |$ und $-b \leq | b |$ folgt $-(a+b) \leq | a | + | b |$. Insgesamt ist also $| a + b | = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq | a | + | b |$.
Die zweite Ungleichung ergibt sich folgendermaßen aus der ersten:

$$| a | = | a - b + b | \leq | a - b | + | b | \Longrightarrow | a | - | b | \leq | a - b | \,.$$

Entsprechend gilt $| b | - | a | \leq | a - b |$, also

$$|| a | - | b || \leq | a - b | \,.$$

□

Bemerkung. Die Ungleichung $| a + b | \leq | a | + | b |$ heißt Dreiecksungleichung.
In der reellen Analysis spielen die offenen und abgeschlossenen Intervalle eine zentrale Rolle: Sind $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, so heißt

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall mit den Grenzen a und b und
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall mit den Grenzen a und b.

Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden ebenfalls als Intervalle bezeichnet:

$$\begin{array}{ll} (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, & [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\ (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, & (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ (-\infty, \infty) := \mathbb{R}. & \end{array}$$

Weitere wichtige Begriffe in diesem Zusammenhang sind *obere Schranke* und *Supremum* sowie *untere Schranke* und *Infimum*. Dazu folgende

Definition 4.3 *Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann heißt $a \in \mathbb{R}$ obere Schranke von M, wenn $x \leq a$ für alle $x \in M$ gilt. a heißt Supremum von M, wenn a die kleinste obere Schranke von M ist. M heißt nach oben beschränkt, wenn M eine obere Schranke hat.*

Bemerkung. Entsprechend definiert man die Begriffe *untere Schranke* und *Infimum*. M heißt nach unten beschränkt, wenn M eine untere Schranke hat, und beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel. Ist $a < b$, so sind die Intervalle $(a, b), (a, b], [a, b]$ und $[a, b)$ beschränkt und haben das Supremum b sowie das Infimum a. Die Intervalle $(a, \infty), [a, \infty)$ sind nicht nach oben beschränkt und haben das Infimum a, während $(-\infty, b)$ und $(-\infty, b]$ nicht nach unten beschränkt sind und das Supremum b haben.

Nun sind die notwendigen Begriffe eingeführt, um das noch fehlende Stetigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ zu formulieren.

Das Stetigkeitsaxiom

10) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist, so existiert in $\mathbb{R}$ das Supremum von M.

Bemerkung.

1. Auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sind ebenfalls Addition, Multiplikation und eine lineare Ordnung definiert, so daß $\mathbb{Q}$ bezüglich dieser ein angeordneter Körper ist. Der wesentliche Unterschied zu $\mathbb{R}$ besteht darin, daß es in $\mathbb{Q}$ beschränkte nichtleere Mengen gibt, die kein Supremum oder Infimum in $\mathbb{Q}$ besitzen. Dieses wird später noch genauer erörtert. $\mathbb{C}$ ist zwar ein Körper, aber bezüglich keiner Anordnung ein angeordneter Körper, denn bei jeder Anordnung wäre $1 > 0$, da 1 ein Quadrat ist, also $-1 < 0$. In $\mathbb{C}$ ist aber -1 ebenfalls ein Quadrat.

2. Axiom 10 heißt auch *Satz vom Supremum*. Hier ist es aber kein beweisbarer Satz, sondern ein Axiom. Entsprechend formuliert man den *Satz vom Infimum*, den man folgendermaßen aus Axiom 10 ableiten kann: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist, so ist $-M := \{-m \mid m \in M\}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Wegen Axiom 10 existiert das Supremum s von $-M$. Offenbar ist $-s$ das Infimum von M.

Wie der Satz vom Supremum (Axiom 10) konkret benutzt werden kann, zeigt das folgende

Beispiel. Zu jedem $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}, b > 0$ mit $b^n = a$.

Beweis. Wir definieren $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^n \leq a\}$. Gilt $a \geq 1$, so folgt $1 \in M$, und gilt $a < 1$, so folgt $a \in M$, d.h. M ist nicht leer.

Wir zeigen nun, daß $1 + a$ eine obere Schranke von M ist. Gibt es ein $x \in M$ mit $1 + a < x$, also $(1 + a)^n < x^n \leq a$, so ergibt sich aus der Bernoullischen Ungleichung der Widerspruch $a > (1 + a)^n \geq 1 + na \geq a$. Folglich ist $x \leq 1 + a$ für alle $x \in M$.

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz vom Supremum erfüllt, d.h., das Supremum b von M existiert, $b > 0$. Zu zeigen bleibt, daß weder $b^n < a$ noch $b^n > a$ gelten kann, und somit $b^n = a$ gilt.
Annahme: $b^n < a$, also $0 < 1 - \frac{b^n}{a} < 1$ und $0 < \frac{1}{n}(1 - \frac{b^n}{a}) < \frac{1}{n} \leq 1$, d.h. $0 < 1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{b^n}{a}) < 1$. Definieren wir $y := 1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{b^n}{a})$, so gilt $0 < y < 1$ und $y^n = (1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{b^n}{a}))^n \geq \frac{b^n}{a}$ wegen der

Bernoullischen Ungleichung. Also ist $(\frac{b}{y})^n \leq a$, d.h. $\frac{b}{y} \in M$ und $\frac{b}{y} \leq b$, da b das Supremum von M ist. Somit erhalten wir den Widerspruch $1 \leq y$.

Annahme: $a < b^n$, also $0 < 1 - \frac{a}{b^n} < 1$ und $0 < \frac{1}{n}(1 - \frac{a}{b^n}) < \frac{1}{n} \leq 1$, d.h. $0 < 1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{a}{b^n}) < 1$. Definieren wir $y := 1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{a}{b^n})$, so gilt $0 < y < 1$ und $y^n \geq \frac{a}{b^n}$, also $yb < b$ und $(yb)^n \geq a$. Da b das Supremum von M ist, existiert ein $x \in M$ mit $yb < x \leq b$, und es folgt der Widerspruch $a \leq (yb)^n < x^n \leq a$.

Ergänzung: $b \in \mathbb{R}, b > 0$ mit $b^n = a$ ist sogar eindeutig bestimmt, denn ist $c \in \mathbb{R}, c > 0$ mit $c^n = a$ und $b < c$, so folgt $0 < \frac{b}{c} < 1$, also $0 < (\frac{b}{c})^n < 1$, im Widerspruch zu $(\frac{b}{c})^n = \frac{b^n}{c^n} = \frac{a}{a} = 1$. Man schreibt $b = \sqrt[n]{a}$ und nennt b die n-te Wurzel aus a.

5. Folgerungen aus dem Satz vom Supremum

In diesem Abschnitt beweisen wir drei wichtige Folgerungen aus dem Satz vom Supremum.

Satz 5.1 *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Annahme: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq x$. Dann ist x eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$, und wegen des Satzes vom Supremum existiert das Supremum s von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Damit ist $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also $s - 1 < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt der Widerspruch $s < n + 1 \in \mathbb{N}$.

$\square$

Bemerkung. Die Aussage von Satz 5.1 bezeichnet man auch als *Archimedisches Axiom*. Hier ist es jedoch kein Axiom von $\mathbb{R}$, sondern ein beweisbarer Satz.

Einfache Folgerungen.

1. Ist $x \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.
   Beweis. Sei zunächst $0 \leq x$ und $M = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq x\}$. Dann gilt $0 \in M$. Wäre für jedes $n \in M$ auch $n + 1 \in M$, so wäre $\mathbb{N}_0 \subseteq M$, also $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu Satz 5.1. Also gibt es ein $n \in M$ mit $n + 1 \notin M$, d.h. $n \leq x < n + 1$. Gilt $x < 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq -x < n + 1$, also $-n - 1 < x \leq n$. Ist $x = n$, so folgt $n \leq x < n + 1$.

2. Sind $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$.
   Beweis. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{y}{x} < n$.

3. Ist $x \in \mathbb{R}, x > 0$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < nx$, also $0 < \frac{1}{n} < x$.
   Beweis. Wähle $y = 1$ in Folgerung 2.

4. Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$ (d.h., $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$).
   Beweis. Wegen Folgerung 3 gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $1 < m(y - x)$ und wegen Folgerung 1 gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n - 1 \leq mx < n$. Insgesamt gilt also $n < my$ und $mx < n$, also $x < \frac{n}{m} < y$.

Satz 5.2 *Ist* $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \ldots$ *eine bezüglich der Inklusion absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen, so gibt es ein* $x \in \mathbb{R}$*, das in jedem Intervall* $[a_i, b_i], i \in \mathbb{N}$ *enthalten ist.*

Beweis. Wir definieren $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und zeigen zunächst, daß jedes $b_j, j \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke von A ist. Sei also $a_i \in A$. Gilt $i \leq j$, so folgt $[a_i, b_i] \supseteq [a_j, b_j]$ und damit $a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$, d.h. $a_i \leq b_j$. Gilt aber $j < i$, so folgt $[a_j, b_j] \supseteq [a_i, b_i]$ und damit $a_j \leq a_i \leq b_i \leq b_j$, d.h. $a_i \leq b_j$. Wegen des Satzes vom Supremum existiert das Supremum s von A mit $a_i \leq s \leq b_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, also $s \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$.

□

Bemerkung.

1. Die Aussage von Satz 5.2 bezeichnet man auch als *Intervallschachtelungsaxiom*. Hier ist es jedoch kein Axiom von $\mathbb{R}$, sondern ein beweisbarer Satz. Genau genommen haben wir also gezeigt, daß in einem geordneten Körper, in dem der Satz vom Supremum gilt, das Archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsaxiom gelten. Ohne Beweis sei kurz erwähnt, daß auch die Umkehrung gilt: In einem geordneten Körper, in dem das Archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsaxiom gelten, gilt auch der Satz vom Supremum. Dieses wird z.B. in der Vorlesung *Algebra und Arithmetik* gezeigt.

2. Ist $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq (a_3, b_3) \ldots$ eine bezüglich der Inklusion absteigende Folge von offenen Intervallen, so gibt es im allgemeinen kein $x \in \mathbb{R}$, das in jedem Intervall $(a_i, b_i), i \in \mathbb{N}$ liegt. Dazu betrachten wir folgende streng absteigende Folge offener Intervalle $(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset (0, \frac{1}{3}) \supset (0, \frac{1}{4}) \ldots$. Gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in (0, \frac{1}{i})$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so wäre $0 < x < \frac{1}{i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu Folgerung 3 nach Satz 5.1.

Der nächste Satz sagt aus, daß die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ eine für die Analysis sehr wichtige Eigenschaft haben, die man als Kompaktheit bezeichnet. Diese Eigenschaft ist sehr abstrakt, und es ist zunächst nicht ersichtlich, wie sie sinnvoll eingesetzt werden kann. In den folgenden Paragraphen wird sie jedoch wesentlich benutzt. Bevor nun Satz 5.3 formuliert werden kann, führen wir noch einige Begriffe ein.

Ist I eine Indexmenge und M_i für jedes $i \in I$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, so heißt $\{M_i \mid i \in I\}$ Überdeckung von $[a, b]$, wenn $[a, b]$ in der Vereinigung aller $M_i, i \in I$ liegt, also $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$. Gibt es bereits endlich viele der M_i, die $[a, b]$ überdecken, z.B. $[a, b] \subseteq M_1 \cup \ldots \cup M_m$, so sagt man, daß es ein endliches Teilsystem von $\{M_i \mid i \in I\}$ gibt, das $[a, b]$ überdeckt. Zum Beispiel ist $\{(i-1, i+1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ wegen Folgerung 1 nach Satz 5.1 eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ durch offene Intervalle. Offenbar wird $\mathbb{R}$ aber nicht durch endlich viele dieser Intervalle überdeckt.

Satz 5.3 *Sei* I *eine Indexmenge und* M_i *für jedes* $i \in I$ *ein offenes Intervall von* $\mathbb{R}$*. Ist* $\{M_i \mid i \in I\}$ *eine Überdeckung von* $[a, b]$*, so gibt es ein endliches Teilsystem von* $\{M_i \mid i \in I\}$*, das* $[a, b]$ *überdeckt.*

Beweis. Zunächst definieren wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ folgendermaßen: $x \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in A, wenn $x \in [a, b]$ und wenn es ein endliches Teilsystem von $\{M_i \mid i \in I\}$ gibt, das $[a, x]$ überdeckt. Da a in einem der M_i enthalten ist, wird $\{a\} = [a, a]$ von einem endlichen Teilsystem von $\{M_i \mid i \in I\}$ überdeckt, d.h. $a \in A$. Damit ist A nicht leer. Weiterhin ist b

eine obere Schranke von A, so daß das Supremum s von A existiert mit $s \in [a,b]$. Also liegt s in einem M_i, z.B. $s \in M_1$ mit $M_1 = (a_1, b_1)$, d.h. $a_1 < s < b_1$. Da aber s das Supremum von A ist, gibt es ein $x \in A$ mit $a_1 < x \leq s$, und somit ein endliches Teilsystem von $\{M_i \mid i \in I\}$, das $[a,x]$ überdeckt, z.B. $[a,x] \subseteq M_2 \cup \ldots \cup M_m$. Wir zeigen jetzt $b < b_1$. Dann folgt nämlich $a_1 < x \leq s \leq b < b_1$, also

$$[a,b] = [a,x] \cup [x,b] \subset M_2 \cup \ldots \cup M_m \cup M_1,$$

und wir sind fertig. Annahme: $b_1 \leq b$. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $s < y < b_1 \leq b$, also

$$[a,y] = [a,x] \cup [x,y] \subset M_2 \cup \ldots \cup M_m \cup M_1,$$

d.h. $y \in A$. Dieses ist aber ein Widerspruch dazu, daß s das Supremum von A ist.

$\square$

Bemerkung. Die in Satz 5.3 für abgeschlossene Intervalle formulierte Eigenschaft gilt für offene Intervalle nicht, wie folgendes Beispiel zeigt. Wegen Folgerung 3 nach Satz 5.1 gibt es zu jedem $x \in (0,1)$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{i} < x$, also $x \in (\frac{1}{i}, 1)$. Damit ist $\{(\frac{1}{i}, 1) \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von $(0,1)$ durch offene Intervalle, die kein endliches Teilsystem enthält, das $(0,1)$ überdeckt.

6. Aufgaben

A 6.1 Zeigen Sie, daß die Aussagen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$ bzw. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ äquivalent sind. Erläutern Sie dieses Ergebnis.

A 6.2 Formalisieren Sie die folgende Aussage: *Ist das Produkt zweier rationaler Zahlen negativ, so ist genau einer dieser Faktoren negativ.*

A 6.3 Formalisieren Sie folgende Aussage: *Zu beliebigen reellen Zahlen a und b existiert eine natürliche Zahl n, so daß b kleiner ist als na.* Begründen Sie, daß die Aussage falsch ist, und bilden Sie ihre Negation.

A 6.4 Beweisen Sie $\forall x, y \in \mathbb{Q} : (x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \; x < q < y)$ und zeigen Sie, daß die Aussage $\forall x, y \in \mathbb{N} : (x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : \; x < q < y)$ falsch ist.

A 6.5 Beweisen Sie für die Mengen A und B, die beide Teilmengen einer Menge M sind:

$$\complement A \subseteq B \Longleftrightarrow \complement B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cup B = M.$$

A 6.6 Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:
(a) Wenn g injektiv ist und $g \circ f : A \to C$ surjektiv, dann ist f surjektiv.
(b) Wenn f surjektiv ist und $g \circ f$ injektiv, dann ist g injektiv.

A 6.7 Gegeben sind die Mengen N und M sowie die Abbildung $f : N \longrightarrow M$. Zeigen Sie, daß für beliebige Mengen $A, B \subseteq N$ gilt:
(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
(c) Ist f injektiv, so gilt in (b) das Gleichheitszeichen.

A 6.8 (a) Zeigen Sie $2n + 1 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
(b) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $n^2 < 2^n$? Benutzen Sie vollständige Induktion.

A 6.9 Beweisen oder widerlegen Sie (benutzen Sie gegebenenfalls vollständige Induktion):
(a) Für alle natürlichen Zahlen $n, n \geq 3$ gilt $(n+1)! < n^n$.
(b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} = \frac{5n^2 - 9n + 5}{n(n+1)}.$$

(c) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

A 6.10 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $n!$ rekursiv durch $0! := 1$ und $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$. Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k},$$

wobei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für alle $n, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$.

A 6.11 (a) Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gilt: $\mid a + \frac{1}{a} \mid \geq 2$.
(b) Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\mid a + b \mid + \mid a - b \mid \geq \mid a \mid + \mid b \mid$.

A 6.12 Zeigen Sie, daß eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ genau dann ein Intervall ist, wenn für alle $a, b \in I$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $a < x < b \Longrightarrow x \in I$.

A 6.13 Zeigen Sie:
(a) Sind a und b reelle Zahlen mit $a < b$, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen q mit $a < q < b$.
(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ und $M = \{q \in \mathbb{Q} \mid a < q\}$, so ist a das Infimum von M.

A 6.14 Gegeben ist die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, d.h. $f(a) = 0$, so gilt $a \in (-M, M)$ mit $M = \mid a_0 \mid + \mid a_1 \mid + \ldots + \mid a_{n-1} \mid +1$. Geben Sie ein Beispiel an.

A 6.15 Zeigen Sie:
(a) Sind n, m natürliche Zahlen und ist $\sqrt{n} \in \mathbb{R}$ irrational, so ist auch $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ irrational.
(b) Sind a, b, c und d ganze Zahlen und ist $x \in \mathbb{R}$ irrational, so ist auch

$$\frac{ax + b}{cx + d}$$

irrational, falls $ad - bc \neq 0$.

KAPITEL 2

Folgen und Reihen

1. Folgen

Definition 1.1 *Eine Funktion* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto a_n$ *heißt Folge (reeller Zahlen).*

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto a_n$ eine Folge, so schreibt man auch abkürzend (a_n) oder $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Beispiel.

1. Die konstante Folge mit $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (a, a, a, \ldots)$.
2. $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.
   $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots)$.
3. Rekursiv definierte Folgen: $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n)$, also $(a_n) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots)$.

Definition 1.2 a *heißt Grenzwert oder Limes der Folge* (a_n)*, wenn es zu jeder reellen Zahl* $\epsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß für alle* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *gilt:* $\mid a - a_n \mid < \epsilon$*. Eine Folge* (a_n) *heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat, anderenfalls divergent.*

Bemerkung.

1. Die Formalisierung von Definition 1.2 lautet:
   $$a \text{ ist Grenzwert der Folge } (a_n) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \mid a - a_n \mid < \epsilon.$$
2. Ist a Grenzwert der Folge (a_n), so schreibt man $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder kurz $a = \lim a_n$. Konvergiert (a_n) gegen Null, so heißt (a_n) Nullfolge.
3. Stimmen die beiden Folgen (a_n) und (b_n) bis auf die ersten k Folgeglieder überein und konvergiert (a_n) mit $\lim a_n = a$, so konvergiert auch (b_n) mit $\lim b_n = a$, denn zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mid a - a_n \mid < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, also $\mid a - b_n \mid < \epsilon$ für alle $n > \max\{n_0, k\}$.

Beispiel.

1. Die konstante Folge (a_n) mit $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.

2. 0 ist Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$.
   Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen Folgerung 3 nach Satz 5.1 aus Kapitel 1 eine natürliche Zahl n_0 mit $0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann $\mid a_n - 0 \mid = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.

3. Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n+1}(-1)^n$ divergiert.
   Beweis. Wir nehmen an, daß (a_n) konvergiert mit $a = \lim a_n$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $\mid a - a_n \mid < \frac{1}{2}$. Für alle $n \geq n_0$ folgt hieraus $\mid a - a_{n+1} \mid < \frac{1}{2}$, also $\mid a_{n+1} - a_n \mid \leq \mid a_{n+1} - a \mid + \mid a - a_n \mid < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, im Widerspruch zu $\mid a_{n+1} - a_n \mid = \frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{n+1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Satz 1.3 *Eine Folge reeller Zahlen (a_n) hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Wir nehmen an, daß (a_n) zwei verschiedene Grenzwerte a und b hat. Definieren wir $\epsilon := \frac{1}{2} \mid a - b \mid$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mid a_n - a \mid < \epsilon$ und $\mid a_n - b \mid < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt, also $\mid a - b \mid \leq \mid a - a_n \mid + \mid a_n - b \mid < \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2} \mid a - b \mid + \frac{1}{2} \mid a - b \mid = \mid a - b \mid$ - Widerspruch.

□

Eine Folge heißt beschränkt, nach oben beschränkt oder nach unten beschränkt, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Folgeglieder die entsprechende Eigenschaft hat.

Satz 1.4 *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Ist (a_n) konvergent mit $a = \lim a_n$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mid a_n - a \mid < 1$ für alle $n \geq n_0$, also $\mid a_n \mid \leq \mid a_n - a \mid + \mid a \mid < 1 + \mid a \mid$. Für $s := \max\{\mid a_1 \mid, \mid a_2 \mid, \ldots, \mid a_{n_0} \mid, 1 + \mid a \mid\}$ folgt dann $\mid a_n \mid \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

Satz 1.5 *Sind (a_n) und (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen, dann konvergieren auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und $(\mid a_n \mid)$, und es gilt*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n,\ \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n,$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n,\ \lim(\mid a_n \mid) = \mid \lim(a_n) \mid .$$

Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim b_n \neq 0$, so konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})$ mit $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Beweis. Sei $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ sowie $\epsilon > 0$.
1. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mid a_n - a \mid < \frac{\epsilon}{2}$ und $\mid b_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt $\mid a_n + b_n - (a + b) \mid \leq \mid a_n - a \mid + \mid b_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ und entsprechend $\mid a_n - b_n - (a - b) \mid < \epsilon$.
2. Wegen Satz 1.4 ist (b_n) beschränkt, d.h., es gibt ein $s \in \mathbb{R}, s > 0$ mit $\mid b_n \mid \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiert nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mid a_n - a \mid \cdot s < \frac{\epsilon}{2}$ und $\mid b_n - b \mid \cdot \mid a \mid < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ergibt sich $\mid a_n b_n - ab \mid = \mid a_n b_n - a b_n + a b_n - ab \mid \leq \mid a_n b_n - a b_n \mid + \mid a b_n - ab \mid = \mid a_n - a \mid\mid b_n \mid + \mid a \mid\mid b_n - b \mid \leq \mid a_n - a \mid s + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

3. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $| a_n - a | < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt, also wegen Satz 4.2 aus Kapitel 1 auch $|| a_n | - | a || \leq | a_n - a | < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.
4. Wegen $b \neq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $| b_n - b | < \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Hieraus folgt $| b | = | b_n + (b - b_n) | \leq | b_n | + | b - b_n | \leq | b_n | + \frac{|b|}{2}$, also $\frac{|b|}{2} \leq | b_n |$, d.h. $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$. Schließlich ergibt sich für genügend großes n

$$| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} | = | \frac{a_n - a}{b_n} + \frac{a}{b} \cdot \frac{b - b_n}{b_n} | \leq \frac{2}{| b |} \cdot | a_n - a | + \frac{2 | a |}{b^2} \cdot | b_n - b | < \epsilon.$$

5. Sei $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b < a$. Für genügend großes n gilt dann $| a - a_n | < \frac{a-b}{2}$ und $| b - b_n | < \frac{a-b}{2}$. Für diese n folgt dann der Widerspruch $a - b \leq a - b + b_n - a_n = | a - b + b_n - a_n | \leq | a - a_n | + | b_n - b | < \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a - b$.

