

Elementargeometrie

Vorlesung von Prof. Dr. C. Bär
Universität Potsdam

11. April 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Ebene euklidische Geometrie	1
1.1 Axiomatische euklidische Geometrie	1
1.2 Das kartesische Modell	15
1.3 Dreiecke	24
1.4 Strahlensätze und Verwandte	31
1.5 Kreise	40
1.6 Ähnlichkeitstransformationen	58
1.7 Kurven zweiten Grades	68
2 Metrische Räume	89
2.1 Isometrien	89
2.2 Ähnlichkeitstransformationen	95
2.3 Symmetrien	96
2.4 Das Hausdorff-Maß	99
3 Sphärische Geometrie	125
3.1 Sphärische Trigonometrie	125
3.2 $SO(3)$	137
3.3 Sphärischer Flächeninhalt	141
3.4 Kartographie	149
3.5 Exkurs: Polytope	164
4 Hyperbolische Geometrie	177

4.1	Minkowski-Geometrie	177
4.2	Hyperbolische Trigonometrie	188
4.3	Hyperbolischer Flächeninhalt	206
4.4	Modelle der hyperbolischen Geometrie	208
4.5	Exkurs: Kegelschnitte	225
5	Kurventheorie	233
5.1	Kurven im \mathbf{R}^n	233
5.2	Ebene Kurven	246
5.3	Der Umlaufsatz	249
5.4	Der Vierscheitelsatz	257
5.5	Isoperimetrische Ungleichung	266
5.6	Krümmung von Raumkurven	270
6	Knotentheorie	283
6.1	Grundlegende Definitionen	283
6.2	Die Reidemeister-Bewegungen	291
6.3	Die Verschlingungszahl	292
6.4	Das Kauffman-Polynom	297
6.5	Das Jones-Polynom	309
6.6	Totalkrümmung von Knoten	316

Kapitel 1

Ebene euklidische Geometrie

1.1 Axiomatische euklidische Geometrie

Die Geometrie gehört zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Bemerkenswertes geometrisches Wissen finden wir bereits in den orientalischen Hochkulturen des 5.–3. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung. Praktische Probleme aus der Messkunde, der Baukunst, der Astronomie und der Navigation wurden abstrahiert und führten zu geometrischen Regeln. So verwendeten die Ägypter z. B. die Formel für die Dreiecksfläche

$$\text{Fläche} = \frac{\text{Länge der Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

und die Näherungsformel für die Kreisfläche

$$\text{Fläche} = \left(\text{Durchmesser} - \frac{\text{Durchmesser}}{9} \right)^2.$$

Letzteres entspricht einer Approximation von π durch $\frac{256}{81} \approx 3.1605$. Zwischen exakt gültigen und Näherungsformeln wurde kein prinzipieller Unterschied gemacht. Das gesamte mathematische Wissen lag in Form von Regeln vor, Begründungen oder Beweise wurden nicht gegeben.

Dies änderte sich in Griechenland in der Zeit zwischen 350 und 200 vor unserer Zeitrechnung. Reine Nützlichkeitsaspekte wurden durch die Suche nach Verständnis in den Hintergrund gedrängt. Man wollte nicht nur wissen, dass, sondern auch verstehen, warum bestimmte mathematische Regeln gültig sind. Dies war der Ausgangspunkt für den axiomatischen Aufbau der Geometrie. Zunächst wurden einige intuitiv unmittelbar einsichtige Axiome aufgestellt, aus denen dann alles weitere streng logisch abgeleitet werden sollte. Wir werden im Folgenden die euklidischen Axiome der ebenen Geometrie kennenlernen und einige einfachere Folgerungen als Demonstration der axiomatischen Beweismethode behandeln.

Besonders wichtig für ein Axiomensystem ist einerseits, dass es keine redundanten Informationen enthält, d.h. keine Axiome beinhaltet, die eigentlich nur Folgerungen aus anderen Axiomen sind; andererseits aber auch keine Axiome festlegt, die den anderen

logisch widersprechen, es muss also widerspruchsfrei sein. Wir werden im Wesentlichen der Formulierung der Axiome folgen, die von Hilbert in [5] vorgestellt wurde.