□

Beispiel. Wir betrachten zunächst die spezielle Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $\lim \frac{1}{n} = 0$ folgt $\lim a_n = 1 + 0 = 1$. Dieses Beispiel kann nun leicht folgendermaßen verallgemeinert werden. Sei

$$a_n = \frac{c_i \cdot n^i + \ldots + c_1 \cdot n + c_0}{d_j \cdot n^j + \ldots + d_1 \cdot n + d_0}, \text{ mit } c_k, d_k \in \mathbb{R} \text{ und } c_i, d_j \neq 0.$$

Dann folgt

$$a_n = \frac{n^i}{n^j} \cdot \frac{c_i + c_{i-1}\frac{1}{n} + \ldots + c_1 \cdot (\frac{1}{n})^{i-1} + c_0 \cdot (\frac{1}{n})^i}{d_j + d_{j-1}\frac{1}{n} + \ldots + d_1 \cdot (\frac{1}{n})^{j-1} + d_0 \cdot (\frac{1}{n})^j}.$$

Der Grenzwert des zweiten Faktors ist wegen Satz 1.5 offenbar $\frac{c_i}{d_j}$. Gilt $i = j$, so ist $\lim a_n = \frac{c_i}{d_j}$ gezeigt. Gilt $i < j$, so folgt $\lim a_n = (\lim \frac{1}{n})^{j-i} \cdot \frac{c_i}{d_j} = 0$. Ist aber $i > j$, so divergiert (a_n). Um das einzusehen, nehmen wir $a = \lim a_n$ an. Wegen $\lim n^{j-i} = 0$ wäre dann $0 = 0 \cdot a = \lim n^{j-i} \cdot \lim a_n = \frac{c_i}{d_j}$ ein Widerspruch.

Möchte man die Konvergenz einer Folge (a_n) mit Hilfe von Definition 1.2 zeigen, so muß zuvor der Grenzwert $a = \lim a_n$ bekannt sein. Oft ist es aber möglich, die Konvergenz von (a_n) auf andere Art nachzuweisen, während die Berechnung des Grenzwertes durchaus sehr schwierig sein kann.

Definition 1.6 *Die reelle Zahlenfolge (a_n) heißt (streng) monoton steigend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Bemerkung.

1. Entsprechend definiert man *(streng) monoton fallende Folgen.*

2. Durch vollständige Induktion läßt sich leicht zeigen, daß (a_n) genau dann (streng) monoton steigend bzw. (streng) monoton fallend ist, wenn $a_n \leq a_m$ $(a_n < a_m)$ bzw. $a_n \geq a_m$ $(a_n > a_m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ gilt.

Satz 1.7 *Ist (a_n) monoton steigend und nach oben beschränkt oder monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n).*

Beweis. Sei (a_n) monoton steigend und nach oben beschränkt. Dann existiert das Supremum a von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, und wir zeigen $\lim a_n = a$. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Weil $a - \epsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$, also $a_{n_0} \leq a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, da (a_n) monoton steigend ist. Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt somit

$$| a - a_n | = a - a_n = a - a_{n_0} + a_{n_0} - a_n \leq a - a_{n_0} < \epsilon.$$

Ist (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist $(-a_n)$ monoton steigend und nach oben beschränkt. Es folgt $-\lim(-a_n) = \lim a_n$.

□

Bemerkung. Die Voraussetzung von Satz 1.7 kann dahingehend abgeschwächt werden, daß (a_n) ab dem k-ten Folgeglied monoton steigend (fallend) ist, denn wegen Bemerkung 3 nach Definition 1.2 beeinflussen die ersten k Folgeglieder das Konvergenzverhalten einer Folge nicht.

Beispiel. Sei $c \in \mathbb{R}, c > 0$ und (a_n) rekursiv definiert mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeigt leicht durch vollständige Induktion, daß $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir beweisen nun, daß (a_n) ab dem 2. Folgeglied monoton fallend ist. Sei also $n > 1$.

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{c}{2a_n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{c}{2a_n} = \frac{a_n^2 - c}{2a_n} \\ &= \frac{1}{2a_n}(\frac{1}{4}(a_{n-1} + \frac{c}{a_{n-1}})^2 - c) \\ &= \frac{1}{2a_n}(\frac{1}{4}(a_{n-1} - \frac{c}{a_{n-1}}))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen Satz 1.7 konvergiert (a_n) und folglich auch (a_{n+1}) mit $\lim a_n = \lim a_{n+1} =: a$. Um a zu berechnen, wenden wir Satz 1.5 auf die Gleichung

$$a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + c)$$

an und erhalten $a \cdot a = \frac{1}{2}(a^2 + c)$, also $a^2 = c$.

Für die praktische Anwendung ist die Folge (a_n) gut geeignet, um $\sqrt{c}$ zu approximieren. Diese Methode ist bereits seit dem Altertum bekannt und wird häufig dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandrien zugeschrieben. In modernerer Sprechweise ist es ein Spezialfall des Newton-Verfahrens zur Berechnung der positiven Nullstelle von $x^2 - c$.

Ist die Folge (a_n) beschränkt, aber weder monoton steigend noch monoton fallend, so ist (a_n) im allgemeinen nicht konvergent. Anschaulich ist aber klar, daß sich die Folgeglieder an mindestens einer Stelle häufen müssen.

Definition 1.8 *Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so heißt a Häufungspunkt von (a_n), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m$ gibt, so daß $| a - a_n | < \epsilon$ gilt.*

Bemerkung. Die Formalisierung von Definition 1.8 lautet:

$$a \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \forall m \in \mathbb{N} \; \exists \; n \geq m : |\, a - a_n \,| < \epsilon.$$

Beispiel. Wir betrachten die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}(-1)^n, \; n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: 1 und -1 sind Häufungspunkte von (a_n). Dazu sei $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$.
Zunächst gibt es ein gerades $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und $\frac{1}{n} < \epsilon$, also

$$|\, 1 - a_n \,| = |\, 1 - \frac{n+1}{n} \,| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Damit ist 1 Häufungspunkt von (a_n). Es gibt aber auch ein ungerades $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und $\frac{1}{n} < \epsilon$, also

$$|\, -1 - a_n \,| = |\, -1 + \frac{n+1}{n} \,| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Damit ist auch -1 Häufungspunkt von (a_n).

Offenbar gilt in diesem Beispiel, daß $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ gegen 1 und $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ gegen -1 konvergiert.

Definition 1.9 *Ist (a_n) eine Folge und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng monoton steigend, so heißt (b_n) mit $b_n = a_{f(n)}$ Teilfolge von (a_n).*

Beispiel.

1. $(b_n) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n), denn $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; n \longmapsto n+1$ ist streng monoton steigend und $b_n = a_{f(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $(b_n) = (a_1, a_4, a_9, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n), denn $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; n \longmapsto n^2$ ist streng monoton steigend und $b_n = a_{f(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung.

1. Ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng monoton steigend, dann gilt $f(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie man leicht durch vollständige Induktion zeigen kann.

2. Ist (a_n) konvergent mit $\lim a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge (b_n) von (a_n) gegen a, denn ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\, a - a_n \,| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, und für alle $n \geq n_0$ gilt $f(n) \geq f(n_0) \geq n_0$, also $|\, a - b_n \,| = |\, a - a_{f(n)} \,| < \epsilon$.

Satz 1.10 *Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so ist $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge (b_n) von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.*

Beweis. 1. Sei $\lim b_n = a$ mit $b_n = a_{f(n)}$ und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng monoton steigend. Zu zeigen ist, daß a ein Häufungspunkt von (a_n) ist. Sei also $\epsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|\, a - b_n \,| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Setzen wir $n = \max\{m, n_0\}$, so folgt $n \geq n_0$, also $|\, a - a_{f(n)} \,| < \epsilon$. Wegen $n \geq m$ gilt aber auch $f(n) \geq f(m) \geq m$, d.h. a ist ein Häufungspunkt von (a_n).
2. Sei nun andererseits a ein Häufungspunkt von (a_n). Zu zeigen ist, daß es eine Teilfolge (b_n) von (a_n) mit $\lim b_n = a$ gibt. Dazu definieren wir rekursiv eine geeignete streng monoton steigende Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $|\, a - a_{f(n)} \,| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zunächst gibt es ein

$k \in \mathbb{N}$ mit $\mid a - a_k \mid < 1$, und wir setzen $f(1) = k$. Sind $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$ bereits mit den Eigenschaften $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(n)$ und $\mid a - a_{f(i)} \mid < \frac{1}{i}$ für $i = 1, \ldots, n$ definiert, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > f(n)$ und $\mid a - a_k \mid < \frac{1}{n+1}$, da a ein Häufungspunkt von (a_n) ist. Wir setzen nun $f(n+1) = k$.
Behauptung: $\lim b_n = a$ mit $b_n = a_{f(n)}, n \in \mathbb{N}$. Um das zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zunächst existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Für alle $n \geq n_0$ folgt dann auf Grund der obigen Eigenschaften von f

$$\mid a - b_n \mid = \mid a - a_{f(n)} \mid < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Dieses zeigt gerade, daß die Teilfolge (b_n) gegen a konvergiert.

□

Bemerkung.

1. Ist a Grenzwert der Folge (a_n), so ist a einziger Häufungspunkt von (a_n). Dieses folgt direkt aus Satz 1.10 wegen Bemerkung 2 nach Definition 1.9.

2. Kommt $a \in \mathbb{R}$ in der Folge (a_n) unendlich oft vor, d.h. ist $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\}$ unendlich, so ist a Häufungspunkt von (a_n).

Beispiel. Wir betrachten die Folge $(a_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ und wollen alle Häufungspunkte von (a_n) ermitteln. Zum Beispiel sind 0 und 1 Häufungspunkte, denn $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n), die gegen 0 konvergiert, und $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$ eine Teilfolge, die gegen 1 konvergiert. Wegen $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ liegen alle weiteren Häufungspunkte in $(0, 1)$.
Behauptung: Jedes $a \in [0, 1]$ ist Häufungspunkt von (a_n). Um das zu beweisen, betrachten wir ein beliebiges $a \in [0, 1]$, wobei die Fälle $a = 0$ und $a = 1$ schon oben behandelt wurden. Sei also $0 < a < 1$. Zu zeigen ist, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m$ mit $\mid a - a_n \mid < \epsilon$ gibt. Wegen $0 < a < 1$ und Folgerung 4 nach Satz 5.1 aus Kapitel 1 gibt es z.B. ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < 1$. Wir können sogar $a < q < a + \epsilon$, also $\mid a - q \mid < \epsilon$ annehmen. Da in (a_n) jede rationale Zahl aus $(0, 1)$ auftritt, gilt $q = a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Man kann nun sogar $n \geq m$ annehmen, denn q tritt in (a_n) unendlich oft auf: $q = \frac{r}{s} = \frac{2r}{2s} = \frac{3r}{3s} = \frac{4r}{4s} = \ldots$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Der folgende Satz ist ein zentrales Ergebnis der reellen Analysis, das wir mit Satz 5.3 aus Kapitel 1 beweisen werden, d.h., wir nutzen aus, daß $[a, b]$ kompakt ist.

Satz 1.11 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte reelle Zahlenfolge (a_n) hat mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $a \leq a_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich, so folgt die Behauptung sofort aus Bemerkung 2 nach Satz 1.10. Sei also $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht endlich. Zu zeigen ist

$$\exists r \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m : \mid a_n - r \mid < \epsilon.$$

Wir beweisen die Behauptung mit einem Widerspruchsbeweis, d.h., wir nehmen an

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : \mid a_n - r \mid \geq \epsilon.$$

Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ gibt es somit (im allgemeinen von r abhängende) $\epsilon_r > 0$ und $m_r \in \mathbb{N}$ mit $| a_n - r | \geq \epsilon_r$ für alle $n \geq m_r$. Wegen

$$(r - \epsilon_r, r + \epsilon_r) \ = \ \{x \in \mathbb{R} \mid | x - r | < \epsilon_r\}$$

liegen in den offenen Intervallen $(r - \epsilon_r, r + \epsilon_r)$ nur endlich viele Folgeglieder. Nun ist aber $\{(r-\epsilon_r, r+\epsilon_r) \mid r \in [a, b]\}$ eine Überdeckung von $[a, b]$ durch offene Intervalle, die wegen Satz 5.3 aus Kapitel 1 ein endliches Teilsystem enthält, das $[a, b]$ überdeckt. Da, wie oben gezeigt, jedes dieser endlich vielen Intervalle nur endlich viele Folgeglieder enthält, liegen auch nur endlich viele Folgeglieder von (a_n) in $[a, b]$, d.h., $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist endlich - Widerspruch.

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch ein weiteres Konvergenzkriterium für Folgen angegeben werden, bei dem auf die Kenntnis des Grenzwertes verzichtet werden kann.

Definition 1.12 *Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt $| a_n - a_m | < \epsilon$.*

Bemerkung.

1. Die Formalisierung von Definition 1.12 lautet:

$$(a_n) \text{ ist Cauchy-Folge } \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : | a_n - a_m | < \epsilon.$$

2. Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge, denn gilt $\lim a_n = a$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $| a_n - a | < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$, d.h.

$$| a_n - a_m | = | a_n - a + a - a_m | \leq | a_n - a | + | a - a_m | < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$.

Wichtig ist nun, daß auch die Umkehrung von Bemerkung 2 gilt.

Satz 1.13 *Ist (a_n) eine Cauchy-Folge, so konvergiert (a_n) in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (a_n) beschränkt ist. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $| a_n - a_m | < 1$ für alle $n, m \geq n_0$. Für alle $n \geq n_0$ gilt also $| a_n | = | a_n - a_{n_0} + a_{n_0} | \leq | a_n - a_{n_0} | + | a_{n_0} | < 1 + | a_{n_0} |$. Somit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$| a_n | \leq \ \max\{| a_1 |, \ldots, | a_{n_0} |, 1 + | a_{n_0} |\}.$$

Wegen Satz 1.11 hat (a_n) einen Häufungspunkt a, und wir zeigen, daß (a_n) gegen a konvergiert. Sei also $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $| a_n - a_m | < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$. Da nun a ein Häufungspunkt von (a_n) ist, gibt es ein $m \geq n_0$ mit $| a_m - a | < \frac{\epsilon}{2}$. Zusammen folgt schließlich für alle $n \geq n_0$

$$| a_n - a | = | a_n - a_m + a_m - a | \leq | a_n - a_m | \ + \ | a_m - a | < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Bemerkung.

1. Satz 1.13 heißt auch Cauchysches Konvergenzkriterium.
2. Die Eigenschaft, daß in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergiert, bezeichnet man als Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Da es in $\mathbb{Q}$ Cauchy-Folgen gibt, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren, sagt man auch, daß $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.
3. Insgesamt wurde gezeigt, daß $\mathbb{R}$ ein vollständiger angeordneter Körper ist, in dem $\mathbb{Q}$ dicht liegt (vgl. Bemerkung 4 nach Satz 5.1 aus Kapitel 1). Durch diese Eigenschaften ist $\mathbb{R}$ im wesentlichen eindeutig bestimmt.

2. Reihen

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so sagt man, daß die formal geschriebene unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + \ldots \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergiert bzw. divergiert je nachdem, ob der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$ existiert oder nicht. Die endlichen Summen

$$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

heißen zugehörige Teilsummen. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge (s_k) der zugehörigen Teilsummen konvergiert. Gilt $\lim_{k\to\infty} s_k = a$, so schreibt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; a.$$

Werden nicht alle Folgeglieder summiert, sondern nur die ab dem n_0-ten Folgeglied, so schreibt man

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \;=\; a.$$

Bemerkung. Wendet man Satz 1.5 auf die Folge der Teilsummen an, so erhält man:

> Konvergieren $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, so auch $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n)$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} a \cdot a_n$ für alle $a \in \mathbb{R}$, und es gilt
>
> $$\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n) \;=\; \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \;+\; \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n,$$
>
> $$\sum_{n=n_0}^{\infty} a \cdot a_n \;=\; a \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Beispiel (Die geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

also
$$1 + q \cdot s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} = s_n + q^{n+1}$$
und somit
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Gilt $\mid q \mid < 1$, so folgt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (vgl. Aufgabe 3.5) und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \;=\; \frac{1}{1-q} \text{ für } \mid q \mid < 1.$$

Ist $\mid q \mid > 1$ oder $q = 1$, so ist die Folge (s_n) nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent. Ist schließlich $q = -1$, so folgt $s_n = 1$, falls n gerade ist, und $s_n = 0$, falls n ungerade ist. In diesem Falle hat (s_n) zwei Häufungspunkte und ist daher nicht konvergent.

Satz 2.1 *Die unendliche Reihe $\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt*

$$\mid \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mid < \; \epsilon.$$

Beweis. Ist $s_k = \sum_{i=i_0}^{k} a_i$, so konvergiert $\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i$ genau dann, wenn die Folge (s_k) der Teilsummen konvergiert. Wegen Satz 1.13 und Bemerkung 2 davor ist dieses aber genau dann der Fall, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt $\mid s_m - s_n \mid < \epsilon$ (man kann hier $m \geq n$ annehmen), also $\mid \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mid < \; \epsilon$.

□

Bemerkung. Satz 2.1 heißt auch Cauchysches Konvergenzkriterium. Es zeigt, daß Fortlassen oder Verändern von endlich vielen Summanden das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe nicht beeinflußt. Ist man nur daran interessiert, ob $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so schreibt man auch $\sum a_n$ statt $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Ist man aber am Grenzwert selbst interessiert, so ist die genaue Bezeichnung $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ wichtig, denn es gilt offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; a_1 + \ldots + a_{n_0-1} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

für alle $n_0 \in \mathbb{N}$.

Satz 2.2 *Konvergiert $\sum a_n$, so gilt* $\lim a_n = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wegen Satz 2.1 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mid \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mid < \epsilon$ für alle $m \geq n \geq n_0$, also insbesondere $\mid \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i \mid = \mid a_{n+1} \mid = \mid a_{n+1} - 0 \mid < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

□

Die Umkehrung von Satz 2.2 gilt nicht. Dazu folgendes

Beispiel (Die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$).
Es gilt zwar $\lim \frac{1}{n} = 0$, aber wir zeigen, daß die harmonische Reihe nicht konvergiert. Wegen Satz 2.1 reicht es aus, ein $\epsilon > 0$ so anzugeben, daß es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $m \geq n \geq n_0$ mit $\mid \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{n} \mid \geq \epsilon$ gibt. Wir wählen $\epsilon = \frac{1}{2}$. Ist nun n_0 eine beliebige natürliche Zahl, so definieren wir $n = n_0$ und $m = 2n$. Es folgt

$$\mid \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mid = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n-mal} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Satz 2.3 *Ist $\sum \mid a_n \mid$ konvergent, so auch $\sum a_n$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wegen Satz 2.1 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid = \mid \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid \mid < \epsilon$ für alle $m \geq n \geq n_0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt damit für alle $m \geq n \geq n_0$

$$\mid \sum_{i=n+1}^{m} a_i \mid \leq \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid < \epsilon,$$

also wegen Satz 2.1 die Behauptung.

$\square$

Definition 2.4 *Die Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum \mid a_n \mid$ konvergiert.*

Bemerkung. Satz 2.3 besagt also, daß jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert. Wegen $\mid \sum_{n=n_0}^{m} a_n \mid \leq \sum_{n=n_0}^{m} \mid a_n \mid$ gilt dann $\mid \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \mid \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \mid a_n \mid$. Daß nicht jede konvergente Reihe auch absolut konvergiert, zeigt folgendes

Beispiel (Die alternierende harmonische Reihe $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$).
Ist $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, also $\mid a_n \mid = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum \mid a_n \mid$ nicht (vgl. Beispiel nach Satz 2.2). Da aber $(\frac{1}{n})$ monoton fallend ist mit $\lim \frac{1}{n} = 0$, folgt die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe aus

Satz 2.5 *Ist die Folge (a_n) monoton fallend mit $\lim a_n = 0$, so konvergiert $\sum (-1)^n a_n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Annahme: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} < 0$. Dann folgt $a_n \leq a_{n_0} < 0$ für alle $n \geq n_0$, da (a_n) monoton fallend ist. Mit $\epsilon := \frac{1}{2} \mid a_{n_0} \mid > 0$ folgt für alle $n \geq n_0$

$$\mid a_n - 0 \mid = \mid a_n \mid \geq \mid a_{n_0} \mid > \epsilon.$$

Damit ist 0 kein Häufungspunkt von (a_n), im Widerspruch zu $\lim a_n = 0$.
Wir beweisen jetzt die Konvergenz von $\sum (-1)^n a_n$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\lim a_n = 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_{n_0} < \epsilon$, also $0 \leq a_n < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $m \geq n \geq n_0$ folgt nun, falls $m - n$ gerade ist,

$$\begin{aligned}
\mid \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^i a_i \mid &= \mid a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{m-1} - a_m \mid \\
&= (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{m-1} - a_m) \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \ldots - (a_{m-2} - a_{m-1}) - a_m \\
&\leq a_{n+1} < \epsilon,
\end{aligned}$$

und falls $m-n$ ungerade ist

$$\begin{aligned}
\mid \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^i a_i \mid &= \mid a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{m-2} - a_{m-1} + a_m \mid \\
&= (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{m-2} - a_{m-1}) + a_m \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \ldots - (a_{m-1} - a_m) \\
&\leq a_{n+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Satz 2.5 heißt Leibnizkriterium. Unendliche Reihen der Form $\sum (-1)^n a_n$, wobei alle a_n positiv oder alle negativ sind, heißen alternierend.

Die folgenden beiden Sätze sind nützliche Hilfsmittel für den Nachweis der absoluten Konvergenz einer Reihe.

Satz 2.6 *Gilt* $\mid a_n \mid \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$ *und konvergiert* $\sum b_n$*, so konvergiert* $\sum a_n$ *absolut. Gilt* $0 \leq b_n \leq a_n$ *für alle* $n \geq N$ *und divergiert* $\sum b_n$*, so divergiert* $\sum a_n$*.*

Beweis. Wegen Satz 2.1 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mid \sum_{i=n+1}^{m} b_i \mid = \sum_{i=n+1}^{m} b_i < \epsilon$ für alle $m \geq n \geq n_0$, also

$$\mid \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid\mid = \sum_{i=n+1}^{m} \mid a_i \mid \leq \sum_{i=n+1}^{m} b_i < \epsilon$$

für alle $m \geq n \geq \max\{n_0, N\}$. Mit Satz 2.1 folgt die Konvergenz von $\sum \mid a_n \mid$. Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der ersten durch Kontraposition.

□

Bemerkung. Konvergiert $\sum b_n$ und gilt $\mid a_n \mid \leq b_n$, so heißt $\sum b_n$ konvergente Majorante von $\sum a_n$. Gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ und divergiert $\sum b_n$, so heißt $\sum b_n$ divergente Minorante.

Beispiel. Wir wenden Satz 2.6 an, um die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu zeigen.
Zunächst hat die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{15^2} + \ldots$$

die Majorante

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^2}}_{4-mal} + \underbrace{\frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^2}}_{8-mal} + \ldots .$$

Ist s_n die n-te Teilsumme der Majorante, so ist (s_n) streng monoton steigend, und es gilt z.B. $s_1 = 1, s_3 = 1 + \frac{1}{2}, s_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ und allgemein

$$s_{2^n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Damit folgt $s_n \leq s_{2^n-1} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $n \leq 2^n - 1$ und der Monotonie von (s_n), d.h., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ haben eine konvergente Majorante. Sehr viel schwieriger dagegen ist der Nachweis von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Satz 2.7 *Gibt es ein $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$ mit*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \textit{ für alle } n \geq N$$

oder

$$\sqrt[n]{| a_n |} \leq q < 1 \textit{ für alle } n \geq N,$$

so konvergiert $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis. Im ersten Fall kann man zunächst leicht durch vollständige Induktion zeigen, daß $| a_n | \leq q^{n-N} | a_N |$ für alle $n \geq N$ gilt. Wegen $0 < q < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^n$, und somit ist

$$\frac{| a_N |}{q^N} \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$$

eine konvergente Majorante von $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.
Im zweiten Fall gilt $| a_n | \leq q^n$ für alle $n \geq N$, und deshalb ist $\sum q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum a_n$.

□

Bemerkung.