Die Axiome unterteilen sich in fünf Gruppen. Wir beginnen mit den Inzidenzaxiomen. Um sie zu formulieren, benötigen wir zwei Mengen \mathcal{P} und \mathcal{G} , deren Elemente wir Punkte bzw. Geraden nennen. Ferner sei für jeden Punkt $p \in \mathcal{P}$ und jede Gerade $L \in \mathcal{G}$ die Aussage „ p ist enthalten in L “, in Symbolen „ $p \in L$ “, entweder wahr oder falsch. Man beachte, dass das Symbol „ \in “ zwar an das Symbol „ \subset “ erinnert, hier aber keine mengentheoretische Inklusion bezeichnet, da die Geraden L keine Mengen sind, sondern abstrakte Elemente von \mathcal{G} . Daher würde $p \in L$ für $p \in \mathcal{P}$ und $L \in \mathcal{G}$ keinen Sinn ergeben. Die Vorgabe der Relation „ \in “ ist gleichbedeutend mit der Vorgabe einer Menge $\mathcal{J} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{G}$, nämlich $\mathcal{J} = \{(p, L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \mid p \in L\}$. Nun aber zu den ersten Axiomen.

Inzidenzaxiome. Diese Axiome machen einige Aussagen über das Enthaltensein von Punkten in Geraden.

AXIOM I₁. *Durch je zwei Punkte geht eine Gerade,*

$$\forall p, q \in \mathcal{P} \quad \exists L \in \mathcal{G} : \quad p \in L \text{ und } q \in L.$$

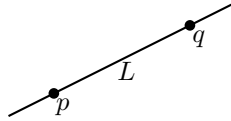


Abb. 1

AXIOM I₂. *Durch je zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade,*

$$\forall p, q \in \mathcal{P}, p \neq q, \quad \forall L, M \in \mathcal{G}, p \in L, q \in L, p \in M, q \in M : \quad L = M.$$

Gemäß dieser ersten beiden Axiome geht durch zwei verschiedene Punkte p und q genau eine Gerade, die wir fortan mit $L(p, q)$ bezeichnen wollen.

AXIOM I₃. *Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte,*

$$\forall L \in \mathcal{G} \quad \exists p, q \in \mathcal{P}, p \neq q : \quad p \in L \text{ und } q \in L.$$

AXIOM I₄. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,*

$$\exists p, q, r \in \mathcal{P} : \quad \nexists L \in \mathcal{G} \text{ mit } p \in L, q \in L, r \in L.$$

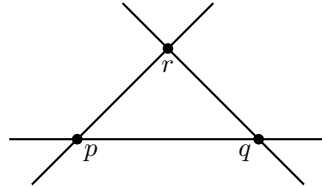


Abb. 2

Axiom I_4 bringt zum Ausdruck, dass unsere Geometrie wenigstens zwei Dimensionen hat.

Beispiel 1.1.1 Das Beispiel für eine Geometrie, die die Axiome erfüllt, das wir stets im Kopf haben, ist das folgende: Wir machen die Definition

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}^2.$$

Geraden werden definiert als Punktmenge der Form

$$L = L_{p,v} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = p + t \cdot v, t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, fixiert sind. Die Menge der Geraden ist dann

$$\mathcal{G} := \{L_{p,v} \mid p, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0\}.$$

Die Inzidenzmenge \mathcal{J} definieren wir einfach durch $p \in L \Leftrightarrow p \in L$, was nun Sinn ergibt, da die Elemente von \mathcal{G} jetzt tatsächlich Punktmenge sind.

Man kann sich nun leicht überlegen, dass die Axiome I_1 bis I_4 gelten. Dieses Beispiel wird ständig wiederkehren. Wir nennen es nach dem Franzosen René Descartes (1596–1650) das *kartesische Modell*.

Hier ein Beispiel, bei dem die Geraden keine Punktmenge sind.