1. Der erste Teil von Satz 2.7 heißt Quotientenkriterium, der zweite Teil Wurzelkriterium.

2. Konvergiert die Folge $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|\right)$ mit $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, so gibt es ein $q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1$, und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ für alle $n \geq N$, d.h. $\sum a_n$ konvergiert absolut wegen Satz 2.7. Entsprechend folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_n$, wenn $\lim \sqrt[n]{| a_n |} < 1$.

Beispiel. Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut. Um dieses einzusehen, verwenden wir das Quotientenkriterium. Mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ gilt für $x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|.$$

Also folgt $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$, und wegen Bemerkung 2 nach Satz 2.7 (Quotientenkriterium) konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.
Entsprechend ergibt sich auch die absolute Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ denn}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)} \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (-1)^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 \text{ und}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}\cdot(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!\cdot(-1)^n x^{2n+1}} \mid = \lim_{n\to\infty} \mid \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \mid = 0.$$

Durch diese drei unendlichen Reihen werden also jeweils reelle Funktionen definiert, die in den folgenden Kapiteln noch näher untersucht werden:

$$\begin{aligned}
\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(Exponentialfunktion)},\\
\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{(Cosinusfunktion)},\\
\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{(Sinusfunktion)}.
\end{aligned}$$

Insbesondere wird gezeigt, daß die Sinus- und Cosinusfunktion mit den entsprechenden elementargeometrischen Funktionen übereinstimmen. Zunächst ist es aber das Ziel, die bekannten Additionstheoreme zu beweisen. Dabei wird die Methode der Multiplikation von unendlichen Reihen benutzt (Cauchy-Produkte), die sich aus dem folgenden Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen ergibt.

Satz 2.8 *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ und $\varphi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\mid a - \sum_{i=0}^{k} a_i \mid < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=k+1}^{\infty} \mid a_i \mid < \frac{\epsilon}{2}.$$

Weiterhin gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0, 1, \ldots, k \in \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(m)\}$. Für alle $n \geq m$ folgt

$$\begin{aligned}
\mid \sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)} - \sum_{i=0}^{k} a_i \mid &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \mid a_i \mid < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{also}\\
\mid a - \sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)} \mid &= \mid a - \sum_{i=0}^{k} a_i + \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)} \mid\\
&\leq \mid a - \sum_{i=0}^{k} a_i \mid + \mid \sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)} \mid\\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, also auch $\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_{\varphi(n)} \mid = \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid$.

□

Bemerkung. $\sum a_{\varphi(n)}$ heißt Umordnung von $\sum a_n$. Konvergiert $\sum a_n$, aber nicht absolut, so gibt es sogar zu jedem $a \in \mathbb{R}$ eine Umordnung von $\sum a_n$, die gegen a konvergiert.

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen, so heißt jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn in der Folge $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ genau die Produkte

$a_i \cdot b_j$ vorkommen, d.h., wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,\ k \longmapsto (i_k, j_k)$ mit $c_k = a_{i_k} \cdot b_{j_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt. Zum Beispiel ist

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

eine Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Sie heißt Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 2.9 *Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut, so konvergiert jede Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Beweis. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $c_0, c_1, \ldots, c_k$ unter den Produkten $a_i \cdot b_j,\ 0 \le i, j \le m$ vorkommen. Es folgt

$$\sum_{n=0}^{k} |\, c_n \,| \le \sum_{n=0}^{m} |\, a_n \,| \cdot \sum_{n=0}^{m} |\, b_n \,| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n \,| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\, b_n \,| \,.$$

Da die Folge der Teilsummen $(\sum_{n=0}^{k} |\, c_n \,|)$ monoton steigend ist, folgt die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |\, c_n \,|$ mit Satz 1.7. Man kann nun $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot \sum_{n=0}^{k} b_n$ als Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auffassen, so daß wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und des Umordnungssatzes gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot \sum_{n=0}^{k} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

□

Beispiel.

1. Als Anwendung von Satz 2.9 zeigen wir, daß $\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Dazu betrachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{(Cauchy-Produkt).}$$

   Mit Aufgabe 6.10 aus Kapitel 1 folgt nun

$$c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

   Damit ergibt sich insgesamt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

   d.h. $\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)$. Schreibt man e^x statt $\exp x$, so folgt $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Man nennt $e := e^1$ Eulersche Zahl, und es gilt

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2.71828182845904523\ldots.$$

Einfache Eigenschaften der Exponentialfunktion:

(a) $e^0 = 1$ und $e^n = (\exp 1)^n = e \cdot \ldots \cdot e = \exp n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $1 < e^x$ für $0 < x$.

(c) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, da $e^{-x}e^x = e^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $e^x = e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$ und $e^x \neq 0$.

(e) $0 < e^x < 1$ für alle $x < 0$, denn wegen $-x > 0$ folgt $1 < e^{-x}$, also $e^x < e^{-x+x} = 1$.

(f) Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend, denn aus $x < y$ folgt $0 < y - x$ und damit $1 < e^{y-x}$, d.h. $e^x < e^y$.

2. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes lassen sich auch die Additionstheoreme der Sinus- und Cosinusfunktion beweisen: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Wir beweisen nur die erste Gleichung, die zweite ergibt sich analog.

$$\sin x \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \quad \text{(Cauchy-Produkt)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \frac{y^{2n+1-(2k+1)}}{(2n+1-(2k+1))!}, \end{aligned}$$

$$\cos x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{y^{2n+1-2k}}{(2n+1-2k)!}. \end{aligned}$$

Es folgt $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + d_n$ mit

$$\begin{aligned} c_n + d_n &= (-1)^n \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^{2n+1-m}}{(2n+1-m)!} \\ &= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} x^m y^{2n+1-m} \\ &= (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Damit ist das Additionstheorem für die Sinusfunktion bewiesen.

3. Aufgaben

A 3.1 Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) gegen Null konvergiert, und geben Sie an, wie man zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ erhalten kann, so daß $\mid a_n \mid < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{n}{n^2+1}, \qquad \text{(b)}\quad a_n = \sqrt{n^2+1} - n, \qquad \text{(c)}\quad a_n = \frac{n}{2^n}.$$

A 3.2 Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\text{(a)}\quad a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3 - \frac{3}{1+a_n}, \qquad \text{(b)}\quad a_1 = 1,\ a_{n+1} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})a_n.$$

A 3.3 Zeigen Sie: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, die gegen Null konvergiert, und (b_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge, so konvergiert $(a_n \cdot b_n)$ auch gegen Null. Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an.

A 3.4 Zeigen Sie: Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a := \lim a_n = \lim b_n$ und ist (c_n) eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch (c_n) mit $\lim c_n = a$. (Vergleichskriterium)

A 3.5 Zeigen Sie, daß die Folgen $(\sqrt[n]{a})$ mit $a > 0$ und $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergieren und daß (a^n) mit $\mid a \mid < 1$ eine Nullfolge ist.

A 3.6 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge (a_n) mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

A 3.7 Berechnen Sie den Grenzwert $\lim a_n$ der Folge (a_n).

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{3n^3 - 4n^2 - 3}{-n^3 + 3n - 7}, \qquad \text{(b)}\quad a_n = (-1)^n \frac{-2n^5 + 3n^3 - 2n + 1}{(n^3+1)^2 + 3n^3}.$$

A 3.8 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 3n^2 - n + 1}}.$$

A 3.9 Berechnen Sie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n-3)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n-1)}.$$

A 3.10 Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

A 3.11 Gegeben ist die reelle Zahlenfolge (a_n). Zeigen Sie

$$\lim a_n = a \Longleftrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = a.$$

Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an.

A 3.12 Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{2^n}.$$

A 3.13 Berechnen Sie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{-1}{2})^n.$$

A 3.14 Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

A 3.15 Berechnen Sie für $q \in \mathbb{R}, \mid q \mid < 1$ das Cauchy-Produkt

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

und verwenden Sie dieses Ergebnis, um

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

zu ermitteln.

KAPITEL 3

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

1. Stetige Funktionen

In diesem Kapitel ist D stets eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, die i.a. Definitionsbereich einer reellen Funktion ist.

Definition 1.1 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$, so heißt f stetig in a, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in D$ gilt*

$$| x - a | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(a) | < \epsilon.$$

f heißt stetig, wenn f stetig in jedem $a \in D$ ist.

Bemerkung.

1. Die Formalisierung von Definition 1.1 lautet:

   f ist stetig in $a \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D : (| x - a | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(a) | < \epsilon)$.

   Damit ist f in a nicht stetig, also unstetig in a, wenn gilt

   $$\exists\, \epsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in D : \ (| x - a | < \delta \wedge | f(x) - f(a) | \geq \epsilon).$$

2. Die Stetigkeit bedeutet anschaulich, daß *benachbarte* Urbilder auch *benachbarte* Bilder haben.

Beispiel.

1. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto c$ ist stetig (in jedem $a \in \mathbb{R}$). Um das zu beweisen, sei $\epsilon > 0$. Dann gilt sogar für jedes $\delta > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}$

   $$| f(x) - f(a) | = | c - c | = 0 < \epsilon.$$

2. Die identische Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$ ist stetig (in jedem $a \in \mathbb{R}$). Dazu sei wieder $\epsilon > 0$. Setzen wir $\delta = \epsilon$, so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$
$$| x - a | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(a) | = | x - a | < \delta = \epsilon.$$
Im Gegensatz zum ersten Beispiel hängt hier δ tatsächlich von ϵ ab.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ ist stetig (in jedem $a \in \mathbb{R}$), denn wählen wir für jedes $\epsilon > 0$ zum Beispiel $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2|a|+1}\}$, so folgt $\delta > 0$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $| x - a | < \delta \leq 1$ gilt
$$\begin{aligned} | f(x) - f(a) | &= | x^2 - a^2 | = | x + a | \cdot | x - a | = | 2a + x - a | \cdot | x - a | \\ &\leq (2 | a | + | x - a |) \cdot | x - a | \\ &< (2 | a | + 1) \cdot \delta \leq \epsilon. \end{aligned}$$
Im Gegensatz zu den ersten beiden Beispielen, hängt hier δ nicht nur von ϵ, sondern auch von a ab.

4. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ falls $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ falls $x > 0$. Offenbar ist f in jedem $a \neq 0$ stetig. Wir zeigen nun, daß f in 0 unstetig ist. Dazu wählen wir zum Beispiel $\epsilon = \frac{1}{2}$. Ist nun $\delta > 0$ beliebig, so definieren wir $x = \frac{\delta}{2}$, und es folgt
$$| x - a | = | \frac{\delta}{2} - 0 | = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{und} \quad | f(x) - f(a) | = | f(\frac{\delta}{2}) - f(0) | = | 1 - 0 | = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Bemerkung. Die Unstetigkeitsstelle in Beispiel 4 ist eine *Sprungstelle* und damit ein *typisches* Beispiel. Es gibt allerdings auch Unstetigkeitsstellen, die keine Sprungstellen sind.

Satz 1.2 *Sind $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, $f(D_f) \subseteq D_g$ und ist f in $a \in D_f$ sowie g in $f(a) \in D_g$ stetig, so ist $g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ auch stetig in a.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Zunächst gibt es wegen der Stetigkeit von g in $f(a)$ ein $\delta > 0$ mit
$$| x - f(a) | < \delta \Longrightarrow | g(x) - gf(a) | < \epsilon$$
für alle $x \in D_g$. Wegen der Stetigkeit von f in a gibt es nun ein $\delta' > 0$ mit
$$| x - a | < \delta' \Longrightarrow | f(x) - f(a) | < \delta$$
für alle $x \in D_f$. Damit folgt für alle $x \in D_f$
$$| x - a | < \delta' \Longrightarrow | f(x) - f(a) | < \delta \Longrightarrow | gf(x) - gf(a) | < \epsilon.$$
□

Definition 1.3 *Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in D$ gilt*
$$| x - y | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \epsilon.$$

Bemerkung. Die Formalisierung von Definition 1.3 lautet:

f ist gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D : (\mid x - y \mid < \ \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon)$.

Ist f gleichmäßig stetig, so ist f offenbar stetig in jedem $y \in D$. Im Gegensatz zur gleichmäßigen Stetigkeit kann bei der Stetigkeit das jeweils zu ϵ und y gehörende δ auch tatsächlich von y selbst abhängen, wie das Beispiel 3 nach Definition 1.1 zeigt.

Beispiel. Die konstante Funktion und die identische Abbildung (Beispiele 1 und 2 nach Definition 1.1) sind gleichmäßig stetig. Wir zeigen nun, daß $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist. Dazu wählen wir $\epsilon = 1$. Für jedes $\delta > 0$ gibt es dann $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\mid x - y \mid < \ \delta$ und $\mid f(x) - f(y) \mid \geq \ 1 = \epsilon$. Zum Beispiel gilt für $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$

$$\mid x - y \mid = \mid \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{2} \mid = \frac{\delta}{2} < \delta \ \text{ und}$$

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} - 1 - \frac{\delta^2}{4} \mid = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Satz 1.4 *Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Zu zeigen ist, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in [a, b]$ gilt

$$\mid x - y \mid < \ \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \ \epsilon.$$

Da f stetig ist, gibt es zunächst für jedes $z \in [a, b]$ ein $\delta_z > 0$, so daß für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$\mid z - x \mid < \ \delta_z \Longrightarrow \mid f(x) - f(z) \mid < \ \frac{\epsilon}{2}.$$

Die offenen Intervalle

$$(z - \frac{1}{2}\delta_z, z + \frac{1}{2}\delta_z),\ \ z \in [a, b]$$

bilden nun eine Überdeckung von $[a, b]$. Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ (Satz 5.3 aus Kapitel 1) wird $[a, b]$ bereits durch endlich viele dieser Intervalle überdeckt, z.B.

$$[a, b] \ \subseteq \ (z_1 - \frac{1}{2}\delta_{z_1}, z_1 + \frac{1}{2}\delta_{z_1}) \cup \ldots \cup (z_n - \frac{1}{2}\delta_{z_n}, z_n + \frac{1}{2}\delta_{z_n}).$$

Wir definieren nun $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta_{z_1}, \ldots, \frac{1}{2}\delta_{z_n}\}$ und zeigen für alle $x, y \in [a, b]$

$$\mid x - y \mid < \ \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \ \epsilon.$$

Zunächst existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\mid x - z_i \mid < \ \frac{1}{2}\delta_{z_i} \ < \ \delta_{z_i}.$$

Für y folgt dann

$$\mid y - z_i \mid = \mid y - x + x - z_i \mid < \ \delta \ + \ \frac{1}{2}\delta_{z_i} \ \leq \ \frac{1}{2}\delta_{z_i} \ + \ \frac{1}{2}\delta_{z_i} \ = \ \delta_{z_i}.$$

Auf Grund der Definition von δ_{z_i} ergibt sich

$$\mid f(x) - f(z_i) \mid < \ \frac{\epsilon}{2} \ \text{ und } \ \mid f(y) - f(z_i) \mid < \ \frac{\epsilon}{2}, \ \text{ also}$$

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \mid f(x) - f(z_i) + f(z_i) - f(y) \mid \leq \mid f(x) - f(z_i) \mid + \mid f(z_i) - f(y) \mid < \epsilon.$$

$\square$

2. Grenzwerte von Funktionen

Definition 2.1 *Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, so heißt a Häufungspunkt von M, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele $x \in M$ mit $\mid x - a \mid < \epsilon$ gibt.*

Bemerkung. Ist a Häufungspunkt von M, so braucht a kein Element von M zu sein.

Beispiel.

1. Gilt $a < b$, so ist a Häufungspunkt von $(a, b]$ und $[a, b]$.

2. Die Menge $M = \mathbb{N}$ hat keine Häufungspunkte.

Satz 2.2 *Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

i) a ist Häufungspunkt von M.

ii) Es gibt eine Folge (a_n) mit $a_n \in M, a_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim a_n = a$.

iii) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in M, x \neq a$, mit $\mid x - a \mid < \epsilon$.

Beweis. i)⇒ii): Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es unendlich viele $x \in M$ mit $\mid a - x \mid < \frac{1}{n}$. Wähle ein $a_n \in M$ mit $a_n \neq a$ und $\mid a - a_n \mid < \frac{1}{n}$. Offenbar gilt $\lim a_n = a$.
ii)⇒iii): Dieses folgt direkt aus der Definition von $\lim a_n$.
iii)⇒i): Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren rekursiv paarweise verschiedene $a_n \in M, a_n \neq a$ mit $\mid a_n - a \mid < \epsilon$. Zunächst gibt es wegen iii) ein $a_1 \in M, a_1 \neq a$, mit $\mid a_1 - a \mid < \epsilon$. Sind nun $a_1, \ldots, a_n \in M$ paarweise verschieden mit $a_i \neq a$ und $\mid a_i - a \mid < \epsilon$, so gelte o.B.d.A. $\mid a_n - a \mid \leq \mid a_i - a \mid, i = 1, \ldots, n$. Wegen iii) existiert $a_{n+1} \in M, a_{n+1} \neq a$, mit

$$\mid a_{n+1} - a \mid < \mid a_n - a \mid \leq \mid a_i - a \mid < \epsilon, \ i = 1, \ldots, n.$$

□

Bemerkung. Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und M' die Menge aller Häufungspunkte von M, so heißt $\overline{M} = M \cup M'$ Abschluß von M, und M heißt abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$. Zum Beispiel ist für $a < b$ das Intervall $[a, b]$ der Abschluß von $(a, b), (a, b], [a, b)$ und $[a, b]$. Im oben definierten Sinne ist damit $\underline{[a, b]}$ abgeschlossen. Gilt $a < c < b$, so ist z.B. c ein Häufungspunkt von $[a, c) \cup (c, b]$ und $\overline{[a, c) \cup (c, b]} = [a, b]$.

Definition 2.3 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, so heißt $b \in \mathbb{R}$ Grenzwert von f für $x \to a$, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \neq a$ und $a_n \in D$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = b.$$

Bemerkung.

1. Ist b Grenzwert von f für $x \to a$, so schreibt man $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

2. Der Häufungspunkt a muß kein Element von D sein, d.h., $f(a)$ ist nicht notwendig definiert.

3. Da a ein Häufungspunkt von D ist, existiert eine Folge (a_n) mit $a_n \neq a, a_n \in D$ und $\lim a_n = a$. Damit können die Grenzwertsätze für Folgen direkt auf Grenzwerte von Funktionen übertragen werden. So gilt z.B.

   (a) Existiert der Grenzwert von f für $x \to a$, so ist er eindeutig bestimmt.

   (b) Existieren die Grenzwerte der Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ für $x \to a$, so auch für die Funktionen

   $$\begin{aligned} f \pm g &: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) \pm g(x), \\ f \cdot g &: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x), \\ \mid f \mid &: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mid f(x) \mid, \end{aligned}$$

   und es gilt

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f \pm g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \\ \lim_{x\to a} f \cdot g(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x), \\ \lim_{x\to a} \mid f \mid (x) &= \mid \lim_{x\to a} f(x) \mid . \end{aligned}$$

   Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, so gilt

   $$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ wobei } \frac{f}{g} : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

4. Gilt für jede Folge (a_n) mit $a_n \in D$ und $a_n < a$

   $$\lim a_n = a \Longrightarrow \lim f(a_n) = b,$$

   so nennt man b auch linksseitigen Grenzwert von f für $x \to a$, und man schreibt $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$. Rechtsseitige Grenzwerte $\lim_{x\to a^+} f(x)$ definiert man entsprechend. Obwohl a Häufungspunkt von D ist, kann es sein, daß es keine Folge (a_n) mit $a_n \in D$ und $a_n < a$ gibt (z.B. im Falle $D = [a, b]$). In jedem Falle existiert aber eine Folge (a_n) mit $a_n \in D$ und $\lim a_n = a$, wobei $a_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $a_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.4 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, so gilt für alle $b \in \mathbb{R}$*

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = b = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Beweis. $'' \Rightarrow''$: Diese Richtung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen von $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ und $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
$'' \Leftarrow''$: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in D, a_n \neq a$ und $\lim a_n = a$.
1. Fall: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n < a$ für alle $n \geq m$. Dann konvergiert die Folge $(f(a_m), f(a_{m+1}), \ldots)$ gegen b wegen $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$. Also konvergiert auch $(f(a_n))$ gegen b.
2. Fall: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a$ für alle $n \geq m$. Dann konvergiert die Folge $(f(a_m), f(a_{m+1}), \ldots)$ gegen b wegen $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, also $\lim_{x\to a} f(a) = b$.
3. Fall: (a_n^-) sei die Teilfolge von (a_n), die aus allen Folgegliedern kleiner als a besteht, und (a_n^+) die Teilfolge aller Folgeglieder, die größer als a sind. Wir zeigen nun $\lim f(a_n) = b$. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es wegen $\lim f(a_n^-) = b = \lim f(a_n^+)$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mid f(a_n^-) - b \mid < \epsilon$ und $\mid f(a_n^+) - b \mid < \epsilon$ für alle $n \geq m$. Es existiert weiterhin ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \geq n_0$ gibt es ein $k \geq m$ mit $a_n = a_k^-$ oder $a_n = a_k^+$, also

$$\mid f(a_n) - b \mid = \mid f(a_k^-) - b \mid < \epsilon \quad \text{oder} \quad \mid f(a_n) - b \mid = \mid f(a_k^+) - b \mid < \epsilon.$$

□

Satz 2.4 besagt also, daß der Grenzwert von f für $x \to a$ genau dann existiert, wenn die entsprechenden links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren und übereinstimmen. Grenzwerte von Funktionen sind z.B. im Zusammenhang mit Stetigkeitsuntersuchungen wichtig, wie folgender Satz zeigt.

Satz 2.5 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, so gilt*

$$f \textit{ ist stetig in } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Beweis. $'' \Rightarrow''$: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in D, a_n \neq a$ und $\lim a_n = a$. Zu zeigen ist $\lim f(a_n) = f(a)$. Sei $\epsilon > 0$. Da f stetig in a ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D$ gilt

$$\mid x - a \mid < \delta \implies \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon.$$

Wegen $\lim a_n = a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $\mid a_n - a \mid < \delta$, also $\mid f(a_n) - f(a) \mid < \epsilon$.
$'' \Leftarrow''$: Wir beweisen die Behauptung durch Kontraposition. Ist f in a nicht stetig, so gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß es für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D$ gibt mit $\mid x - a \mid < \delta$ und $\mid f(x) - f(a) \mid \geq \epsilon$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es also ein $a_n \in D$ mit $\mid a_n - a \mid < \frac{1}{n}$ und $\mid f(a_n) - f(a) \mid \geq \epsilon$. Es folgt $a_n \neq a, \lim a_n = a$, und $(f(a_n))$ konvergiert nicht gegen $f(a)$.

□

Bemerkung.

1. Wegen Satz 2.4 und Satz 2.5 ist f also genau dann stetig im Häufungspunkt a, wenn der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to a^-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existieren und jeweils mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmen. Ist z.B. konkret $D = [a, b]$ mit $a < c < b$ sowie f stetig in $[a, c]$ und $(c, b]$, so ist f genau dann stetig an der Stelle c, wenn $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ gilt, denn $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ folgt wegen der Stetigkeit von f in $[a, c]$. So ist in Beispiel 4 nach Definition 1.1 die Funktion f

stetig in $(-\infty, 0]$ und $(0, \infty)$, es gilt aber offenbar $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$, und damit ist f unstetig in 0. Auf diese Weise lassen sich ganz allgemein Funktionen gut auf Stetigkeit untersuchen, die stückweise aus stetigen Funktionen zusammengesetzt sind (vgl. Aufgabe 3.4). Eine weitere Anwendung ergibt sich im Zusammenhang mit der stetigen Fortsetzbarkeit von Funktionen wie z. B. bei stetig hebbaren Definitionslücken (vgl. Aufgabe 3.5).