Beispiel 1.1.2 Wir setzen $\mathcal{P} := \{\text{Anna, Bernd, Claudia, Dieter}\}$ und $\mathcal{G} := \{\text{Cola, Apfelsaft, Milch, Wodka, Bier, Wein}\}$. Hier steht \mathcal{P} eher für „Personen“ als für „Punkte“ und \mathcal{G} eher für „Getränke“ als für „Geraden“. Die Inzidenzrelation $p \in L$, in Worten „ p trinkt gerne L “, legen wir durch eine Tabelle fest:

	Anna	Bernd	Claudia	Dieter
Cola	ja	ja	nein	nein
Apfelsaft	ja	nein	ja	nein
Milch	ja	nein	nein	ja
Wodka	nein	ja	ja	nein
Bier	nein	ja	nein	ja
Wein	nein	nein	ja	ja

Nun überzeugt man sich leicht davon, dass die Inzidenzaxiome gelten.

Anordnungsaxiome. Zur Formulierung dieser Axiome benötigen wir zusätzlich zu den Daten \mathcal{P} , \mathcal{G} und \mathcal{J} , dass zu jedem Tripel (p, q, r) von Punkten die Aussage „ q liegt zwischen p und r “ entweder wahr oder falsch sei. Genauer geben wir uns also eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ vor und sagen dann, q liege zwischen p und r , wenn $(p, q, r) \in \mathcal{A}$. Es sollen nun folgende Axiome erfüllt sein.

AXIOM A_1 . Falls q zwischen p und r liegt, so sind p , q und r drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.

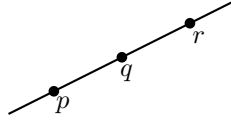


Abb. 3

AXIOM A₂. *Liegt q zwischen p und r , so liegt q auch zwischen r und p .*

Zu je zwei Punkten p und q nennen wir die Menge aller Punkte, die zwischen p und q liegt, die *Strecke* von p nach q und schreiben dafür \overline{pq} . Axiom A₂ impliziert also $\overline{pr} = \overline{rp}$.

AXIOM A₃. *Zu je zwei verschiedenen Punkten p und q gibt es einen Punkt r , so dass q zwischen p und r liegt.*

Aufgepasst: Dieses Axiom besagt nicht, dass es zwischen zwei vorgegebenen Punkten einen weiteren Punkt gibt. Dies werden wir erst noch *beweisen* müssen, vgl. Satz 1.1.5.

AXIOM A₄. *Unter je drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.*

Haben zwei Geraden L und M einen Punkt p gemein, $p \in L$ und $p \in M$, so sagen wir auch, dass sich L und M *schneiden*, in Symbolen $L \cap M \neq \emptyset$. Wir sagen, dass sich eine *Strecke* \overline{pr} und eine *Gerade* L *schneiden*, falls es einen Punkt q zwischen p und r gibt mit $q \in L$.

AXIOM A₅. *Seien p, q und r drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, sei L eine Gerade, die keinen dieser drei Punkte enthält. Schneidet L die Strecke \overline{pq} , so schneidet L auch genau eine der beiden anderen Strecken \overline{pr} oder \overline{qr} .*

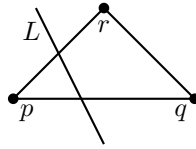


Abb. 4

Dies besagt, dass eine Gerade, die in ein Dreieck eintritt, durch eine der beiden anderen Seiten wieder austritt. Das sagt anschaulich auch, dass unsere Geometrie nicht mehr als zwei Dimensionen hat. In drei Dimensionen würde Axiom A₅ nicht gelten:

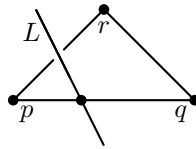


Abb. 5

Beispiel 1.1.3 Im kartesischen Modell sagen wir, dass ein Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ *zwischen* p und $r \in \mathbb{R}^2$ liegt, $p \neq r$, falls es ein $t \in (0, 1)$ gibt, so dass $q = t \cdot p + (1 - t) \cdot r$. Anders ausgedrückt, wir definieren $\mathcal{A} := \{(p, tp + (1 - t)r, r) \mid p, r \in \mathbb{R}^2, p \neq r, t \in (0, 1)\}$.

Dann sieht man leicht, dass die Axiome A_1 bis A_4 gelten. Axiom A_5 erfordert etwas mehr Mühe, weswegen wir den Nachweis auf den nächsten Abschnitt verschieben.