2. Ist $a \in D$ kein Häufungspunkt von D, so gibt es wegen Satz 2.2 ein $\delta > 0$, so daß $| x - a | < \delta$, $x \in D$ nur für $x = a$ erfüllt ist. Punkte, die keine Häufungspunkte von D sind, nennt man deshalb auch isoliert. In einem isolierten Punkt $a \in D$ ist f immer stetig, unabhängig davon wie $f(a)$ definiert ist. Um dieses einzusehen, betrachten wir ein beliebiges $\epsilon > 0$. Dann gilt für $\delta > 0$ wie oben

$$| x - a | < \delta \implies x = a \implies | f(x) - f(a) | = 0 < \epsilon.$$

Beispiel. Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ absolut (Quotientenkriterium). Wir zeigen nun, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

in 0 stetig ist. Dazu sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ und $\lim a_n = 0$. Es gibt nun ein $a > 0$ mit $| a_n | < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_n^{k-2}}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{| a_n |^{k-2}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{k!} \leq \frac{1}{a^2}(e^a - 1 - a).$$

Damit ist die Folge $(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_n^{k-2}}{k!})$ beschränkt und $(a_n \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_n^{k-2}}{k!})$ eine Nullfolge (vergleiche Aufgabe 3.3 aus Kapitel 2). Also ergibt sich

$$\lim f(a_n) = \lim(1 + a_n \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_n^{k-2}}{k!}) = 1 + 0 = 1 = f(0).$$

Wegen $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = 1 + xf(x)$ ist auch die Exponentialfunktion stetig in 0. Wir zeigen, daß exp sogar stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$ ist. Dazu sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq a$ und $\lim a_n = a$. Dann ist $(a_n - a)$ eine Nullfolge, also

$$\lim e^{a_n} = \lim e^{a_n - a + a} = \lim e^{a_n - a} \cdot \lim e^a = e^0 \cdot e^a = e^a.$$

Satz 2.6 *Ist $a \in D$ und sind $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die in a stetig sind, so sind auch die Funktionen $f \pm g, f \cdot g, | f |$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$) stetig in a.*

Beweis. Ist a isoliert, so folgt die Behauptung aus Bemerkung 2 nach Satz 2.5. Ist a aber ein Häufungspunkt, so übertragen sich die entsprechenden Aussagen für die Grenzwerte von Funktionen (Bemerkung 3 nach Definition 2.3) mit Satz 2.5 auf stetige Funktionen.

$\square$

Beispiel. Da die konstante Funktion und die identische Abbildung stetig sind (vgl. Beispiele 1 und 2 nach Definition 1.1), folgt wegen Satz 2.6 die Stetigkeit der Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ebenso sind die gebrochen rationalen Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

in allen Punkten ihres Definitionsbereiches stetig. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind keine Unstetigkeitsstellen, denn sie gehören nicht zum Definitionsbereich. Manchmal ist es aber möglich, die Funktion f in die Nullstellen des Nennerpolynoms stetig fortzusetzen (stetig hebbare Definitionslücken). Ob dieses im konkreten Falle möglich ist, muß aber im einzelnen nachgeprüft werden. So stimmt z.B. die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

in ihrem Definitionsbereich mit

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

überein. Da g stetig in 1 ist gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \frac{1}{2},$$

und somit läßt sich f durch $f(1) := \frac{1}{2}$ stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Die nächsten beiden Sätze geben wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen an, die wir in den folgenden Abschnitten häufig benutzen werden.

Satz 2.7 *Ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, dann nimmt* f *auf* $[a, b]$ *Maximum und Minimum an, d.h., es gibt* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *mit*

$$f(x_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(x_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß f nach oben beschränkt ist. Ist dieses nicht der Fall, dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in [a, b]$ mit $f(a_n) \geq n$. Die Folge (a_n) hat wegen Satz 1.11 aus Kapitel 2 einen Häufungspunkt $c \in [a, b]$, und wegen Satz 1.10 aus Kapitel 2 gibt es eine Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ von (a_n) mit $\lim a_{\varphi(n)} = c$. Mit Satz 2.5 folgt aus der Stetigkeit von f in c die Konvergenz von $(f(a_{\varphi(n)}))$, d.h., $(f(a_{\varphi(n)}))$ ist beschränkt, im Widerspruch zu $f(a_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit existiert das Supremum s von $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, und zu zeigen bleibt, daß es ein $x_1 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = s$ gibt. Zunächst existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in [a, b]$ mit $s - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq s$, d.h. $\lim f(a_n) = s$. Wie oben gibt es nun weiterhin eine Teilfolge $(a_{\varphi(n)})$ von (a_n), die in $[a, b]$ konvergiert, etwa $\lim a_{\varphi(n)} = x_1 \in [a, b]$. Auf Grund der Stetigkeit von f in x_1 folgt schließlich

$$f(x_1) \;=\; \lim f(a_{\varphi(n)}) \;=\; s.$$

Die zweite Behauptung des Satzes ergibt sich aus der ersten, indem man $-f$ statt f betrachtet.

$\square$

Satz 2.8 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$.*

Beweis. Wir definieren rekursiv zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit folgenden Eigenschaften:

i) $a \leq a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n \leq b$ für alle $m, n \in \mathbb{N}, n \leq m$.
ii) $| a_n - b_n | \leq (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot | a - b |$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
iii) $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zunächst setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Sind nun $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ bereits mit den Eigenschaften i), ii) und iii) definiert, so setzen wir $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und $b_{n+1} = b_n$ falls $f(\frac{1}{2}(a_n+b_n)) \leq 0$. Gilt aber $f(\frac{1}{2}(a_n+b_n)) > 0$, so setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Offenbar gelten dann i) und iii). Wegen $| a_{n+1} - b_{n+1} | = \frac{1}{2} | a_n - b_n | \leq (\frac{1}{2})^n | a - b |$ folgt auch ii).
Aus i) ergibt sich mit Satz 1.7 aus Kapitel 2 die Konvergenz von (a_n) und (b_n), und wegen ii) ist $\lim a_n = \lim b_n =: c$ mit $a \leq c \leq b$. Die Stetigkeit von f in c liefert wegen Satz 2.5 schließlich $f(c) = \lim f(a_n) \leq 0$ und $f(c) = \lim f(b_n) \geq 0$, und damit die Behauptung.

$\square$

Bemerkung. Satz 2.8 heißt auch Weierstraßscher Nullstellensatz. Er ist ein Spezialfall des folgenden Zwischenwertsatzes.

Satz 2.9 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und liegt $t \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = t$.*

Beweis. Gilt $f(a) \leq f(b)$, also $f(a) \leq t \leq f(b)$, so gibt es wegen Satz 2.8 ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) - t = 0$, da $f(a) - t \leq 0$, $f(b) - t \geq 0$ und $f - t$ stetig auf $[a,b]$ ist. Gilt $f(a) \geq f(b)$, so betrachte man $-f$ statt f.

$\square$

Folgerung.

1. Ist $I \subseteq R$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.
   Beweis. Wegen Aufgabe 6.12 aus Kapitel 1 sind die Intervalle gerade die Teilmengen I von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

   $$\forall a, b \in I \; \forall c \in \mathbb{R} : \; (a \leq c \leq b \Longrightarrow c \in I).$$

   Sind also $f(a), f(b) \in f(I)$ mit $a, b \in I$ und gilt $f(a) \leq t \leq f(b)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, so gibt es wegen Satz 2.9 ein $c \in [a,b]$ (falls $a \leq b$) bzw. $c \in [b,a]$ (falls $b \leq a$) mit $f(c) = t$, d.h. $t \in f(I)$.

2. Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sind $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, so hat die Gleichung

   $$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

   mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$.
   Beweis. Wir betrachten die Polynomabbildung

   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ folgt

$$f(x) = x^n(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}).$$

Wir definieren jetzt $M := \mid 1 \mid + \mid a_{n-1} \mid + \ldots + \mid a_1 \mid + \mid a_0 \mid$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\mid x \mid \geq M \geq 1$ gilt dann $\mid x \mid^k \geq M$, also

$$\frac{1}{\mid x \mid^k} \leq \frac{1}{M}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ergibt sich

$$\mid \frac{f(x)}{x^n} - 1 \mid = \mid \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \mid \leq \frac{\mid a_{n-1} \mid}{\mid x \mid} + \ldots + \frac{\mid a_0 \mid}{\mid x^n \mid} \leq \frac{\mid a_{n-1} \mid + \ldots + \mid a_0 \mid}{M} < 1,$$

also $-1 < x^{-n}f(x) - 1 < 1$ und $0 < x^{-n}f(x)$. Folglich ist $f(M) > 0$ und $f(-M) < 0$, da n ungerade ist. Wegen des Weierstraßschen Nullstellensatzes hat f eine Nullstelle in $[-M, M]$.

Der Zwischenwertsatz spielt eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen injektiver Abbildungen.

Definition 2.10 *Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton steigend bzw. (streng) monoton fallend, wenn für alle $x, y \in D$ gilt*

$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \qquad (x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)) \quad \textit{bzw.}$$

$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \qquad (x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)).$$

Bemerkung. Ist f streng monoton, d.h. streng monoton steigend oder streng monoton fallend, so ist f injektiv. Für stetige Funktionen auf Intervallen gilt auch die Umkehrung.

Satz 2.11 *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.*

Beweis. Wir zeigen zunächst für alle $a, b, c \in I$

$$(a < b < c \ \wedge \ f(a) < f(b)) \Longrightarrow f(b) < f(c).$$

Annahme: Es gibt $a, b, c \in I$ mit $a < b < c$ und $f(a) < f(b)$ sowie $f(c) < f(b)$. Dann existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < t < f(b)$ und $f(c) < t < f(b)$. Wegen des Zwischenwertsatzes gibt es nun $y_1 \in (a, b)$ und $y_2 \in (b, c)$ mit $f(y_1) = f(y_2) = t$, im Widerspruch zur Injektivität von f.
Entsprechend folgt für alle $a, b, c \in I$

$$(a < b < c \ \wedge \ f(a) > f(b)) \Longrightarrow f(b) > f(c).$$

Sind nun $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, so folgt $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$, falls $f(x_1) < f(x_2)$, und $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$, falls $f(x_1) > f(x_2)$. Für beliebige $a_1, a_2, b_1, b_2 \in I$ mit $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$ gilt somit $f(a_1) < f(a_2) \wedge f(b_1) < f(b_2)$ oder $f(a_1) > f(a_2) \wedge f(b_1) > f(b_2)$, d.h., f ist monoton.

$\square$

Definition 2.12 *$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt umkehrbar, wenn es eine Funktion $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ und $f(g(x)) = x$ für alle $x \in f(D)$.*

Bemerkung.

1. Wegen Satz 3.5 aus Kapitel 1 ist f genau dann umkehrbar, wenn f injektiv ist. Die Funktion g wie in Definition 2.12 ist dann eindeutig bestimmt und heißt Umkehrfunktion von f, geschrieben $g = f^{-1}$.

2. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f wegen Satz 2.11 genau dann umkehrbar, wenn f streng monoton ist. Ist f streng monoton steigend (fallend), so ist es auch f^{-1}.

Satz 2.13 *Ist I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Wegen Satz 2.11 ist f streng monoton. Sei f streng monoton steigend (Ist f streng monoton fallend, so ergibt sich die Behauptung des Satzes entsprechend) und $b \in f(I)$, also $b = f(a)$ für ein $a \in I$. Wir zeigen die Stetigkeit von f^{-1} in b durch einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, daß f^{-1} in b nicht stetig ist. Wegen Satz 2.5 existiert dann eine Folge (b_n) aus $f(I)$ mit $b_n \neq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$\lim b_n = b \quad \text{und} \quad \lim f^{-1}(b_n) \neq f^{-1}(b) = a$$

gilt. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$, so daß $|a - f^{-1}(b_m)| \geq \epsilon$, d.h.

$$f^{-1}(b_m) \leq a - \epsilon < a \quad \text{oder} \quad f^{-1}(b_m) \geq a + \epsilon > a, \text{ also}$$

$$b_m \leq f(a - \epsilon) < f(a) = b \quad \text{oder} \quad b_m \geq f(a + \epsilon) > f(a) = b.$$

Für $\epsilon' = \min\{f(a) - f(a - \epsilon), f(a + \epsilon) - f(a)\} > 0$ gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ mit $f(a) - \epsilon' \geq f(a) - (f(a) - f(a - \epsilon)) \geq b_m$ oder $f(a) + \epsilon' \leq f(a) + (f(a + \epsilon) - f(a)) \leq b_m$, d.h. $|f(a) - b_m| \geq \epsilon'$ - im Widerspruch zu $\lim b_n = f(a) = b$.

□

Anwendung.

1. **Der natürliche Logarithmus.**
   Wir führen den natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ein. Dazu muß zuerst die Bildmenge $\exp(\mathbb{R})$ ermittelt werden.
   Behauptung: Für alle $y \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = y$.
   Beweis. Sei zunächst $y \geq 1$. Wegen $e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots \geq 1 + y > y \geq 1 = e^0$ und der Stetigkeit von exp folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = y$. Gilt aber $0 < y < 1$, so folgt $1 < y^{-1}$ und damit $e^x = y^{-1}$ für ein $x \in \mathbb{R}$, d.h. $e^{-x} = y$.
   Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist somit $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ gezeigt. Aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion ergibt sich schließlich ihre Umkehrbarkeit.

   $$\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \ln \exp x = x \quad \text{und} \quad \exp \ln y = y \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$$

   heißt natürlicher Logarithmus. Die Logarithmusfunktion ist streng monoton steigend und stetig. Zum Beispiel gilt $\ln e = 1$ und $\ln 1 = 0$ sowie $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

2. **Die allgemeine Exponentialfunktion.**
   Für alle $a \in \mathbb{R}, a > 0$ heißt
   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x$$
   mit $a^x := e^{x \ln a}$ allgemeine Exponentialfunktion (mit der Basis a). Aus den entsprechenden Eigenschaften von exp folgt, daß die allgemeine Exponentialfunktion stetig und für $a \neq 1$ streng monoton ist. Weiterhin gilt z.B. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ und $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $a^n = a \cdot \ldots \cdot a$ (n-faches Produkt) für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. **Der allgemeine Logarithmus.**
   Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion (mit der Basis $a \neq 1$) heißt allgemeiner Logarithmus (zur Basis a), geschrieben $\log_a$. Es gilt
   $$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}.$$
   Speziell heißt $\lg = \log_{10}$ der dekadische Logarithmus. Aus den entsprechenden Eigenschaften von ln folgt, daß die allgemeine Logarithmusfunktion surjektiv, streng monoton und stetig ist. Weiterhin gilt zum Beispiel $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

4. **Die allgemeine Potenzfunktion.**
   Für alle $x \in \mathbb{R}, x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ ist der Ausdruck x^a definiert. Die Funktion
   $$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow x^a$$
   heißt allgemeine Potenzfunktion. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
   $$(xy)^a = x^a y^a \quad \text{und} \quad x^a x^b = x^{a+b}.$$
   Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
   $$(x^{\frac{1}{n}})^n \ = \ x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^1 = x,$$
   und wegen $x^{\frac{1}{n}} > 0$ und der eindeutigen Lösbarkeit von $y^n = x$ in $\mathbb{R}^+$ folgt $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

3. Aufgaben

A 3.1 Zeigen Sie, daß die Dirichletsche Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \phantom{\text{falls}} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
an keiner Stelle stetig ist.

A 3.2 Zeigen Sie, daß die Funktion $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

A 3.3 Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ x & \phantom{\text{falls}} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit an der Stelle 0.

A 3.4 Gegeben sind die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$. Zeigen Sie: Ist f auf $[a, c]$ und $(c, b]$ stetig, so ist f genau dann stetig, wenn

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \ = \ f(c).$$

Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an.

A 3.5 Überprüfen Sie, ob sich die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt.

$$\text{(a)} \ \ f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 7x + 3}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}, \quad \text{(b)} \ \ f(x) = \frac{x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 3}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}.$$

A 3.6 Zeigen Sie, daß die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren und daß die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

in 0 stetig sind.

A 3.7 Zeigen Sie, daß die Sinus- und Cosinusfunktion stetig an der Stelle 0 sind. Benutzen Sie dazu Aufgabe 3.6. Zeigen Sie dann mit Hilfe der Additionstheoreme, daß die Sinus- und Cosinusfunktion in jedem $x \in \mathbb{R}$ stetig sind.

A 3.8 Zeigen Sie, daß die Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle hat. (Hinweis: Zeigen Sie $\cos 2 < 0$, und nutzen Sie die Stetigkeit der Cosinusfunktion.)

A 3.9 Gegeben sind die Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in D$ gilt: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Zeigen Sie: Sind f und h stetig in $a \in D$ und gilt $f(a) = g(a) = h(a)$, so ist auch g stetig in a.

A 3.10 Gegeben sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $D = \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d \neq 0\}$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

injektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f jeweils in den beiden Intervallen $D_- := \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d < 0\}$ und $D_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid cx + d > 0\}$. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Art der Monotonie und dem Vorzeichen von $ad - bc$? Ist f auf ganz D monoton? (Unterscheiden Sie die Fälle $c = 0$ und $c \neq 0$.)

KAPITEL 4

Differentialrechnung

1. Differenzierbare Funktionen

Im folgenden ist D stets eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte.

Definition 1.1 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$, so heißt f differenzierbar in x_0, wenn*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. f heißt differenzierbar, wenn f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. Ist f differenzierbar, so heißt

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f'(x)$$

Ableitung von f.

Bemerkung.

1. Statt $f'(x_0)$ schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big|_{x_0}$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

2. Der Quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ mit $x \in D, x \neq x_0$ heißt Differenzenquotient. Er ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $P_0(x_0, f(x_0))$ und $P(x, f(x))$. Den Grenzwert der Sekantensteigung für $x \to x_0$, also $f'(x_0)$, deutet man als Steigung der Tangente in x_0 an den Graphen von f. Die Tangente ist somit die Gerade durch P_0 mit der Steigung $f'(x_0)$:

$$y = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Beispiel.

1. Für die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto c$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \text{für} \quad x \neq x_0, \quad \text{also} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0,$$

d.h. $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Für die identische Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$ gilt
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \quad \text{für} \quad x \neq x_0, \quad \text{also} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1,$$
d.h. $f'(x_0) = 1$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Für die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mid x \mid$ gilt $f(x) = x$ falls $x > 0$ und $f(x) = -x$ falls $x < 0$. Damit ist die Betragsfunktion in jedem $x_0 \neq 0$ differenzierbar. Wir zeigen nun, daß sie in 0 nicht differenzierbar ist. Wegen
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
existiert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht, d.h., f ist in 0 nicht differenzierbar.

Satz 1.2 *Sind $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$, so ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*
i) $f(x) = a + b(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$ für alle $x \in D$.
ii) $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$.

Beweis. Sei zunächst f in x_0 differenzierbar. Wir definieren
$$r : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{falls} \quad x \neq x_0. \\ 0 & \quad x = x_0. \end{cases}$$
Für $x \neq x_0$ folgt
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0).$$
Offenbar gilt diese Gleichung auch für $x = x_0$. Weiterhin ergibt sich
$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} (\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$
Somit folgt die Behauptung mit $a = f(x_0)$ und $b = f'(x_0)$.
Gilt andererseits
$$f(x) = a + b(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$$
mit $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$, so folgt $a = f(x_0)$ und
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (b + r(x)) = b.$$
Damit ist f in x_0 differenzierbar und $b = f'(x_0)$.

□

Bemerkung.

1. Mit den Bezeichnungen von Satz 1.2 gilt $a = f(x_0)$ und $b = f'(x_0)$.

2. Anschaulich besagt Satz 1.2, daß sich f genau dann an der Stelle x_0 durch eine lineare Funktion approximieren läßt, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

Satz 1.3 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist f auch stetig in x_0.*

Beweis. Sei $f(x) = a + b(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ wie in Satz 1.2. Wegen $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (a + b(x - x_0) + r(x)(x - x_0)) = a = f(x_0).$$

Mit Satz 2.5 aus Kapitel 3 folgt die Behauptung.

$\square$

Beispiel. Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mid x \mid$ ist in 0 stetig aber nicht differenzierbar, d.h., die Umkehrung von Satz 1.3 gilt nicht.

Satz 1.4 *Sind die Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar, so sind auch die Funktionen $f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$) in x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{array}{ll} i) & (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \\ ii) & (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \textit{(Produktregel)}, \\ iii) & (\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \textit{(Quotientenregel)}. \end{array}$$

Beweis. Behauptung i) folgt unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Funktionen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Um Behauptung ii) zu beweisen, betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \end{aligned}$$

für alle $x \in D, x \neq x_0$. Da f und g in x_0 differenzierbar sind, folgt mit der Stetigkeit von f in x_0, daß der Grenzwert des rechten Ausdrucks der Gleichung für $x \to x_0$ existiert. Daraus ergibt sich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0),$$

also Behauptung ii). Schließlich gilt für alle $x \in D, x \neq x_0$

$$\begin{aligned} \frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)}. \end{aligned}$$

Wie oben folgt wieder aus der Differenzierbarkeit von f und g in x_0 und der Stetigkeit von g in x_0, daß der Grenzwert des rechten Ausdrucks der Gleichung für $x \to x_0$ existiert, und es gilt

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

Beispiel.

1. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}$, so ist auch $a \cdot f$ in x_0 differenzierbar, und mit der Produktregel ergibt sich

$$(a \cdot f)'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + a \cdot f'(x_0) = a \cdot f'(x_0).$$

2. Ist $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f_n' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto nx^{n-1}$.
Beweis durch vollständige Induktion nach n.
$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$ ist die identische Abbildung auf $\mathbb{R}$, für die in Beispiel 2 nach Definition 1.1 schon die Behauptung $f_1' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1$ gezeigt wurde. Gilt nun $f_n' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto nx^{n-1}$, so folgt wegen $f_{n+1} = f_n \cdot f_1$ und der Produktregel

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

3. Für die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \text{ gilt}$$

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1.$$

4. Gebrochen rationale Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0}$$

sind differenzierbar, und ihre Ableitung berechnet man mit Hilfe der Quotientenregel. Zum Beispiel gilt

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2} \quad \text{für} \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Satz 1.5 *Ist die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und ist $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Beweis. Wegen Satz 1.2 gilt für alle $x \in D$ und $y \in f(D)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \text{und} \\ g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + s(y)(y - y_0) \end{aligned}$$

wobei $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$ und $\lim_{y\to y_0} s(y) = 0$. Mit $y = f(x), x \in D$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g\circ f(x_0) + (g'(f(x_0)) + s(f(x)))(f'(x_0) + r(x))(x - x_0) \\ &= g\circ f(x_0) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + \hat{r}(x)(x - x_0), \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{r}(x) = g'f(x_0)r(x) + s(f(x))(f'(x_0) + r(x)).$$

Wir zeigen nun $\lim_{x\to x_0} \hat{r}(x) = 0$, d.h. $\lim_{x\to x_0} s(f(x))f'(x_0) = 0$, da $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$. Gilt $f'(x_0) = 0$, so folgt die Behauptung offensichtlich, und wir nehmen an, daß $f'(x_0) > 0$ gilt (der Fall $f'(x_0) < 0$ verläuft analog). Wegen Aufgabe 4.11 existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $x \in D$ gilt

$$x_0 - \epsilon < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0) \quad \text{und} \quad x_0 < x < x_0 + \epsilon \Longrightarrow f(x_0) < f(x).$$

Ist nun (a_n) eine Folge aus D mit $\lim a_n = x_0$ und $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $f(a_n) \neq f(x_0) = y_0$ bis auf endlich viele Ausnahmen für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 folgt $\lim f(a_n) = f(x_0) = y_0$, und wegen $\lim_{y\to y_0} s(y) = 0$ folgt $\lim s(f(a_n)) = 0$, also $\lim_{x\to x_0} s(f(x))f'(x_0) = 0$.
Mit Satz 1.2 erhalten wir die Differenzierbarkeit von $g \circ f$ in x_0, und aus Bemerkung 1 nach Satz 1.2 ergibt sich $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

□

Bemerkung. Satz 1.5 heißt Kettenregel.