Beispiel 1.1.4 Wir wollen versuchen, im Trinkerbeispiel 1.1.2 die Relation „zwischen“ in sinnvoller Weise zu erklären. Da in diesem Beispiel jede Gerade nur zwei Punkte enthält, zwingt uns Axiom A_1 dazu, $\mathcal{A} := \emptyset$ zu setzen. Dann gelten alle Anordnungsaxiome außer Axiom A_3 .

Beweisen wir nun mit Hilfe der bisherigen Axiome einen ersten Satz.

Satz 1.1.5 $\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{J}$ und \mathcal{A} mögen die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllen.

Dann gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten p und q einen Punkt r , der zwischen p und q liegt, d. h. die Strecke \overline{pq} ist nicht leer.

Beweis. Seien p und q zwei verschiedene Punkte. Nach Axiom I_4 gibt es einen Punkt s , der nicht auf der Geraden $L(p, q)$ liegt. Nach A_3 existiert ein Punkt t , so dass s zwischen p und t liegt. Nochmalige Anwendung von A_3 liefert einen Punkt u , so dass q zwischen t und u liegt. Die Gerade $L := L(s, u)$ schneidet die Strecke \overline{pt} in s .

Der Punkt t liegt nicht auf der Geraden $L(p, q)$, da sonst nach Axiom A_1 auch s auf dieser Geraden läge im Widerspruch zur Wahl von s . Also können wir Axiom A_5 auf die Gerade L und die drei Punkte p, q und t anwenden. Da L die Strecke \overline{pt} schneidet, muss L nach A_5 auch eine der beiden Strecken \overline{pq} oder \overline{tq} schneiden, oder aber einen der drei Punkte p, q oder t enthalten.

1. Fall: L enthält p oder t .

Nach I_2 stimmt L dann mit der Geraden $L(p, t)$ überein. Somit liegt u auf $L(p, t)$ und gemäß A_1 auch q . Daher liegen p, q und t doch auf einer Geraden, ein Widerspruch.

2. Fall: L enthält q .

Nach wiederholter Anwendung von I_2 liegen dann s, u, q, t und p auf einer Geraden, Widerspruch.

3. Fall: L schneidet die Strecke \overline{tq} in einem Punkt v .

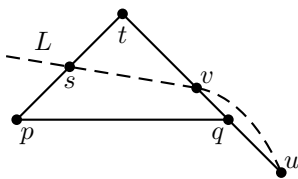


Abb. 6

Dann haben L und $L(t, q)$ die beiden Punkte u und v gemein. Wäre $u = v$, dann wäre sowohl u zwischen t und q , als auch q zwischen t und u , im Widerspruch zu Axiom A_4 . Also haben L und $L(t, q)$ zwei verschiedene Punkte gemein, und wegen I_2 gilt $L = L(t, q)$. Dann liegen aber auch s und p auf L , d. h. p, q und t liegen auf einer Geraden, Widerspruch.

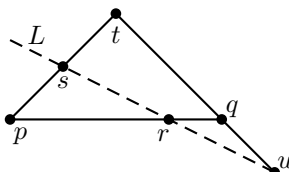


Abb. 7

Somit müssen sich L und \overline{pq} in einem Punkt r schneiden. Insbesondere ist \overline{pq} nicht leer. \square

Definition 1.1.6 Sei L eine Gerade und p ein Punkt auf L . Seien q und r zwei Punkte auf L , beide ungleich p . Wir sagen, q und r liegen auf derselben Seite des Punktes p , falls p nicht zwischen q und r liegt.

Bemerkung 1.1.7 Sei L eine Gerade, $p \in L$ ein Punkt auf L . Gemäß einer Übungsaufgabe definiert die Beziehung „ q_1 liegt auf derselben Seite von p wie q_2 “ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{q \in L \mid q \neq p\}$.

Eine Äquivalenzklasse von Punkten auf L ungleich p können wir dann als eine Seite von p auf L bezeichnen.

Definition 1.1.8 Sei L eine Gerade, seien p und q zwei Punkte, die nicht auf L liegen. Wir sagen, p und q liegen auf derselben Seite der Geraden L , falls die Strecke \overline{pq} die Gerade L nicht schneidet.