Als nächstes wollen wir die Differenzierbarkeit spezieller Funktionen untersuchen.

Die Exponentialfunktion. Wir zeigen zunächst, daß exp in 0 differenzierbar ist.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Im Beispiel vor Satz 2.6 aus Kapitel 3 wurde gezeigt, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

in 0 stetig ist. Also folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n-1}}{n!} = 1 = \exp' 0.$$

Die Exponentialfunktion ist sogar in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, denn

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0+x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - e^0}{(x - x_0) - 0} \\ &= e^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^0}{t - 0} = e^{x_0} \exp' 0 \\ &= e^{x_0}. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $\exp x = \exp' x$, d.h., die Exponentialfunktion und ihre Ableitung stimmen überein. Mit der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion ergibt sich durch die Kettenregel die Differenzierbarkeit der allgemeinen Exponentialfunktion ($a \in \mathbb{R}^+$):

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x, \quad f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x \ln a.$$

Die Sinus- und Cosinusfunktion. Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit wieder nur an der Stelle 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Wegen Aufgabe 3.6 ist die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

in 0 stetig. Also folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 = \sin' 0.$$

Entsprechend zeigt man mit Aufgabe 3.6

$$\cos' 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = 0.$$

sin und cos sind sogar in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0 + x_0) - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0 - \sin x_0}{x - x_0} \\
&= \cos x_0 \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} + \sin x_0 \lim_{x\to x_0} \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0} \\
&= \cos x_0 \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} + \sin x_0 \lim_{t\to 0} \frac{\cos t - \cos 0}{t - 0} \\
&= \cos x_0 \sin' 0 + \sin x_0 \cos' 0 = \cos x_0.
\end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $\sin' x = \cos x$, d.h., die Cosinusfunktion ist die Ableitung der Sinusfunktion. Entsprechend zeigt man, daß die Cosinusfunktion differenzierbar ist und daß $\cos' x = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 1.6 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $y_0 = f(x_0)$, so gilt:*
i) Ist $f'(x_0) = 0$, so ist f^{-1} nicht differenzierbar in y_0.
ii) Ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar in y_0, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Ist f^{-1} in y_0 differenzierbar, so folgt wegen $f^{-1}f(x) = x$ für alle $x \in I$ und der Kettenregel $(f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 1$, also $f'(x_0) \neq 0$. Sei also nun $f'(x_0) \neq 0$. Wir betrachten die beiden Hilfsfunktionen

$$G(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \quad \text{und} \quad H(x) = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$

wobei G für alle $y \in f(I), y \neq y_0$ und H für alle $x \in I, x \neq x_0$ definiert sind. Setzt man $f(x) = y$ für alle $x \in I, x \neq x_0$, so gilt

$$H(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = G(y).$$

Zu zeigen ist $\lim_{y \to y_0} G(y) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Dazu sei (a_n) eine Zahlenfolge mit $a_n \in f(I), a_n \neq y_0$ und $\lim a_n = y_0$. Wegen der Stetigkeit und Injektivität von f^{-1} ist $(f^{-1}(a_n))$ eine reelle Zahlenfolge mit $f^{-1}(a_n) \in I, f^{-1}(a_n) \neq x_0$ und $\lim f^{-1}(a_n) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$ ergibt sich nun

$$\lim G(a_n) = \lim H(f^{-1}(a_n)) = \frac{1}{\lim \frac{f(f^{-1}(a_n))-f(x_0)}{f^{-1}(a_n)-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, injektiv und an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Wegen $\exp' x = \exp x \neq 0$ ist damit auch die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem $y \in \mathbb{R}^+$ differenzierbar, und es gilt

$$\ln' y = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

Mit der Differenzierbarkeit der Logarithmusfunktion ergibt sich auch die Differenzierbarkeit der allgemeinen Logarithmusfunktion:

$$\log_a' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x \ln a}.$$

Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^a$$

kann wegen $x^a = e^{a \ln x}$ mit Hilfe der Kettenregel und $\exp', \ln'$ berechnet werden:

$$f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a x^{a-1}.$$

So erhält man zum Beispiel speziell für $a = \frac{1}{2}$

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x} \quad \text{und} \quad f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Der Mittelwertsatz

Satz 2.1 *Ist die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und hat f in x_0 ein Maximum oder ein Minimum, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß f in x_0 ein Maximum hat (hat f in x_0 ein Minimum, so folgt die Behauptung analog). Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{falls} \quad x < x_0, \quad \text{also} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \text{und}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{falls} \quad x > x_0, \quad \text{also} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

□

Als unmittelbare Anwendung dieses Satzes erhält man den Satz von Rolle:

Satz 2.2 *Ist $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie differenzierbar in (a, b) und gilt $f(a) = f(b) = 0$, so existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Wegen Satz 2.7 aus Kapitel 3 nimmt f als stetige Funktion auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an. Werden Minimum und Maximum in a und b angenommen, so folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$, also $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Anderenfalls nimmt f Minimum oder Maximum in einem $c \in (a, b)$ an, und die Behauptung folgt dann aus Satz 2.1.

□

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des folgenden Mittelwertsatzes.

Satz 2.3 *Ist $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sowie differenzierbar in (a, b), so existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (x - a)(f(b) - f(a)) - (b - a)(f(x) - f(a)).$$

Offenbar ist h stetig, in (a, b) differenzierbar, und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Wegen des Satzes von Rolle gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Dabei gilt

$$h'(x) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(x), \quad \text{also} \quad 0 = h'(c) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(c),$$

und es folgt die Behauptung.

□

Bemerkung. Anschaulich besagt der Mittelwertsatz, daß eine Tangente am Graphen von f existiert, die parallel zur Sekante durch die Punkte $P(a, f(a))$ und $P(b, f(b))$ ist.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz. Wir benutzen die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 2.3.

1. Gilt $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f (streng) monoton steigend.
   Beweis. Sind $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$, so gibt es wegen des Mittelwertsatzes ein $c \in (x_1, x_2)$ mit
   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$
   Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $f(x_2) \geq f(x_1)$, und gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $f(x_2) > f(x_1)$.

2. Gilt $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f (streng) monoton fallend.

3. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant, d.h. $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$.
   Beweis. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es ein $c \in (a, x)$ mit
   $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0,$$
   d.h. $f(x) = f(a)$.

Anwendung.

1. Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
   $$f' = af,$$
   wobei $a \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene reelle Zahl ist. Offenbar erfüllt jede Funktion ce^{ax} mit $c \in \mathbb{R}$ obige Gleichung. Um alle Lösungen f zu erhalten, betrachten wir die Funktion
   $$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)e^{-ax} \quad \text{mit} \quad f' = af.$$
   Dann gilt
   $$h'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x)(-a)e^{-ax} = af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0,$$
   d.h. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Somit folgt $f(x) = ce^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und die Funktionen $ce^{ax}, c \in \mathbb{R}$ bilden die gesamte Lösungsschar der Differentialgleichung
   $$f' - af = 0.$$
   Fordert man noch zusätzlich $f(x_0) = b, b \in \mathbb{R}$ für ein vorgegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$, so erhält man das Anfangswertproblem
   $$f' - af = 0 \quad \text{und} \quad f(x_0) = b,$$
   das die eindeutige Lösung
   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto be^{-ax_0}e^{ax}$$
   besitzt. Insbesondere ist also die Exponentialfunktion die einzige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $f' = f$ und $f(0) = 1$ gilt.

2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$
Um das zu beweisen, betrachten wir die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin^2 x + \cos^2 x$ und zeigen, daß $h(0) = 1$ und $h'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. $h(0) = 1$ ist offensichtlich, und für die Ableitung von h ergibt sich
$$h'(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x) = 0.$$
Insbesondere folgt damit $|\sin x|, |\cos x| \leq 1$, also
$$-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Als nächstes zeigen wir, daß cos genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ besitzt. Wegen
$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \pm \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} - \frac{x^{4n}}{(4n)!}\right) \end{aligned}$$
folgt
$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - 2 + \frac{2}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{4n-2}}{(4n)!}(4n(4n-1) - 4) \\ &= -\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{4n}}{(4n)!}(4n^2 - n - 1) < 0. \end{aligned}$$
Zusammen mit $\cos 0 = 1 > 0$ ergibt sich nun aus dem Zwischenwertsatz, daß die Cosinusfunktion in $(0, 2)$ eine Nullstelle hat. Hätte sie mindestens zwei Nullstellen in $(0, 2)$, so gäbe es wegen des Satzes von Rolle mindestens ein $c \in (0, 2)$ mit $\cos' c = 0$. Obige Behauptung ist also bewiesen, wenn $\cos' x < 0$ für alle $x \in (0, 2)$ gezeigt ist. Zunächst gilt
$$\begin{aligned} \cos' x = -\sin x &= -(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+3)!}((4n+2)(4n+3) - x^2). \end{aligned}$$
Wegen $(4n + 2)(4n + 3) = 16n^2 + 20n + 6 > 4 \geq x^2$ folgt $\cos' x = -\sin x < 0$ für alle $x \in (0, 2)$. Damit ist gezeigt, daß die Cosinusfunktion genau eine Nullstelle $\alpha \in [0, 2]$ hat, die dann gleichzeitig die kleinste positive Nullstelle ist. Wir definieren $\pi := 2\alpha = 3,14159265358979323846264338...$, also
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$
Die zweite Behauptung ergibt sich aus $\sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, da $\frac{\pi}{2} = \alpha \in (0, 2)$. Mit Hilfe der Additionstheoreme zeigt man nun leicht, daß folgendes für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Die beiden letzten Gleichungen der beiden oberen Zeilen besagen gerade, daß die Sinus- und Cosinusfunktion periodisch mit der Periode 2π sind.

Nun können wir sämtliche Nullstellen der Sinus- und Cosinusfunktion angeben: Die Sinusfunktion hat die Nullstellen $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ und die Cosinusfunktion $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ folgt die erste Behauptung aus der zweiten. Um die zweite Behauptung zu beweisen, reicht es wegen der Periodizität von cos aus, alle Nullstellen in $[0, 2\pi]$ anzugeben. Wie oben gezeigt wurde, existiert keine Nullstelle in $[0, \frac{\pi}{2})$ und wegen $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ damit auch keine in $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, d.h., $\frac{\pi}{2}$ ist die einzige Nullstelle der Cosinusfunktion in $[0, \pi]$. Schließlich ergibt sich auf Grund von $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$, daß $\frac{3}{2}\pi$ die einzige Nullstelle in $[\pi, 2\pi]$ ist, und damit die Behauptung.

Wegen der Periodizität sind die Sinus- und Cosinusfunktion nicht injektiv und damit nicht umkehrbar. Dieses läßt sich aber leicht dadurch beheben, daß man jeweils die Definitionsbereiche einschränkt. So besitzt zum Beispiel die Sinusfunktion in $(0, \pi)$ keine Nullstelle, und wegen $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ist sie damit in $(0, \pi)$ positiv. Zusammen mit $\cos' = -\sin$ ergibt sich die strenge Monotonie der Cosinusfunktion auf $[0, \pi]$, d.h.,

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist umkehrbar. Aus $-1 \leq \cos x \leq 1, \cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ folgt mit dem Zwischenwertsatz $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion der so eingeschränkten Cosinusfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

heißt Arcuscosinusfunktion. Wegen $\cos' x = -\sin x \neq 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ ist arccos in $(-1, 1)$ differenzierbar, und es gilt

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}.$$

Für alle $x \in [0, \pi]$ folgt aber auf Grund von $\sin x \geq 0$ und $\cos^2 + \sin^2 = 1$ die Gleichung $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, d.h.

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Entsprechend folgt $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ und die Bijektivität von

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1].$$

Die Umkehrfunktion der so eingeschränkten Sinusfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

heißt Arcussinusfunktion. Wegen $\sin' x = \cos x \neq 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist arcsin differenzierbar, und wie oben folgt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt Tangensfunktion. Sie ist periodisch mit der Periode π, da für alle x aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

gilt. Die Tangensfunktion ist auf jedem Teilintervall $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ weder nach oben noch nach unten beschränkt und wegen

$$\tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

streng monoton steigend. Damit folgt zum Beispiel $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ und die Bijektivität der Einschränkung von tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Die zugehörige Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

heißt Arcustangensfunktion, die auf Grund von $\tan'(x) \neq 0$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x).$$

Dieser Ausdruck soll nun wie oben mit Hilfe der üblichen Methoden vereinfacht werden. Dazu betrachten wir zunächst für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}.$$

Hieraus folgt

$$\cos^2 x(\tan^2 x + 1) = 1 \text{ und } \cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1},$$

also

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Abschließend soll noch kurz die Cotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\cos x}{\sin x}$$

vorgestellt werden. Sie ist ebenfalls periodisch mit der Periode π und wegen

$$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

streng monoton fallend in jedem Teilintervall $(k\pi, (k+1)\pi)$. Schließlich folgt wie oben $\cot((0,\pi)) = \mathbb{R}$. Die Einschränkung von cot auf $(0,\pi)$ ist damit bijektiv, und ihre Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$$

heißt Arcuscotangensfunktion. Sie ist differenzierbar mit

$$\operatorname{arccot}' : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi), x \longmapsto \frac{-1}{1+x^2}.$$

3. Lokale Extremwerte

Definition 3.1 *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Minimum (Maximum), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß für alle $x \in D$ gilt*

$$| x - x_0 | < \epsilon \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \qquad (| x - x_0 | < \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)).$$

$f(x_0)$ heißt dann lokales Minimum (lokales Maximum).

Bemerkung.

1. Ein lokaler Extremwert ist ein lokales Minimum oder Maximum.

2. Hat f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum, so ist $f(x_0)$ in einer Umgebung von x_0 ein (absolutes) Minimum oder Maximum von f.

Satz 3.2 *Hat $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ einen lokalen Extremwert und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. f habe in x_0 ein lokales Maximum (anderenfalls betrachte man $-f$). Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$| x - x_0 | < \epsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Wähle $\epsilon > 0$ so klein, daß $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq (a,b)$. Dann hat die Einschränkung von f auf $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ in x_0 ein Maximum, und die Behauptung folgt wegen Satz 2.1.

□

Bemerkung.

1. Gilt $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 nicht notwendig einen lokalen Extremwert. Zum Beispiel gilt $f'(x) = 3x^2$ für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$, also $f'(0) = 0$. Für jedes $x < 0$ ist aber $f(x) = x^3 < 0$ und $f(x) > 0$ für jedes $x > 0$. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ aus Satz 3.2 ist also notwendig für einen lokalen Extremwert, aber nicht hinreichend.

2. Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f wegen Satz 2.7 aus Kapitel 3 Minimum und Maximum an. Mögliche Stellen, an denen die Extremwerte angenommen werden können, sind also

   (a) Die Randpunkte a und b.

   (b) Die Stellen $x_0 \in (a,b)$, an denen f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ gilt.

   (c) Die Stellen, an denen f nicht differenzierbar ist.

Beispiel.

1. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto -x^2$. Wir untersuchen die Stellen gemäß Bemerkung 2.
   (a) $f(-1) = f(1) = -1$.
   (b) $f'(x) = -2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ und $f(0) = 0$.
   (c) f ist differenzierbar.
   Damit ist -1 das Minimum von f, das an den Stellen 1 und -1 angenommen wird, und 0 das Maximum, das an der Stelle 0 angenommen wird.

2. $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto | x |$. Gemäß Bemerkung 2 ergibt sich
   (a) $f(-1) = f(1) = 1$.
   (b) $f'(x) = 1$ für $x > 1$ und $f'(x) = -1$ für $x < 1$, also $f'(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.
   (c) f ist nur an der Stelle 0 nicht differenzierbar, und es gilt $f(0) = 0$.
   Damit ist 0 das Minimum von f, das an der Stelle 0 angenommen wird, und 1 das Maximum, das an den Stellen 1 und -1 angenommen wird.

Satz 3.3 *Die Funktionen $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $(a, b), a < b$. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) - f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

Dann ist h stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b), und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Wegen des Satzes von Rolle existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)).$$

□

Bemerkung.

1. Gilt $g(x) = x$, so ergibt sich aus Satz 3.3 der Mittelwertsatz. Deshalb wird Satz 3.3 auch als zweiter Mittelwertsatz bezeichnet.

2. Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, so folgt, wie oben erwähnt, im allgemeinen nicht, daß an der Stelle x_0 ein lokaler Extremwert vorliegt. Um für die Existenz eines lokalen Minimums oder Maximums ein hinreichendes Kriterium angeben zu können, führen wir die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f ein.

$n = 1$. $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt einmal differenzierbar, wenn f differenzierbar ist. f' heißt dann erste Ableitung, geschrieben $f^{(1)} = f'$.

$n > 1$. Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nun $(n-1)-$mal differenzierbar und $f^{(n-1)} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ die $(n-1)-$te Ableitung, so heißt f genau dann $n-$mal differenzierbar, wenn $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ heißt in diesem Falle $n-$te Ableitung von f.

Manchmal schreibt man auch f'' statt $f^{(2)}$ oder f''' statt $f^{(3)}$ usw. sowie $f^{(0)}$ statt f.

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mid x \mid x^n$ differenzierbar, und es gilt $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (n+1) \mid x \mid x^{n-1}$. Mit vollständiger Induktion ergibt sich nun leicht die $n-$fache Differenzierbarkeit von f mit

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (n+1)! \mid x \mid .$$

Somit ist f aber nicht $(n+1)-$mal differenzierbar.

Satz 3.4 *Die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig sowie $n-$mal differenzierbar in (a,b) und $x_0 \in (a,b)$. Für jedes $x \in (a,b)$ gilt dann*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

für ein $c \in (a,b)$. Gilt $x_0 < x$, so kann man $x_0 < c < x$ annehmen und $x < c < x_0$, falls $x < x_0$.

Beweis. Sei $x \in (a,b)$ und $x_0 < x$ (der Fall $x = x_0$ ist trivial, und der Fall $x < x_0$ ergibt sich entsprechend). Wir definieren

$$F : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k.$$

Dann ist F differenzierbar, und es folgt

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} = \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}.$$

Wenden wir den zweiten Mittelwertsatz auf F und g mit $g(t) = (x - t)^n$ für das Intervall $[x_0, x]$ an, so erhalten wir

$$g'(c)(F(x) - F(x_0)) = F'(c)(g(x) - g(x_0))$$

für ein $c \in (x_0, x)$. Wegen

$$F(x) = f(x), \quad F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad F'(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}$$

$$\text{und} \quad g(x) = 0, \quad g(x_0) = (x - x_0)^n, \quad g'(c) = -n(x - c)^{n-1}$$

folgt

$$-n(x - c)^{n-1}(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k) = -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}(x - x_0)^n,$$

$$\text{also} \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

da $x \neq c$.

□

Bemerkung. Ist f wie in Satz 3.4, aber sogar unendlich oft differenzierbar, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt x_0. Die Funktion f heißt um x_0 in ihre Taylorreihe entwickelbar, wenn die Taylorreihe in einer Umgebung von x_0 konvergiert und dort mit f übereinstimmt. Gibt es zum Beispiel ein $M > 0$, so daß $\mid f^{(n)}(x) \mid \leq M$ für alle $x \in (a,b)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt

$$\mid \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \mid \leq M\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Wegen $\lim \frac{(b-a)^n}{n!} = 0$ konvergiert dann die Taylorreihe in (a,b) und stimmt dort mit der Funktion f überein.

Beispiel.

1. Die Sinusfunktion ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ um x_0 in ihre Taylorreihe entwickelbar, die dann für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und dort mit der Sinusfunktion übereinstimmt. Um das zu beweisen seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ mit $x, x_0 \in (a,b)$. Wegen $\mid \sin^{(n)} x \mid = \mid \cos x \mid \leq 1$ für ungerades n und $\mid \sin^{(n)} x \mid = \mid \sin x \mid \leq 1$ für gerades n folgt aus obiger Bemerkung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sin x.$$

   Ist speziell $x_0 = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sin 0}{0!} + \frac{\cos 0}{1!}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 \pm \dots \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

   Entsprechend ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ die Taylorreihe der Cosinusfunktion mit dem Entwicklungspunkt 0, die in ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und mit der Cosinusfunktion übereinstimmt.
   Diese Überlegungen zeigen nun, daß die Sinusfunktion (und in entsprechender Weise auch die Cosinusfunktion) durch die Eigenschaften

$$\sin'' x = -\sin x \quad \text{und} \quad \sin 0 = 0,\ \sin' 0 = 1$$

   festgelegt ist. Wie in Anwendung 2 des Mittelwertsatzes ergibt sich nämlich für jede zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'' = -f$ und $f(0) = 0, f'(0) = 1$ die Identität $f^2 + (f')^2 = 1$, also $\mid f(x) \mid, \mid f'(x) \mid \leq 1$. Analog der obigen Betrachtungen folgt, daß sich die Funktion f in $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 darstellen läßt, wobei diese wegen $f'' = -f, f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ mit der entsprechenden Taylorreihe der Sinusfunktion übereinstimmt, d.h. $f = \sin$.

2. Wir wollen die Taylorreihe der Logarithmusfunktion mit dem Entwicklungspunkt 1 berechnen und auf Konvergenz untersuchen. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^+$

$$\ln^{(n)} x = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n},$$

wie man leicht durch vollständige Induktion beweisen kann. Wir zeigen nun, daß die Logarithmusfunktion um 1 in ihre Taylorreihe entwickelbar ist, die dann in $(\frac{1}{2}, 2]$ konvergiert und dort mit ln übereinstimmt. Dazu seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < \frac{1}{2} < 2 < b$ und $x \in \mathbb{R}$ zunächst mit $1 < x \leq 2$ sowie $c \in \mathbb{R}$ mit $1 < c < x$. Wegen

$$\mid \frac{\ln^{(n)}(c)}{n!}(x-1)^n \mid = \frac{(n-1)!}{n!c^n}(x-1)^n = \frac{1}{n}(\frac{x-1}{c})^n$$

und $0 < \frac{x-1}{c} < 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{\ln^{(n)}(c)}{n!}(x-1)^n \mid = 0.$$

Entsprechend ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{\ln^{(n)}(c)}{n!}(x-1)^n \mid = 0 \ \text{ für alle } \frac{1}{2} < x < c < 1.$$

Somit erhalten wir

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \ldots$$

für alle $x \in (\frac{1}{2}, 2]$, d.h.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots$$

für alle $x \in (-\frac{1}{2}, 1]$. Insbesondere ist also

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \mp \ldots .$$

Die obige Reihendarstellung für $\ln(1+x)$ gilt aber nicht nur für alle $x \in (-\frac{1}{2}, 1]$, sondern sogar für alle $x \in (-1, 1]$. Um das zu zeigen, betrachten wir die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \ln(1+x) \quad \text{und} \\ g : (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{(siehe Aufgabe 4.13).} \end{aligned}$$

Für alle $x \in (-1, 1)$ gilt nun

$$f(x) + f(-x) = \ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln((1+x)(1-x)) = \ln(1-x^2) = f(-x^2)$$

$$\text{und} \quad g(x) + g(-x) = g(-x^2) \quad \text{(vergleiche Aufgabe 4.13).}$$

Wie oben gezeigt wurde, stimmen f und g auf $(-\frac{1}{2}, 1]$ überein, und wir zeigen jetzt, daß die beiden Funktionen sogar auf $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ gleich sind. Durch vollständige Induktion ergibt sich dann, daß f und g auf jedem $(-\frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}, 1], n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2} = 1$ folgt dann die Behauptung. Sei also $x \in \mathbb{R}$ und $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$. Wegen $0 < -x < 1$ und $-\frac{1}{2} < -x^2 < 0$ folgt $f(-x) = g(-x)$ und $f(-x^2) = g(-x^2)$, also $f(x) = f(-x^2) - f(-x) = g(-x^2) - g(-x) = g(x)$.

Satz 3.5 *Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig sowie $n-$mal differenzierbar in (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Gilt $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ mit $n \geq 2$, so folgt*

i) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

ii) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

iii) Ist n ungerade, so liegt in x_0 kein lokaler Extremwert vor.

Beweis. Sei $f^{(n)}(x_0) > 0$ (der Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ verläuft analog). Wegen Aufgabe 4.11 existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $x \in (a, b)$ gilt

$$x_0 - \epsilon < x < x_0 \Longrightarrow f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$x_0 < x < x_0 + \epsilon \Longrightarrow 0 = f^{(n-1)}(x_0) < f^{(n-1)}(x).$$

Man kann $\epsilon > 0$ so klein annehmen, daß $x_0 - \epsilon$ und $x_0 + \epsilon$ in (a, b) liegen. Wegen Satz 3.4 gibt es für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

wobei $x < c < x_0$ gilt, falls $x < x_0$ und $x_0 < c < x$, falls $x_0 < x$. Wir zeigen nun für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), x \neq x_0$:

i) Ist n gerade, so gilt $f(x) > f(x_0)$.
ii) Ist n ungerade, so gilt $f(x) < f(x_0)$, falls $x < x_0$, und $f(x) > f(x_0)$, falls $x > x_0$.

zu i): Gilt $x < x_0$, so folgt $x_0 - \epsilon < x < c < x_0$, also $(x - x_0)^{n-1} < 0$ und $f^{(n-1)}(c) < f^{(n-1)}(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0) < f(x)$. Gilt $x_0 < x$, so folgt $x_0 < c < x < x_0 + \epsilon$, also $(x - x_0)^{n-1} > 0$ und $f^{(n-1)}(c) > f^{(n-1)}(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0) < f(x)$.

zu ii): Gilt $x < x_0$, so folgt $f^{(n-1)}(c) < 0$ wie oben, aber wegen $(x - x_0)^{n-1} > 0$ ergibt sich $f(x) < f(x_0)$. Gilt $x_0 < x$, so folgt $f^{(n-1)}(c) > 0$ und $(x - x_0)^{n-1} > 0$, d.h. $f(x_0) < f(x)$.

□

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^4 e^{-x}$. Dann gilt für die erste Ableitung $f'(x) = (4x^3 - x^4)e^{-x}$, und f' hat damit die beiden Nullstellen 0 und 4. Für die zweite Ableitung von f ergibt sich $f''(x) = (12x^2 - 8x^3 + x^4)e^{-x}$, also $f''(0) = 0$ und $f''(4) = -64e^{-4} < 0$. Somit hat f an der Stelle $x = 4$ ein lokales Maximum, und wegen $f^{(3)}(x) = (24x - 36x^2 + 12x^3 - x^4)e^{-x}, f^{(4)}(x) = (24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)e^{-x}$ sowie $f^{(3)}(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ hat f schließlich an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum.

4. Aufgaben

A 4.1 Zeigen Sie direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \longmapsto \sqrt{x}$ differenzierbar ist, und geben Sie f' an.

A 4.2 Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x^3}{\sqrt{x^2+2}} \qquad \text{(b)}\quad f(x) = (\sqrt{x^2+3})^3.$$

A 4.3 Untersuchen Sie die Funktion f auf Differenzierbarkeit.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{falls} \quad x < 1. \\ x^2 + 3x - 2 & \phantom{\text{falls}} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

A 4.4 Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mid x \mid x^n.$$

Zeigen Sie, daß f_n differenzierbar ist und daß

$$f_n' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (n+1) \mid x \mid x^{n-1}$$

gilt.

A 4.5 Zeigen Sie, daß der sinus hyperbolicus

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

differenzierbar und streng monoton ist und daß $\sinh' = \cosh$ gilt, wobei

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

der cosinus hyperbolicus ist. Beweisen Sie $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ sowie $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Dabei ist $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion des sinus hyperbolicus.

A 4.6 (a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
(b) Zeigen Sie: $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A 4.7 Besitzt die Funktion

$$f : (-9, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x-3}{x+9}$$

Tangenten, die durch den Nullpunkt gehen? Geben Sie gegebenenfalls die Berührungspunkte und die Steigungen der Tangenten an.

A 4.8 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 25)e^x$$

injektiv und f^{-1} an der Stelle $x = 10e$ differenzierbar ist. Berechnen Sie $(f^{-1})'(10e)$.

A 4.9 Geben Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, für die

$$f' - xf = 0$$

gilt. Welche dieser Funktionen löst das Anfangswertproblem

$$f' - xf = 0, \quad f(0) = -1?$$

A 4.10 Berechnen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x \cdot \mid x - 1 \mid \cdot e^{-x}.$$

A 4.11 Zeigen Sie: Ist die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar (dabei ist x_0 ein Häufungspunkt von D) und gilt $f'(x_0) > 0$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $x \in D$ gilt:

$$x_0 - \epsilon < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0) \quad \text{und} \quad x_0 < x < x_0 + \epsilon \Longrightarrow f(x_0) < f(x).$$

A 4.12 Gegeben ist $M > 0$ und die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mid f'(x) \mid \leq M$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mid f(x) - f(y) \mid \leq M \cdot \mid x - y \mid$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mid x - y \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon,$$

d.h., f ist gleichmäßig stetig.

(c) Die Arcustangensfunktion $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

A 4.13 Zeigen Sie, daß für alle $x \in (-1, 1)$ die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

absolut konvergiert und daß die Funktion

$$g : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

die Gleichung $g(x) + g(-x) = g(-x^2)$ für alle $x \in (-1, 1)$ erfüllt.

A 4.14 Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion um jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ in ihre Taylorreihe entwickelbar ist und daß diese in ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und dort mit der Exponentialfunktion übereinstimmt.

KAPITEL 5

Integralrechnung

1. Integration als Umkehrung der Differentiation

Im folgenden ist I ein Intervall mit mehr als einem Element, d.h. $I \neq \emptyset$ und $I \neq \{a\}$.

Definition 1.1 *Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt eine differenzierbare Funktion*

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Stammfunktion von f, wenn für alle $x \in I$ gilt :

$$F'(x) = f(x).$$

Beispiel. Jede Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hat die Stammfunktion

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

Satz 1.2 *Hat die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Zu zeigen ist: Sind $a, b \in I$ mit $f(a) < f(b)$, so gibt es zu jedem $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < d < f(b)$ ein $c \in I$ mit $f(c) = d$. Sei $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und sei $a < b$ (der Fall $b < a$ verläuft analog). Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f(a) < 0, f(b) > 0$ und $d = 0$. Da F differenzierbar ist, ist F wegen Satz 1.3, Kapitel 4 auch stetig und nimmt daher wegen Satz 2.7, Kapitel 3 auf dem Intervall $[a, b]$ das Minimum an. Wir zeigen, daß F das Minimum in einem $c \in (a, b)$ annimmt, so daß $f(c) = F'(c) = 0 = d$ wegen Satz 3.2, Kapitel 4 folgt.
Annahme: F nimmt in (a, b) das Minimum nicht an. Dann folgt $F(a) < F(x)$ für alle $x \in (a, b)$ oder $F(b) < F(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Im ersten Fall ergibt sich der Widerspruch

$$f(a) = F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \geq 0,$$

und im zweiten Fall

$$f(b) = F'(b) = \lim_{x \to b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} \le 0.$$

Wir beweisen nun den allgemeinen Fall. Dazu definieren wir

$$G : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) - d \cdot x$$

und

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) - d.$$

Dann ist G differenzierbar mit $G'(x) = F'(x) - d = f(x) - d$ für alle $x \in I$, d.h., G ist eine Stammfunktion von g. Wegen $g(a) = f(a) - d < 0$ und $g(b) = f(b) - d > 0$ können wir auf g den obigen Spezialfall anwenden. Damit existiert ein $c \in (a, b)$ mit $g(c) = 0$, d.h. $f(c) - d = 0$ und $f(c) = d$.

□

Mit Hilfe von Satz 1.2 lassen sich Funktionen angeben, die keine Stammfunktion besitzen. Zum Beispiel hat die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \ge 0 \\ -1 & \phantom{\text{für }} x < 0 \end{cases}$$

eine Sprungstelle, und es gilt $f(\mathbb{R}) = \{1, -1\}$. Damit ist $f(\mathbb{R})$ kein Intervall, d.h., f hat keine Stammfunktion.

Satz 1.3 *Ist $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Stammfunktionen von f.*

Beweis. Ist F Stammfunktion von f, so gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$(F + c)' = F' + c' = F' = f.$$

Ist andererseits $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, also $G' = f$, so gilt $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in I$. Wegen Folgerung 3 aus dem Mittelwertsatz (Satz 2.3, Kapitel 4) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $(G - F)(x) = c$ für alle $x \in I$, d.h. $G = F + c$.

□

Definition 1.4 *Besitzt die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F, so heißt f integrierbar und F unbestimmtes Integral von f, geschrieben*

$$F(x) = \int f dx \text{ oder } F(x) = \int f(x) dx.$$

Für alle $a, b \in I$ heißt

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a)$$

das (bestimmte) Integral von f zwischen den Grenzen a und b.

Bemerkung.

1. Die Definition des bestimmten Integrals ist unabhängig von der gewählten Stammfunktion, denn ist G auch eine Stammfunktion von f, so gibt es wegen Satz 1.3 ein $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$, also
$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$
2. Man schreibt auch
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

Einfache Eigenschaften.
Im folgenden seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sowie $a, b \in I$ und $c \in \mathbb{R}$.

1. Es gilt
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$
2. Sind $a_1, \ldots, a_n \in I, n \geq 2$, so gilt
$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx.$$
3. $f + g$ und $c \cdot f$ sind integrierbar, und es gilt
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad \int_a^b (c \cdot f)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Satz 1.5 (Partielle Integration) *Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit der Stammfunktion G und $f'G$ integrierbar, dann ist auch fg integrierbar. Es gilt für alle $a, b \in I$*
$$\int_a^b fg dx = fG\big|_a^b - \int_a^b f'G dx.$$

Beweis. Ist $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f'G$, so gilt
$$(fG - H)' = f'G + fG' - H' = fG' = fg.$$
Damit ist fg integrierbar und $fG - H$ eine Stammfunktion. Es folgt
$$\begin{aligned}\int_a^b fg dx &= (fG - H)\big|_a^b = f(b)G(b) - H(b) - (f(a)G(a) - H(a)) \\ &= (fG)(b) - (fG)(a) - (H(b) - H(a)) \\ &= fG\big|_a^b - \int_a^b f'G dx.\end{aligned}$$

□

Beispiel.

1. Um $\int_a^b \cos^2 x dx$ zu berechnen, wählen wir $g, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cos x$. Dann ist f differenzierbar mit $f' = -\sin$ und g integrierbar mit der Stammfunktion $G = \sin$. Wegen $f'G = -\sin^2 = \cos^2 -1$ erhalten wir unter der Voraussetzung, daß $\cos^2$ integrierbar ist, aus Satz 1.5

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos^2 x dx &= \int_a^b \cos x \cos x dx \\ &= \cos x \sin x|_a^b - \int_a^b (\cos^2 x - 1) dx \\ &= \cos x \sin x|_a^b + x|_a^b - \int_a^b \cos^2 x dx,\end{aligned}$$

also

$$\int_a^b \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)|_a^b.$$

Damit ist zwar noch nicht gezeigt, daß $\cos^2$ integrierbar ist, aber obige Rechnung ergibt, daß im Falle der Integrierbarkeit $\frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)$ eine Stammfunktion ist. Es gilt nun

$$(\frac{1}{2}(\cos x \sin x + x))' = \frac{1}{2}(-\sin^2 x + \cos^2 x + 1) = \cos^2 x,$$

d.h., $\cos^2$ ist integrierbar.

2. Wir berechnen $\int_a^b x^n e^x dx$ mit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und g integrierbar mit der Stammfunktion $G = g$. Unter der Voraussetzung, daß $f'G$ integrierbar ist, ergibt sich nun

$$\int_a^b x^n e^x dx = x^n e^x|_a^b - \int_a^b nx^{n-1} e^x dx.$$

Ist also H_{n-1} eine Stammfunktion von $x^{n-1}e^x$, so ist $x^n e^x - nH_{n-1}(x)$ eine Stammfunktion von $x^n e^x$. Da $H_0(x) = e^x$ eine Stammfunktion von $x^0 e^x$ ist, folgt durch vollständige Induktion nach n, daß $x^n e^x$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ integrierbar ist. Die zugehörigen Stammfunktionen ergeben sich aus der Rekursionsformel

$$H_n(x) = x^n e^x - nH_{n-1}(x).$$

Satz 1.6 (Substitutionsregel) *Seien I, I' zwei Intervalle mit mehr als einem Element. Ist $f : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(I) \subseteq I'$, dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b (f \circ g) g' dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f dx.$$

Beweis. Sei $F : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Wegen der Kettenregel (Satz 1.5, Kapitel 4) ist $F \circ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

für alle $x \in I$. Damit ist $(F \circ g)'$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$, und es folgt

$$\int_a^b (f \circ g)g' dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int_{g(a)}^{g(b)} f dx.$$

□

Beispiel.

1. Wir berechnen $\int_a^b x \sin x^2 dx$ mit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$. Offenbar ist f integrierbar, g differenzierbar und $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Wegen $g'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit der Substitutionsregel
$$\int_a^b x \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_a^b g'(f \circ g) dx = \frac{1}{2}\int_{g(a)}^{g(b)} \sin x dx = -\frac{1}{2}(\cos b^2 - \cos a^2).$$

2. Um $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$ zu berechnen, betrachten wir zunächst
$$\int_{\arcsin 0}^{\arcsin \frac{1}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x dx$$
und wählen
$$\begin{aligned} f &: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{1 - x^2} \\ g &: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin x. \end{aligned}$$
Es gilt $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin 0 = 0$ und
$$(f \circ g)g' : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x.$$
Für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist weiterhin $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x$, also
$$\int (f \circ g)g' dx = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x).$$
Ist f also integrierbar, so gilt wegen $g((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-1, 1)$ und Satz 1.6 für alle $t \in (-1, 1)$
$$\begin{aligned} \int_0^t f dx &= \int_{\arcsin 0}^{\arcsin t} (f \circ g)g' dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)\Big|_{\arcsin 0}^{\arcsin t} \\ &= \frac{1}{2}(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t). \end{aligned}$$
Ist also F eine Stammfunktion von $\sqrt{1 - x^2}$, so folgt
$$F(t) - F(0) = \frac{1}{2}(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t).$$
Man rechnet nun leicht nach, daß $\frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$ tatsächlich eine Stammfunktion von $\sqrt{1 - x^2}$ ist und daß
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}).$$

2. Das Riemann-Integral

Im folgenden ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $a < b$.

Definition 2.1 *Sind $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ mit $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$, dann heißt $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Partition von $[a, b]$. Sind P_1 und P_2 zwei Partitionen von $[a, b]$ mit $P_1 \subseteq P_2$, so heißt P_2 Verfeinerung von P_1.*

Bemerkung.

1. Sind P_1 und P_2 zwei Partitionen von $[a, b]$, so ist $P_1 \cup P_2$ auch eine Partition von $[a, b]$, die eine gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2 ist.

2. Ist $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$ wie in Definition 2.1, so existieren für alle $i = 1, \ldots, n$ das Supremum und das Infimum
$$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\},\ m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
da f auf $[a, b]$ beschränkt ist. Mit der Bezeichnung $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt
$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f, P) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ Obersumme und} \\ \mathrm{U}(f, P) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \text{ Untersumme} \end{aligned}$$
von P bezüglich f. Wegen $m_i \leq M_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ folgt $\mathrm{U}(f, P) \leq \mathrm{O}(f, P)$.

Beispiel.

1. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$, d.h., f ist konstant. Dann gilt für jede Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
$$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = c \text{ und } m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = c$$
für alle $i = 1, \ldots, n$, also
$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b - a), \\ \mathrm{U}(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b - a). \end{aligned}$$

2. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Dann gilt $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ und
$$M_i := \sup\{f(x) \mid \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i}{n},$$
$$m_i := \inf\{f(x) \mid \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i-1}{n}$$
für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, also
$$\mathrm{O}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n},$$
$$\mathrm{U}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i-1 = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Satz 2.2 *Sind P_1 und P_2 zwei Partitionen von $[a,b]$, so gilt*

1. $\mathrm{O}(f, P_1) \geq \mathrm{O}(f, P_2)$ *und* $\mathrm{U}(f, P_1) \leq \mathrm{U}(f, P_2)$ *falls* $P_1 \subseteq P_2$.
2. $\mathrm{U}(f, P_1) \leq \mathrm{O}(f, P_2)$.

Beweis. Wir beweisen zunächst 1. Dazu sei $P_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ und $P_2 = P_1 \cup \{y_1, \ldots, y_k\}$, wobei $y_1, \ldots, y_k$ nicht in P_1 liegen, und wir betrachten zunächst $P = P_1 \cup \{y_1\}$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_{i-1} < y_1 < x_i$. Definieren wir
$$M' := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq y_1\} \text{ und } M'' := \sup\{f(x) \mid y_1 \leq x \leq x_i\},$$
dann gilt $M' \leq M_i$ und $M'' \leq M_i$ sowie
$$M_i \Delta x_i = M_i(y_1 - x_{i-1}) + M_i(x_i - y_1) \geq M'(y_1 - x_{i-1}) + M''(x_i - y_1),$$
das heißt
$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f, P_1) &= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_{i-1}\Delta x_{i-1} + M_i \Delta x_i + M_{i+1}\Delta x_{i+1} + \ldots + M_n \Delta x_n \\ &\geq M_1\Delta x_1 + \ldots + M_{i-1}\Delta x_{i-1} + M'(y_1 - x_{i-1}) + M''(x_i - y_1) \\ &\quad + M_{i+1}\Delta x_{i+1} + \ldots + M_n \Delta x_n \\ &= \mathrm{O}(f, P). \end{aligned}$$
Betrachten wir nun die Folge der Partitionen
$$P_1 \subset P_1 \cup \{y_1\} \subset P_1 \cup \{y_1, y_2\} \subset \ldots \subset P_1 \cup \{y_1, \ldots, y_{k-1}\} \subset P_2,$$
so ergibt sich
$$\mathrm{O}(f, P_1) \geq \mathrm{O}(f, P_1 \cup \{y_1\}) \geq \ldots \geq \mathrm{O}(f, P_1 \cup \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}) \geq \mathrm{O}(f, P_2),$$
also die Behauptung. Entsprechend beweist man $\mathrm{U}(f, P_1) \leq \mathrm{U}(f, P_2)$.
Behauptung 2 folgt unmittelbar aus Behauptung 1, da
$$\mathrm{U}(f, P_1) \leq \mathrm{U}(f, P_1 \cup P_2) \leq \mathrm{O}(f, P_1 \cup P_2) \leq \mathrm{O}(f, P_2).$$
□

Bemerkung. Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so ist wegen Satz 2.2 die Menge der Obersummen nach unten beschränkt, und zwar durch jede Untersumme, und die Menge der Untersummen nach oben beschränkt, und zwar durch jede Obersumme. Damit existieren

$$\inf\{\mathrm{O}(f, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\}$$

und

$$\sup\{\mathrm{U}(f, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\}.$$

Definition 2.3 *Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so heißt*

$$\int_a^{b*} f(x)dx := \inf\{\mathrm{O}(f, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a, b]\}$$

Oberintegral von f und

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx := \sup\{\mathrm{U}(f, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a, b]\}$$

Unterintegral von f.
Stimmen Ober- und Unterintegral überein, so heißt f Riemann-integrierbar (R-integrierbar), und in diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^{b} f(x)dx$$

Riemann-Integral von f.

Bemerkung.

1. Später wird gezeigt, daß $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ gilt, falls F eine Stammfunktion von f ist. Die Bezeichnung $\int_a^b f(x)dx$ stimmt dann mit der früheren Bezeichnung überein.
2. Es sei $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Ist f R-integrierbar, so deutet man $\int_a^b f(x)dx$ als Inhalt der Fläche, die zwischen a und b vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt ist.

Beispiel.

1. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$, d.h., f ist konstant. Dann gilt für jede Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ wegen Beispiel 1 nach Definition 2.1

   $$\mathrm{O}(f, P) = c(b - a) \text{ und } \mathrm{U}(f, P) = c(b - a).$$

   Es folgt

   $$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf\{\mathrm{O}(f, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\} = c(b - a),$$

und

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx = \sup\{\mathrm{U}(f,P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\} = c(b-a).$$

Damit ist f R-integrierbar und $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

2. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$ und $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen Beispiel 2 nach Definition 2.1

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{O}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{U}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

also

$$\int_0^{1*} f(x)dx \leq \frac{1}{2} \text{ und } \int_{0*}^{1} f(x)dx \geq \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2} \leq \int_{0*}^{1} f(x)dx \leq \int_0^{1*} f(x)dx \leq \frac{1}{2}.$$

Damit ist f R-integrierbar und $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

3. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die auf $[0,1]$ eingeschränkte Dirichletsche Funktion, also

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir zeigen $\mathrm{O}(f,P) = 1$ sowie $\mathrm{U}(f,P) = 0$ für jede Partition P von $[0,1]$. Dann gilt $\int_0^{1*} f(x)dx = 1$ und $\int_{0*}^{1} f(x)dx = 0$, d.h., f ist nicht R-integrierbar.

Sei also $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[0,1]$ mit $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da in $[x_{i-1}, x_i]$ ein $x \notin \mathbb{Q}$ liegt, gilt

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1,$$

und da in $[x_{i-1}, x_i]$ ein $x \in \mathbb{Q}$ liegt, gilt

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 0.$$

Es folgt

$$\mathrm{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1$$

und

$$\mathrm{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0.$$

Damit ist f nicht R-integrierbar.

Satz 2.4 *Genau dann ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition P von $[a,b]$ gibt mit*

$$\mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \epsilon.$$

Beweis. Sei f R-integrierbar und $\epsilon > 0$ beliebig. Zunächst gibt es Partitionen P_1 und P_2 von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{O}(f,P_1) - \int_a^{b*} f(x)dx = \mathrm{O}(f,P_1) - \inf\{\mathrm{O}(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\} < \frac{\epsilon}{2}$$

und

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx - \mathrm{U}(f,P_2) = \sup\{\mathrm{U}(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\} - \mathrm{U}(f,P_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für $P = P_1 \cup P_2$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) &\leq \mathrm{O}(f,P_1) - \mathrm{U}(f,P_2) \\ &= \mathrm{O}(f,P_1) - \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx - \mathrm{U}(f,P_2) \\ &= \mathrm{O}(f,P_1) - \int_a^{b*} f(x)dx + \int_{a*}^b f(x)dx - \mathrm{U}(f,P_2) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Gibt es nun andererseits zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition P mit $\mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \epsilon$, so gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$\int_a^{b*} f(x)dx - \int_{a*}^b f(x)dx \leq \mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^b f(x)dx$, d.h., f ist R-integrierbar.

$\square$

Satz 2.5 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton, so ist f R-integrierbar.*

Beweis. Sei f monoton steigend (ist f monoton fallend, so verläuft der Beweis analog). Gilt $f(a) = f(b)$, so ist f konstant, und die Behauptung folgt wegen Beispiel 1 nach Definition 2.3. Sei also $f(a) < f(b)$. Wir beweisen nun die Behauptung mit Satz 2.4. Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$$d := \frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)},$$

und definiere $x_i := a + id$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = a + nd = b$, und $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ ist eine Partition von $[a,b]$ mit $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = d$. Da f monoton steigend ist, folgt

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x_i),\ m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x_{i-1}),$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(f,P)-\mathrm{U}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i \\
&= d\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = d(f(x_n)-f(x_0)) \\
&= d(f(b)-f(a)) < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Beispiel. Wir betrachten $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \phantom{\text{falls}} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

f ist monoton steigend und damit wegen Satz 2.5 R-integrierbar. Wegen Satz 1.2 ist f aber nicht integrierbar, d.h., f hat keine Stammfunktion. Es existieren also R-integrierbare Funktionen, die im Sinne von Definition 1.4 nicht integrierbar sind.

Satz 2.6 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f R-integrierbar.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit Satz 2.4. Wegen Satz 1.4 aus Kapitel 3 ist f sogar gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x' \in [a,b]$ gilt

$$|x-x'| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Wähle nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $d := \frac{b-a}{n} < \delta$ und definiere die Partition $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ durch $x_i = a + id$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt $x_0 = a, x_n = a + nd = b$ und $\Delta x_i = d < \delta$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da f stetig ist, nimmt f auf jedem $[x_{i-1}, x_i]$ wegen Satz 2.7 aus Kapitel 3 Minimum und Maximum an, d.h., es gibt $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_i'), \\
m_i &= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_i'').
\end{aligned}$$

Wegen $|x_i' - x_i''| \le |x_i - x_{i-1}| = \Delta x_i < \delta$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(f,P)-\mathrm{U}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i')-f(x_i''))d \\
&< \sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon}{b-a}\frac{b-a}{n} = \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Satz 2.7 *Sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar und gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so folgt*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Ist $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$, so gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$\sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \le \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

d.h. $\mathrm{O}(f,P) \le \mathrm{O}(g,P)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \inf\{\mathrm{O}(f,P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\} \\ &\le \inf\{\mathrm{O}(g,P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\} = \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

□

Satz 2.8 *Sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, so sind auch $f+g, cf$ $(c \in \mathbb{R}), |f|$ und fg R-integrierbar, und es gilt*

1. $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx,$
2. $\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx,$
3. $|\int_a^b f dx| \le \int_a^b |f| dx.$

Beweis.

1. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Satz 2.4 eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } \mathrm{O}(g,P) - \mathrm{U}(g,P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} M_i^f &= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad m_i^f = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \\ M_i^g &= \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad m_i^g = \inf\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) + g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \le M_i^f + M_i^g, \\ m_i &= \inf\{f(x) + g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \ge m_i^f + m_i^g. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f+g,P) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^n (M_i^f + M_i^g)\Delta x_i = \mathrm{O}(f,P) + \mathrm{O}(g,P), \\ \mathrm{U}(f+g,P) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \ge \sum_{i=1}^n (m_i^f + m_i^g)\Delta x_i = \mathrm{U}(f,P) + \mathrm{U}(g,P), \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{O}(f+g,P) - \mathrm{U}(f+g,P) \le \mathrm{O}(f,P) + \mathrm{O}(g,P) - \mathrm{U}(f,P) - \mathrm{U}(g,P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist $f+g$ R-integrierbar nach Satz 2.4. Weiterhin folgt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)dx &\leq \mathrm{O}(f+g,P) \leq \mathrm{O}(f,P)+\mathrm{O}(g,P)\\ &= \int_a^b f dx + \int_a^b g dx + \mathrm{O}(f,P) - \int_a^b f dx + \mathrm{O}(g,P) - \int_a^b g dx\\ &\leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx + \mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,O) + \mathrm{O}(g,P) - \mathrm{U}(g,P)\\ &\leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx + \epsilon,\end{aligned}$$

und analog

$$\int_a^b (f+g)dx \geq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx.$$

2. siehe Aufgabe 6.11.
3. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Satz 2.4 eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}M_i &= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\},\\ M_i' &= \sup\{|f(x)| \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i' = \inf\{|f(x)| \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}\end{aligned}$$

gilt (siehe Aufgabe 6.10)

$$\begin{aligned}M_i - m_i &= \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x_{i-1} \leq x,y \leq x_i\}\\ &\geq \sup\{||f(x)|-|f(y)|| \mid x_{i-1} \leq x,y \leq x_i\} = M_i' - m_i'.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathrm{O}(|f|,P) - \mathrm{U}(|f|,P) = \sum_{i=1}^n (M_i' - m_i')\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = \mathrm{O}(f,P) - \mathrm{U}(f,P) < \epsilon.$$

Damit ist $|f|$ R-integrierbar nach Satz 2.4.
Definiere nun $f^+ := \frac{1}{2}(|f|+f)$ und $f^- := \frac{1}{2}(|f|-f)$. Dann gilt $f^+(x) \geq 0$ und $f^-(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ sowie $|f| = f^+ + f^-$ und $f = f^+ - f^-$. Wegen 1., 2. und Satz 2.7 folgt

$$\begin{aligned}|\int_a^b f dx| &= |\int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx| \leq |\int_a^b f^+ dx| + |\int_a^b f^- dx|\\ &= \int_a^b f^+ dx + \int_a^b f^- dx = \int_a^b |f| dx.\end{aligned}$$

4. Wir zeigen zunächst, daß f^2 R-integrierbar ist. Da f beschränkt ist, ist auch $|f|$ beschränkt, und es gibt $s > 0$ mit $|f(x)| \leq s$ für alle $x \in [a,b]$. Wegen der R-Integrierbarkeit von f ist $|f|$ R-integrierbar (siehe 3.), d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{O}(|f|, P) - \mathrm{U}(|f|, P) < \frac{\epsilon}{2s}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{|f(x)| \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{|f(x)| \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i' &= \sup\{f^2(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i' = \inf\{f^2(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \end{aligned}$$

gilt $M_i^2 = M_i'$, $m_i^2 = m_i'$ sowie

$$M_i' - m_i' = M_i^2 - m_i^2 = (M_i + m_i)(M_i - m_i) \leq 2s(M_i - m_i),$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(f^2, P) - \mathrm{U}(f^2, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')\Delta x_i \leq 2s \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= 2s(\mathrm{O}(|f|, P) - \mathrm{U}(|f|, P)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f^2 R-integrierbar. Zusammen mit 1. und 2. folgt die R-Integrierbarkeit von fg wegen

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

□

Satz 2.9 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Da f stetig ist, gibt es wegen Satz 2.7 aus Kapitel 3 Elemente $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} =: M, \\ f(x_2) &= \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} =: m. \end{aligned}$$

Da $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, folgt

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

für alle $x \in [a,b]$. Wegen Satz 2.6 und Satz 2.8 ist fg R-integrierbar und mit Satz 2.7 und Satz 2.8 ergibt sich

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Gilt $\int_a^b g(x)dx = 0$, so folgt die Behauptung unmittelbar. Sei also $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, d.h. $\int_a^b g(x)dx > 0$, da $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Wegen $f(x_1) = M, f(x_2) = m$ und $x_1, x_2 \in [a,b]$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz (Satz 2.9 aus Kapitel 3) ein $c \in [a,b]$ mit

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

d.h. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

□

Bemerkung.

1. Satz 2.9 heißt Mittelwertsatz der Integralrechnung.

2. Wählt man in Satz 2.9 speziell $g = 1$, so folgt $\int_a^b g(x)dx = b - a$ (vgl. Beispiel 1 nach Definition 2.3). Damit existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

3. Die Hauptsätze

Satz 3.1 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar und besitzt f eine Stammfunktion F, so gilt für das Riemann-Integral*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir zeigen

$$-\epsilon < F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine Partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx - \mathrm{U}(f,P) < \epsilon, \quad \mathrm{O}(f,P) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon.$$

Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3 aus Kapitel 4) ein $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Mit
$$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
ergibt sich
$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le F(x_i) - F(x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}),$$
also
$$\mathrm{U}(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \le \mathrm{O}(f,P),$$
d.h.
$$\mathrm{U}(f,P) \le F(b) - F(a) \le \mathrm{O}(f,P).$$
Damit ist
$$-\epsilon < \mathrm{U}(f,P) - \int_a^b f(x)dx \le F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \le \mathrm{O}(f,P) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon.$$
□

Bemerkung. Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar und $f(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, so kann der Inhalt der Fläche, die zwischen a und b vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird, ohne Unter- und Obersummenberechnung ermittelt werden, wenn f eine Stammfunktion hat.

Satz 3.2 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar und*
$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^x f(t)dt,$$
so gilt:

1. *F ist stetig auf $[a,b]$.*
2. *Ist f stetig in $c \in [a,b]$, so ist F in c differenzierbar, und es gilt $F'(c) = f(c)$.*

Beweis.

1. Da f R-integrierbar ist, ist f beschränkt, d.h., es gibt ein $s \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \le s$ für alle $x \in [a,b]$. Wir zeigen nun, daß F in jedem $x_0 \in [a,b]$ stetig ist. Sei also $\epsilon > 0$. Dann gilt für alle $x \in [a,b], x \ge x_0$ mit $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{s}$
$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= |\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt| = |\int_{x_0}^x f(t)dt| \\ &\le \int_{x_0}^x |f(t)|dt \le s\int_{x_0}^x dt = s(x - x_0) < s\frac{\epsilon}{s} = \epsilon. \end{aligned}$$
Entsprechend folgt $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,b], x \le x_0$ mit $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{s}$.
2. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in [a,b], x_n > c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim x_n = c$. Wir zeigen
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} - f(c) \right| = 0.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f an der Stelle c gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - c| < \delta$. Wegen $\lim x_n = c$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $|x_n - c| < \delta$. Für alle $n \geq n_0$ gilt damit

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} - f(c)\right| &= \left|\frac{\int_a^{x_n} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt - f(c)(x_n - c)}{x_n - c}\right| \\
&= \left|\frac{\int_c^{x_n} f(t)dt - \int_c^{x_n} f(c)dt}{x_n - c}\right| \\
&= \frac{|\int_c^{x_n}(f(t) - f(c))dt|}{|x_n - c|} \\
&\leq \frac{\int_c^{x_n} |f(t) - f(c)|dt}{|x_n - c|}.
\end{aligned}$$

Für alle $t \in [c, x_n]$ gilt $|t - c| \leq |x_n - c| < \delta$, also $|f(t) - f(c)| < \epsilon$. Es folgt

$$\left|\frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} - f(c)\right| \leq \frac{\epsilon |x_n - c|}{|x_n - c|} \leq \epsilon.$$

Insgesamt haben wir damit $\lim_{x \to c^+} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$ gezeigt, und $\lim_{x \to c^-} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$ ergibt sich analog. Wegen Satz 2.4 aus Kapitel 3 folgt die Behauptung.

□

Korollar 3.3 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so hat f eine Stammfunktion.*

Beispiel.

1. Wir berechnen den Flächeninhalt des Einheitskreises. Aus Symmetriegründen ergibt sich dieser zu
$$4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx,$$
wobei obiges Integral als Riemann-Integral zu verstehen ist. Wir definieren
$$\begin{aligned}
f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}, \\
\bar{f} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, &\quad x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$
Da $\bar{f}$ stetig ist, existiert $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ wegen Satz 2.6. Wie man leicht nachrechnet (vgl. auch Beispiel 2 nach Satz 1.6), ist
$$F : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$$
eine Stammfunktion von f. Wegen Satz 3.1 folgt dann für alle $t \in [0,1)$
$$\int_0^t \sqrt{1 - x^2}dx = F(t) - F(0) = \frac{1}{2}(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t).$$

Wegen Satz 3.2 gilt schließlich

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \lim_{t\to 1}\int_0^t \sqrt{1-x^2}dx = \lim_{t\to 1} F(t) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Somit hat der Einheitskreis den Flächeninhalt π, und ganz allgemein hat ein Kreis mit dem Radius r den Flächeninhalt $r^2\pi$. Dabei ist π so definiert, daß 2π die Periode der Sinus- und Cosinusfunktion ist.

2. Gegeben ist die Funktion $F : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt $F'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Wir zeigen nun, daß F auch in 0 differenzierbar ist, d.h., $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-0}{x-0}$ existiert. Wegen $|\sin\frac{1}{x}| < 1$ ist für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n \in [-1,1]$ und $x_n \neq 0$ die Folge $(\sin\frac{1}{x_n})$ beschränkt. Es folgt mit Aufgabe 3.3 aus Kapitel 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Setzt man $f(x) = F'(x)$, also $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0, \end{cases}$$

so ist f nicht stetig in 0, denn wäre f stetig in 0, so wäre $0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, und wegen $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ weiterhin

$$0 = \lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - f(x)) = \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}.$$

Betrachten wir aber die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{2\pi n}$, so gilt $a_n \in [-1,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim a_n = 0$, aber $\lim\cos\frac{1}{a_n} = \lim\cos 2\pi n = 1$. Dieses Beispiel zeigt, daß auch unstetige Funktionen eine Stammfunktion besitzen können.

3. Wir betrachten die Funktion $F : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0. \end{cases}$$

Wie in Beispiel 2 zeigt man leicht, daß F differenzierbar ist. Setzt man $f(x) = F'(x)$, so gilt $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \phantom{\text{falls}} \quad x = 0. \end{cases}$$

Wir zeigen nun, daß f nicht beschränkt ist. Auf Grund von $|2x\sin\frac{1}{x^2}| \leq |2x| \leq 2$ für alle $x \in [-1,1], x \neq 0$, reicht es aus nachzuweisen, daß $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ in $(0,1]$ nicht beschränkt ist. Sei also $M > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{M^2}{2\pi}$, d.h. $\sqrt{2\pi n} > M$.

Mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \in (0,1]$ folgt

$$\frac{1}{a_n}\cos\frac{1}{a_n^2} = \sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n) = \sqrt{2\pi n} > M.$$

Als unbeschränkte Funktion ist f insbesondere nicht R-integrierbar. Dieses Beispiel zeigt, daß es Funktionen gibt, die im Sinne von Definition 1.4 integrierbar sind, nicht aber im Sinne von Definition 2.3.

4. Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f' stetig sowie (a_n) eine Nullfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\tfrac{x}{a_n}dx = 0. \tag{$*$}$$

Zunächst ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\sin\frac{x}{a_n}dx = -a_n f(x)\cos\frac{x}{a_n}\bigg|_a^b + a_n\int_a^b f'(x)\cos\frac{x}{a_n}dx.$$

Dabei existiert das zweite Integral wegen der Stetigkeit von f'. Weil f und f' auf $[a,b]$ stetig sind, existiert $M \in \mathbb{R}, M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ und $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Es folgt

$$|\int_a^b f(x)\sin\frac{x}{a_n}dx| \leq 2|a_n|M + |a_n|M(b-a).$$

Wegen $\lim a_n = 0$ folgt die Behauptung.
Wir wollen nun dieses Ergebnis verwenden, um

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \tag{$**$}$$

für alle $x \in (0,2\pi)$ zu beweisen. Dazu benötigen wir folgende Hilfsbehauptung : Für alle $t \in (0,2\pi)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}.$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n.
$n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}\cos kt = \cos 0t = 1 = \frac{\sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}.$$

$n \to n+1$: Wegen

$$\sin(n+\frac{1}{2})t = \sin(n+1-\frac{1}{2})t = \sin(n+1)t\cos\frac{1}{2}t - \cos(n+1)t\sin\frac{1}{2}t$$

gilt

$$\begin{aligned}\sin((n+1)+\frac{1}{2})t &= \sin(n+1)t\cos\frac{1}{2}t+\cos(n+1)t\sin\frac{1}{2}t\\ &= \sin(n+\frac{1}{2})t+2\cos(n+1)t\sin\frac{1}{2}t,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\sin((n+1)+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}+\cos(n+1)t.$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}=\sum_{k=0}^{n}\cos kt,$$

und damit folgt die Hilfsbehauptung.
Wir zeigen nun $(**)$. Aus

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{2}$$

folgt durch Integration auf beiden Seiten wegen $\int_\pi^x \cos kt dt=\frac{\sin kx}{k}$ für $k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_\pi^x\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt-\frac{1}{2}(x-\pi)$$

für alle $x\in(0,2\pi)$. Setzt man $a_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ und $f(x)=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}$, so ergibt sich wegen $(*)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$$

für alle $x\in(0,2\pi)$. Speziell folgt für $x=\frac{\pi}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k}=\frac{\pi}{4},$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \sum_{v=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2v+1)\pi}{2}}{2v+1}=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\sin(v\pi+\frac{\pi}{2})}{2v+1}\\ &= \sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{2v+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm\dots\end{aligned}$$

Diese unendliche Reihe als Darstellung von $\frac{\pi}{4}$ heißt Leibniz'sche Reihe.

4. Uneigentliche Integrale

Definition 4.1 *1. Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so hat (a_n) den Grenzwert ∞, geschrieben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim a_n = \infty$, wenn es zu jedem $k > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a_n > k$ für alle $n \geq n_0$ gilt.*

2. Ist $g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt $c \in \mathbb{R}$ Grenzwert von g für $x \to \infty$, geschrieben $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in [a, \infty)$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} g(a_n) = c.$$

Bemerkung.

1. Entsprechend definiert man $\lim a_n = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

2. Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim a_n = \infty$ genau dann, wenn $\lim \frac{1}{a_n} = 0$. Entsprechendes gilt für $\lim a_n = -\infty$.

3. Ist $a > 0$, so existiert $\lim_{x\to\infty} g(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 0^+} g(\frac{1}{x})$ existiert, und in diesem Falle ist
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(\frac{1}{x}).$$
Entsprechendes gilt für $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to 0^-} g(\frac{1}{x})$.

Definition 4.2 *Die Funktion $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei R-integrierbar auf $[a, t]$ für alle $t > a$. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

so heißt f auf $[a, \infty)$ uneigentlich integrierbar und der Grenzwert uneigentliches Integral, geschrieben

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Bemerkung. Entsprechend definiert man die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx$$

für $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, und

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)dx + \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx$$

für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Im letzten Fall müssen die beiden einzelnen Grenzwerte existieren.

Beispiel.

1. Wir untersuchen
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx \text{ für } k \in \mathbb{R}.$$
1. Fall: $k > 1$. Dann gilt für alle $t \in (1, \infty)$
$$\int_1^t \frac{1}{x^k}dx = \int_1^t x^{-k}dx = \frac{1}{1-k}x^{1-k}\Big|_1^t = \frac{1}{1-k}(t^{1-k} - 1).$$
Wegen $k > 1$ gilt $1 - k < 0$, d.h. $\lim_{t\to\infty} t^{1-k} = \lim_{t\to\infty} e^{(1-k)\ln t} = 0$. Damit folgt
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{k-1} \text{ für } k > 1.$$
2. Fall: $k = 1$. Dann gilt für alle $t \in (1, \infty)$
$$\int_1^t \frac{1}{x^k}dx = \int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t.$$
Damit existiert $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^k}dx$ nicht.
3. Fall: $k < 1$. Dann gilt für alle $t \in (1, \infty)$
$$\int_1^t \frac{1}{x^k}dx = \frac{1}{1-k}(t^{1-k} - 1),$$
und wegen $k < 1$ ist $1 - k > 0$, d.h., $\lim_{t\to\infty} t^{1-k}$ existiert nicht. Somit existiert auch $\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^k}dx$ nicht.

2. Um $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ zu berechnen, betrachten wir zunächst $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. Wegen
$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_0^t = \arctan t$$
folgt $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$. Entsprechend gilt $\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, d.h.
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

Satz 4.3 *Sind die Funktionen $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Teilintervall $[a, t]$ mit $t > a$ R-integrierbar, so gilt:*

1. *Existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$, so auch $\int_a^\infty f(x)dx$.*
2. *Gilt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ und ist g uneigentlich integrierbar, so ist auch f uneigentlich integrierbar, und es gilt*
$$|\int_a^\infty f(x)dx| \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$
3. *Gilt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ und existiert $\int_a^\infty g(x)dx$ nicht, so existiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$ nicht.*

Beweis. Wir zeigen zunächst 2., und 1. folgt dann aus 2. mit $g(x) = |f(x)|$. Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge mit $x_n \in [a, \infty)$ und $\lim x_n = \infty$ sowie $a_n = \int_a^{x_n} f(x)dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um 2. zu beweisen, reicht es aus nachzuweisen, daß (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei also $\epsilon > 0$. Da (b_n) mit $b_n = \int_a^{x_n} g(x)dx$ konvergiert, ist (b_n) eine Cauchy-Folge, und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Daraus ergibt sich für alle $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx| \leq \int_{x_m}^{x_n} |f(x)|dx \leq \int_{x_m}^{x_n} g(x)dx = |b_n - b_m| < \epsilon.$$

Dabei wurde $x_n \geq x_m$ angenommen. Anderenfalls sind x_n und x_m zu vertauschen. Damit ist (a_n) eine Cauchy-Folge, und wegen $|\int_a^t f(x)dx| \leq \int_a^t |f(x)|dx \leq \int_a^t g(x)dx$ für alle $t \in (a, \infty)$ ergibt sich

$$|\int_a^\infty f(x)dx| \leq \int_a^\infty g(x)dx.$$

3. Siehe Aufgabe 6.18.

□

Bemerkung. Existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$, so heißt f auf $[a, \infty)$ absolut uneigentlich integrierbar.

Beispiel.

1. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ existiert, da $|\frac{\cos x}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in [0, \infty)$, und $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ existiert. Ohne Beweis sei erwähnt, daß

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

2. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ existiert, da $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ gilt, und $\int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e}$. Ohne Beweis sei erwähnt, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Uneigentliche Integrale sind manchmal nützliche Hilfsmittel, um die Konvergenz bzw. Divergenz unendlicher Reihen nachzuweisen. Dazu der folgende

Satz 4.4 *Ist $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend, dann gilt*

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_1^\infty f(x)dx \text{ existiert.}$$

Beweis. Wir definieren zunächst die beiden Treppenfunktionen $g, h : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(x) &= f(k) && \text{falls } x \in [k, k+1) \text{ und } k \in \mathbb{N}, \\ h(x) &= f(k+1) && \text{falls } x \in [k, k+1) \text{ und } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da f monoton fallend ist, gilt $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [1, \infty)$. Wegen

$$\int_{k-1}^k h(x)dx = \int_{k-1}^k f(k)dx = f(k)$$

und

$$\int_k^{k+1} g(x)dx = \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$$

gilt

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = \int_1^n h(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^n g(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Existiert also $\int_1^\infty f(x)dx$, dann ist die Folge $(\sum_{k=1}^n f(k))$ monoton steigend und nach oben beschränkt, d.h., $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert.
Sei nun andererseits $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergent und (x_n) eine monoton steigende Folge mit $x_n \in [1, \infty)$ und $\lim x_n = \infty$. Dann ist $(\int_1^{x_n} f(x)dx)$ eine monoton steigende Folge, die durch $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ nach oben beschränkt ist, d.h., $(\int_1^{x_n} f(x)dx)$ konvergiert. Wegen Aufgabe 6.19 existiert somit auch $\int_1^\infty f(x)dx$.

□

Beispiel. Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$? Ist $s \leq 0$, so gilt $\frac{1}{n^s} = n^{-s} = e^{-s \ln n} \geq 1$, d.h., $(\frac{1}{n^s})$ ist keine Nullfolge. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ nicht. Sei also $s > 0$ und

$$f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x^s}.$$

Wegen $\frac{1}{x^s} = x^{-s} = e^{-s \ln x}$ und $s > 0$ ist f monoton fallend. Mit Satz 4.4 ergibt sich

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx \text{ existiert.}$$

Wegen Beispiel 1 nach Definition 4.1 gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx \text{ existiert} \iff s > 1,$$

also

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1.$$

Definition 4.5 *Ist die Funktion $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar auf jedem Teilintervall $[a, t]$ mit $a < t < b$ und existiert $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$, so heißt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, und man schreibt*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Bemerkung.

1. Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, so ist $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \int_a^t f(x)dx$ wegen Satz 3.2 stetig, und damit gilt

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Entsprechend definiert man $\int_a^b f(x)dx$ für $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Für $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, wenn $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ mit $c\in(a,b)$ existieren. Im Falle der Existenz der beiden einzelnen Integrale setzt man $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. Dabei ist $\int_a^b f(x)dx$ unabhängig von der Wahl von $c\in(a,b)$.
3. Entsprechend definiert man die Integrale $\int_a^\infty f(x)dx$ für $f:(a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ für $f:(-\infty,a)\longrightarrow\mathbb{R}$ und $\int_a^b f(x)dx$ für $f:(a,c)\cup(c,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $a<c<b$ usw.
4. Satz 4.3 gilt entsprechend für die oben eingeführten Integrale.

Beispiel.

1. Wir untersuchen das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$, $k\in\mathbb{R}$. Für $k>1$ und $t\in(0,1)$ gilt
$$\int_t^1 \frac{1}{x^k}dx=\frac{1}{1-k}x^{1-k}\bigg|_t^1=\frac{1}{1-k}(1-t^{1-k}).$$
Wegen $t^{1-k}=e^{(1-k)\ln t}$ und $1-k<0$ existiert $\lim_{t\to0^+}\int_t^1\frac{1}{x^k}dx$ nicht.
Für $k=1$ und $t\in(0,1)$ gilt
$$\int_t^1 \frac{1}{x^k}dx=\ln x|_t^1=-\ln t,$$
d.h., $\lim_{t\to0^+}\int_t^1\frac{1}{x^k}dx$ existiert nicht.
Für $k<1$ und $t\in(0,1)$ gilt
$$\int_t^1 \frac{1}{x^k}dx=\frac{1}{1-k}(1-t^{1-k}).$$
Wegen $t^{1-k}=e^{(1-k)\ln t}$ und $1-k>0$ existiert $\lim_{t\to0^+}\int_t^1\frac{1}{x^k}dx$, und es gilt
$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx=\frac{1}{1-k}.$$
2. Wegen Beispiel 1 und Beispiel 1 nach Definition 4.2 existiert $\int_0^\infty\frac{1}{x^k}dx$ für kein $k\in\mathbb{R}$.
3. Wir untersuchen das Integral $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Für alle $t\in[0,1)$ gilt
$$\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x|_0^t=\arcsin t.$$
Also gilt
$$\lim_{t\to1^-}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{t\to1^-}\arcsin t=\frac{\pi}{2},$$
d.h. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$. Entsprechend ergibt sich $\int_{-1}^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$, also
$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi.$$

5. Die Bogenlänge

Im folgenden ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a < b$. Ist $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$, so heißt

$$\mathrm{V}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Variation von f bezüglich P.

Definition 5.1 *Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn die Menge*

$$\{\mathrm{V}(f, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a, b]\}$$

nach oben beschränkt ist. Ist f von beschränkter Variation, so heißt

$$\mathrm{V}(f) := \sup\{\mathrm{V}(f, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a, b]\}$$

Variation von f.

Beispiel.

1. Ist f monoton, so ist f von beschränkter Variation. Um das zu beweisen, sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$. Ist f monoton steigend, so gilt

$$\mathrm{V}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

   Damit ist $\mathrm{V}(f, P)$ unabhängig von der speziell gewählten Partition P, d.h., f ist von beschränkter Variation mit $\mathrm{V}(f) = f(b) - f(a)$. Ist f monoton fallend, so folgt analog, daß f von beschränkter Variation ist und $\mathrm{V}(f) = f(a) - f(b)$.

2. Gibt es ein $M \in \mathbb{R}^+$, so daß

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

   für alle $x, y \in [a, b]$ gilt, so ist f von beschränkter Variation und $\mathrm{V}(f) \leq M(b - a)$, denn ist $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$, so gilt

$$\mathrm{V}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} M|x_i - x_{i-1}| = M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = M(b - a).$$

   Damit ist $M(b-a)$ eine obere Schranke von $\{\mathrm{V}(f, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a, b]\}$, d.h., f ist von beschränkter Variation und $\mathrm{V}(f) \leq M(b - a)$.

Satz 5.2 *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f' stetig, so ist f von beschränkter Variation.*

Beweis. Da f' stetig ist, ist f wegen Satz 2.7 aus Kapitel 3 beschränkt, d.h., es gibt ein $M > 0$, so daß $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Sind nun $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$, so gibt es wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3 aus Kapitel 4) ein $c \in (x,y)$ mit

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y|.$$

Wegen Beispiel 2 nach Definition 5.1 ist f von beschränkter Variation.

$\square$

Definition 5.3 *Eine Abbildung*

$$\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (f(t), g(t))$$

heißt parametrisierter Weg, wenn die Funktionen $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Die Bildmenge $\Gamma([a,b])$ heißt Spur von Γ und $\Gamma(a)$ Anfangspunkt sowie $\Gamma(b)$ Endpunkt von Γ.

Bemerkung. Entsprechend definiert man parametrisierte Wege $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ im $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.4 *Sind $[a,b]$ und $[a',b']$ zwei Intervalle, so heißt eine surjektive Abbildung $\tau : [a',b'] \longrightarrow [a,b]$ Parametertransformation, wenn sie stetig und streng monoton steigend ist.*

Bemerkung. Ist $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (f(t), g(t))$ ein parametrisierter Weg und die Abbildung $\tau : [a',b'] \longrightarrow [a,b]$ eine Parametertransformation, so ist

$$\Gamma \circ \tau : [a',b'] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (f(\tau(t)), g(\tau(t)))$$

ebenfalls ein parametrisierter Weg. Dabei haben Γ und $\Gamma \circ \tau$ dieselbe Spur. Zwei parametrisierte Wege, die wie eben beschrieben durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen, heißen stark äquivalent. Jede Parametertransformation ist umkehrbar, da sie surjektiv und streng monoton ist.
Ist $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (f(t), g(t))$ ein parametrisierter Weg und $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$, so definiert man

$$\mathrm{l}(\Gamma, P) := \sum_{i=1}^{n} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})||.$$

Dabei ist $||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})||$ der euklidische Abstand der Punkte $\Gamma(t_i)$ und $\Gamma(t_{i-1})$ (vgl. Aufgabe 6.31), also

$$\begin{aligned} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| &= ||(f(t_i), g(t_i)) - (f(t_{i-1}), g(t_{i-1}))|| \\ &= ||(f(t_i) - f(t_{i-1}), g(t_i) - g(t_{i-1}))|| \\ &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}. \end{aligned}$$

Ist P' ebenfalls eine Partition von $[a,b]$, die feiner als P ist, also $P \subseteq P'$, so gilt $\mathrm{l}(\Gamma, P) \leq \mathrm{l}(\Gamma, P')$. Um das einzusehen, sei zunächst $P' = \{t_0, \ldots, t_j, t, t_{j+1}, \ldots, t_n\}$. Dann folgt mit Aufgabe 6.31

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(\Gamma, P) &= \sum_{i=1}^{j} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| + ||\Gamma(t_{j+1}) - \Gamma(t_j)|| + \sum_{i=j+2}^{n} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| + ||\Gamma(t) - \Gamma(t_j)|| + ||\Gamma(t_{j+1}) - \Gamma(t)|| + \sum_{i=j+2}^{n} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| \\
&= \mathrm{l}(\Gamma, P').
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhält man $\mathrm{l}(\Gamma, P) \leq \mathrm{l}(\Gamma, P')$ für den allgemeinen Fall $P \subseteq P'$ und $|P'| - |P| = n < \infty$.

Definition 5.5 *Ein parametrisierter Weg Γ heißt rektifizierbar, wenn die Menge*

$$\{\mathrm{l}(\Gamma, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a,b]\}$$

beschränkt ist. Ist Γ rektifizierbar, so heißt

$$\mathrm{l}(\Gamma) = \sup\{\mathrm{l}(\Gamma, P) \mid P \textit{ ist eine Partition von } [a,b]\}$$

Länge oder Bogenlänge von Γ.

Bemerkung. Ist $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein parametrisierter Weg und $\tau : [a', b'] \longrightarrow [a,b]$ eine Parametertransformation, so ist Γ genau dann rektifizierbar, wenn $\Gamma \circ \tau$ rektifizierbar ist. Da τ umkehrbar ist, reicht es aus, eine Richtung zu zeigen. Sei also $\Gamma \circ \tau$ rektifizierbar. Um zu beweisen, daß Γ rektifizierbar ist, reicht es aus zu zeigen, daß es zu jeder Partition P von $[a,b]$ eine Partition P' von $[a', b']$ mit $\mathrm{l}(\Gamma, P) = \mathrm{l}(\Gamma \circ \tau, P')$ gibt, denn dann ist $\{\mathrm{l}(\Gamma, P) \mid P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\}$ nach oben durch $\mathrm{l}(\Gamma \circ \tau)$ beschränkt. Sei also $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$. Da τ surjektiv ist, gibt es $t'_0, \ldots, t'_n \in [a', b']$ mit $\tau(t'_i) = t_i$ für $i = 0, \ldots, n$, und da τ streng monoton steigend ist, folgt $t'_0 \leq \ldots \leq t'_n$ sowie $t'_0 = a'$ und $t'_n = b'$. Somit ist $P' = \{t'_0, \ldots, t'_n\}$ eine Partition von $[a', b']$, und es folgt

$$\mathrm{l}(\Gamma, P) \;=\; \sum_{i=1}^{n} ||\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{n} ||\Gamma(\tau(t'_i)) - \Gamma(\tau(t'_{i-1}))|| = \mathrm{l}(\Gamma \circ \tau, P').$$

Satz 5.6 *Ein parametrisierter Weg $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (f(t), g(t))$ ist genau dann rektifizierbar, wenn f und g von beschränkter Variation sind.*

Beweis. Sei $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ und $\Delta f_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$, $\Delta g_i = g(t_i) - g(t_{i-1})$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist Γ rektifizierbar, so gilt

$$\mathrm{V}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} = \mathrm{l}(\Gamma, P) \leq \mathrm{l}(\Gamma)$$

und entsprechend $\mathrm{V}(g, P) \leq \mathrm{l}(\Gamma)$, d.h., f und g sind von beschränkter Variation. Sind andererseits f und g von beschränkter Variation, so gilt

$$\mathrm{l}(\Gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} (|\Delta f_i| + |\Delta g_i|) = \mathrm{V}(f, P) + \mathrm{V}(g, P) \leq \mathrm{V}(f) + \mathrm{V}(g),$$

d.h., Γ ist rektifizierbar.

$\square$

Definition 5.7 *Eine Funktion $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn h differenzierbar und h' stetig ist. Ein parametrisierter Weg*

$$\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto (f(t), g(t))$$

heißt stetig differenzierbar, wenn f und g stetig differenzierbar sind.

Bemerkung. Wegen Satz 5.2 und Satz 5.6 ist jeder stetig differenzierbare parametrisierte Weg rektifizierbar.

Satz 5.8 *Ist $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (f(t), g(t))$ ein stetig differenzierbarer parametrisierter Weg, dann gilt*

$$\mathrm{l}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

und zeigen

$$|\mathrm{l}(\Gamma) - \int_a^b h(t)dt| < \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$, d.h. $\mathrm{l}(\Gamma) = \int_a^b h(t)dt$. Dabei existiert $\mathrm{l}(\Gamma)$ wegen der Bemerkung nach Definition 5.7, und $\int_a^b h(t)dt$ existiert, da h stetig ist. Zunächst gibt es eine Partition P_1 von $[a, b]$ mit

$$|\mathrm{l}(\Gamma) - \mathrm{l}(\Gamma, P_1)| < \frac{\epsilon}{3}$$

und eine Partition P_2 von $[a, b]$ mit

$$|\mathrm{O}(h, P_2) - \int_a^b h(t)dt| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Wir können sogar $P := P_1 = P_2$ annehmen, da wir sonst zu einer gemeinsamen Verfeinerung P von P_1 und P_2 übergehen können. Sei $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ und

$$\mathrm{O}(h, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta t_i$$

mit $M_i = \sup\{h(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ und $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Da h stetig ist, gilt $M_i = h(c_i)$ für ein $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, also

$$\mathrm{O}(h, P) = \sum_{i=1}^{n} h(c_i)\Delta t_i.$$

Wegen Satz 1.4 aus Kapitel 3 sind f' und g' auf $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig, d.h., es gibt ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\epsilon}{6(b-a)} \text{ und } |g'(x) - g'(y)| < \frac{\epsilon}{6(b-a)}.$$

Wir können nun weiterhin annehmen, daß $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, denn anderenfalls wählen wir eine geeignete Verfeinerung von P. Zu zeigen bleibt

$$|\mathrm{l}(\Gamma, P) - \mathrm{O}(h, P)| < \frac{\epsilon}{3},$$

denn dann folgt

$$\begin{aligned} |\mathrm{l}(\Gamma) - \int_a^b h(t)dt| &= |\mathrm{l}(\Gamma) - \mathrm{l}(\Gamma, P) + \mathrm{l}(\Gamma, P) - \mathrm{O}(h, P) + \mathrm{O}(h, P) - \int_a^b h(t)dt| \\ &\leq |\mathrm{l}(\Gamma) - \mathrm{l}(\Gamma, P)| + |\mathrm{l}(\Gamma, P) - \mathrm{O}(h, P)| + |\mathrm{O}(h, P) - \int_a^b h(t)dt| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3 aus Kapitel 4) gibt es $u_i, v_i \in [t_{i-1}, t_i]$ mit $\Delta f_i := f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(u_i)\Delta t_i$ und $\Delta g_i := g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(v_i)\Delta t_i$ für $i = 1, \dots, n$. Es folgt

$$\mathrm{l}(\Gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta f_i^2 + \Delta g_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(u_i)^2 + g'(v_i)^2}\Delta t_i.$$

Wegen

$$\mathrm{O}(h, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(c_i)^2}\Delta t_i$$

ergibt sich

$$|\mathrm{l}(\Gamma, P) - \mathrm{O}(h, P)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\sqrt{f'(u_i)^2 + g'(v_i)^2} - \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(c_i)^2}|\Delta t_i$$

mit $u_i, v_i, c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} |\sqrt{f'(u_i)^2 + g'(v_i)^2} - \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(c_i)^2}| &= |\,||(f'(u_i), g'(v_i))|| - ||(f'(c_i), g'(c_i))||\,| \\ &\leq ||(f'(u_i) - f'(c_i), g'(v_i) - g'(c_i))|| \\ &= \sqrt{(f'(u_i) - f'(c_i))^2 + (g'(v_i) - g'(c_i))^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{6(b-a)}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{6(b-a)}\right)^2} \\ &\leq 2\frac{\epsilon}{6(b-a)} = \frac{\epsilon}{3(b-a)}, \end{aligned}$$

da $|u_i - c_i| < \delta$ und $|v_i - c_i| < \delta$. Dabei ist $\|\ \|$ die euklidische Norm (vgl. Aufgabe 6.31). Somit folgt

$$|\mathrm{l}(\Gamma, P) - \mathrm{O}(h, P)| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{3(b-a)} \Delta t_i = \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{3}.$$

□

Bemerkung. Satz 5.8 gilt analog für stetig differenzierbare parametrisierte Wege im $\mathbb{R}^n$. Dabei ist der Begriff der Länge oder Bogenlänge entsprechend zu definieren. Ist also

$$\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

ein stetig differenzierbarer parametrisierter Weg im $\mathbb{R}^n$, d.h., sind $x_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar für $i = 1, \ldots, n$, dann gilt

$$\mathrm{l}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \ldots + x_n'(t)^2}dt.$$

Beispiel. Wir betrachten den parametrisierten Weg

$$\Gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, \sqrt{1-t^2}).$$

Offenbar ist die Spur von Γ der obere Bogen des Einheitskreises. Sei nun $P(x, y)$ ein Punkt auf Γ, d.h., es gibt ein $t \in [-1, 1]$ mit $x = t$ und $y = \sqrt{1-t^2}$, also $y = \sqrt{1-x^2}$. Wir berechnen die Länge des Kreisbogens zwischen $P(x, y)$ und $E(1, 0)$. Mit Satz 5.8 ergibt sich diese zu $\arccos x$, da

$$\int_x^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\arccos|_x^1 = \arccos x.$$

Für $x = -1$ erhalten wir mit $\arccos(-1) = \pi$ die Länge des oberen Bogens des Einheitskreises, d.h., der Einheitskreis hat den Umfang 2π. Allgemein ergibt sich der Umfang eines Kreises mit dem Radius r zu $2\pi r$. Definiert man nun die Größe α des Winkels $\sphericalangle POE$ als Länge des Kreisbogens zwischen P und E (wobei O der Ursprung ist), so folgt

$$\cos\alpha = x \text{ und } \sin\alpha = y.$$

Damit ist gezeigt, daß die Sinus- und die Cosinusfunktion mit der elementargeometrischen Sinus- und Cosinusfunktion übereinstimmen, wenn der Winkel im Bogenmaß gegeben ist.

6. Aufgaben

A 6.1 Sei I ein Intervall und $a, b \in I$ mit $a < b$. Zeigen Sie: Sind $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so gilt

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

A 6.2 Sei I ein Intervall und $a, b \in I$ mit $a < b$ sowie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\mid f \mid: I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie

$$\mid \int_a^b f dx \mid \leq \int_a^b \mid f \mid dx.$$

Geben Sie ein Beispiel an, in dem $\mid f \mid$ integrierbar ist, f aber nicht.

A 6.3 Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $a, b \in I$ mit $a < b$. Zeigen Sie, daß es ein $c \in (a, b)$ gibt mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

A 6.4 Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x \cos x dx, \quad \text{b)} \int_0^1 x(1 + x^2)^n dx, \ n \in \mathbb{N}, \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx,$$

$$\text{d)} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \tan x dx, \quad \text{e)} \int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{1}{\sin x \cos x} dx, \quad \text{f)} \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1 - x^2} dx.$$

A 6.5 Berechnen Sie

1. eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{a)} \ f(x) = x^2 \sin x, \quad \text{b)} \ f(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}.$$

2. Stammfunktionen von

$$\text{a)} \ e^x \sin x, \quad \text{b)} \ e^x \cos x, \quad \text{c)} \ xe^x \sin x.$$

3. für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx.$$

A 6.6 Zeigen Sie, daß die Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar ist, wobei gilt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = 0 \text{ oder } x = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls} \quad x = \frac{p}{q} \neq 1 \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

A 6.7 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Berechnen Sie $\mathrm{O}(f, P_n)$ und $\mathrm{U}(f, P_n)$ für

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Ermitteln Sie weiterhin

$$\int_0^{1*} f(x)\ dx \quad \text{und} \quad \int_{0*}^{1} f(x)\ dx.$$

Zeigen Sie, daß f R-integrierbar ist. Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

A 6.8 Zeigen Sie, daß $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad x = 0 \end{cases}$$

R-integrierbar ist.

A 6.9 Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, so ist f auf jedem Teilintervall $[a,c]$ und $[c,b]$ R-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

A 6.10 Gegeben ist die beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$M - m = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid a \leq x, y \leq b\},$$

wobei $M = \sup\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$ und $m = \inf\{|f(x)| \mid a \leq x \leq b\}$.

A 6.11 Zeigen Sie: Ist die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar, dann auch die Funktion $c \cdot f$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

A 6.12 Gegeben sind die beiden Funktionen $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß sich f und g an nur endlich vielen Stellen unterscheiden. Zeigen Sie, daß g genau dann R-integrierbar ist, wenn f R-integrierbar ist, und daß in diesem Falle

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

gilt.

A 6.13 Erklären Sie die Methode der Partialbruchzerlegung gebrochen rationaler Funktionen und führen Sie die Partialbruchzerlegung speziell an folgenden Beispielen durch:

$$\text{a)}\ \frac{x^2-2x-2}{x^3-1},\quad \text{b)}\ \frac{x^3-x^2-x-1}{(x^2+1)(x-1)^2},\quad \text{c)}\ \frac{x^4+x^3+1}{(x-2)(x^2+1)^2},\quad \text{d)}\ \frac{x^2-4x-9}{(x^2-1)(x+2)}.$$

A 6.14 Berechnen Sie

$$\int \frac{5\sin x\cos x}{\sin x-\cos^2 x-5}dx.$$

A 6.15 Berechnen Sie den Inhalt der Fäche, die von den Graphen der Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto x^2,\\ f_2 &: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto x^2+2x+2,\\ f_3 &: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto x^2-2x+2 \end{aligned}$$

berandet ist.

A 6.16 Zeigen Sie, daß die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie ihren Wert:

$$\text{a)}\ \int_0^\infty x^2e^{-x}dx,\quad \text{b)}\ \int_0^\infty e^{-x}\cos x dx,\quad \text{c)}\ \int_3^\infty \frac{\ln(x^2-4)}{x^2}dx.$$

A 6.17 Welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren?

$$\text{a)}\ \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2}\,dx,\quad \text{b)}\ \int_1^\infty \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx,\quad \text{c)}\ \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x\sqrt{x}}\,dx,\quad \text{d)}\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}.$$

A 6.18 Gegeben sind die Funktionen $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ und $g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, die R-integrierbar auf jedem Teilintervall $[a,t]$ mit $t>a$ sind. Zeigen Sie: Gilt $0\le g(x)\le f(x)$ für alle $x\in[a,\infty)$ und existiert $\int_a^\infty g(x)dx$ nicht, so existiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$ nicht.

A 6.19 Gegeben ist die Funktion $g:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, so daß für jede monoton steigende Folge (a_n) mit $a_n\in[a,\infty)$ und $\lim a_n=\infty$ der Grenzwert $\lim g(a_n)$ existiert. Zeigen Sie, daß es ein $c\in\mathbb{R}$ gibt, so daß für jede Folge (a_n) mit $a_n\in[a,\infty)$ und $\lim a_n=\infty$ gilt $\lim g(a_n)=c$.

A 6.20 Zeigen Sie, daß für alle $x\in\mathbb{R}, x>0$ das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

existiert. Zeigen Sie weiterhin

$$\Gamma(n+1)=n!\ \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)\ \text{ für alle } x\in\mathbb{R}^+.$$

Die Funktion

$$\Gamma:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\Gamma(x)$$

heißt Gammafunktion (Gaußsche Definition).

A 6.21 Zeigen Sie, daß der Grenzwert

$$C := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

existiert. Die Zahl C heißt Euler-Mascheronische Konstante.

A 6.22 Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

für alle $x, y > 0$ existiert. Die Funktion

$$\mathrm{B}: \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x,y) \longmapsto \mathrm{B}(x,y)$$

heißt Eulersche Beta-Funktion.

A 6.23 Zeigen Sie, daß die folgenden Integrale existieren:

$$\text{a)} \ \int_{-1}^{1} \ln \mid x \mid dx, \quad \text{b)} \ \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx, \quad \text{c)} \ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}dx.$$

A 6.24 Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad \text{b)} \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}, \ k \in \mathbb{N}.$$

A 6.25 Berechnen Sie

$$\text{a)} \ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-6x+8}{(x^2+2x+5)(x^2-4x+13)}dx, \quad \text{b)} \ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-x^2+10x-30}{(x^2-4x+20)(x^2+2x+10)}dx.$$

A 6.26 Zeigen Sie, daß die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

nicht von beschränkter Variation ist.

A 6.27 Zeigen Sie:

1. Ist die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist f beschränkt.
2. Sind die Funktionen $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist auch $f + g$ von beschränkter Variation.

A 6.28 Gegeben sind $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}, s > 0$, so daß $f(x) \geq s$ für alle $x \in [a,b]$ gilt. Zeigen Sie: Ist f von beschränkter Variation, dann ist auch $\frac{1}{f}$ von beschränkter Variation.

A 6.29 Gegeben ist der stetig differenzierbare parametrisierte Weg

$$\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (f(t), g(t))$$

und die stetig differenzierbare Parametertransformation $\tau : [a', b'] \longrightarrow [a,b]$. Zeigen Sie mit Hilfe der Formel aus Satz 5.8, daß Γ und $\Gamma \circ \tau$ dieselbe Bogenlänge haben.

A 6.30 Skizzieren Sie die Spur von

$$\Gamma : [0,1] \longrightarrow (t^2 + 1, \frac{t^3}{3} - t + 1)$$

und berechnen Sie die Bogenlänge.

A 6.31 Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\| \quad \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

eine Norm ist, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\| x \| \geq 0$, und $\| x \| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = (0, \ldots, 0)$.
2. $\| a \cdot x \| = | a | \cdot \| x \|$.
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Zeigen Sie weiterhin, daß $| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Index