Wiederum können wir eine Äquivalenzklasse von Punkten nicht auf L als eine Seite von L bezeichnen.

Kongruenzaxiome. Zur Formulierung der dritten Gruppe von Axiomen, den Kongruenzaxiomen, benötigen wir neben den bisherigen Daten noch, dass für jedes Paar $(\overline{pq}, \overline{p_1q_1})$ von Strecken die Aussage „ \overline{pq} ist zu $\overline{p_1q_1}$ kongruent“ entweder wahr oder falsch sei. Bezeichnen wir die Menge aller Strecken mit \mathcal{S} , so geben wir uns also eine weitere Menge $\mathcal{SK} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ vor und sagen \overline{pq} ist zu $\overline{p_1q_1}$ kongruent, falls $(\overline{pq}, \overline{p_1q_1}) \in \mathcal{SK}$.

AXIOM K_1 (Streckenabtragung). Sei \overline{pq} eine nichtleere Strecke, sei L_1 eine Gerade, seien $p_1, r_1 \in L_1$, $r_1 \neq p_1$. Dann gibt es einen Punkt $q_1 \in L_1$, auf derselben Seite von p_1 wie r_1 , so dass \overline{pq} zu $\overline{p_1q_1}$ kongruent ist.

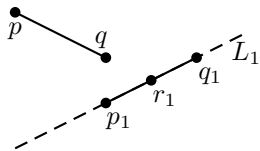


Abb. 8

In diesem Axiom wird nur die Existenz einer kongruenten Strecke gefordert. Ihre Eindeutigkeit muss später noch unter Zuhilfenahme der anderen Axiome bewiesen werden.

AXIOM K₂. Sind die Strecken $\overline{p_1q_1}$ und $\overline{p_2q_2}$ beide zur Strecke \overline{pq} kongruent, so ist auch $\overline{p_1q_1}$ zu $\overline{p_2q_2}$ kongruent.

Es werden noch vier weitere Kongruenzaxiome folgen. Dennoch können wir hier bereits eine erste Folgerung ziehen.

Lemma 1.1.9 Die Kongruenz von Strecken bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken.

Beweis. a) Sei \overline{pq} eine Strecke. Wir zeigen, dass \overline{pq} zu sich selbst kongruent ist. Sei L eine Gerade, die p enthält. Nach Axiom K₁ gibt es einen Punkt r auf L , so dass \overline{pq} und \overline{pr} kongruent sind. Dann ist $\overline{p_1q_1} := \overline{p_2q_2} := \overline{pq}$ kongruent zu \overline{pr} und daher ist nach Axiom K₂ auch \overline{pq} zu sich selbst kongruent.

b) (Symmetrie)

Sei \overline{pq} kongruent zu $\overline{p_1q_1}$. Wir zeigen, dass dann auch $\overline{p_1q_1}$ kongruent zu \overline{pq} ist. Nach a) ist $\overline{p_1q_1}$ auch kongruent zu $\overline{p_1q_1}$. Axiom K₂ liefert dann, dass $\overline{p_1q_1}$ kongruent zu \overline{pq} ist.

c) (Transitivität)

Falls $\overline{p_1q_1}$ kongruent zu $\overline{p_2q_2}$ ist und $\overline{p_2q_2}$ kongruent zu $\overline{p_3q_3}$, dann ist zu zeigen, dass auch $\overline{p_1q_1}$ kongruent zu $\overline{p_3q_3}$ ist. Dies folgt direkt aus Axiom K₂ zusammen mit b). \square

Von jetzt an werden wir für „ $\overline{p_1q_1}$ ist kongruent zu $\overline{p_2q_2}$ “ auch „ $\overline{p_1q_1} \equiv \overline{p_2q_2}$ “ schreiben, d. h. $\mathcal{SK} = \{(\overline{p_1q_1}, \overline{p_2q_2}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \overline{p_1q_1} \equiv \overline{p_2q_2}\}$.

AXIOM K₃ (Addierbarkeit von Strecken). Seien L und L_1 Geraden, seien $p, q, r \in L$ und $p_1, q_1, r_1 \in L_1$ jeweils drei paarweise verschiedene Punkte auf diesen Geraden. Die Strecken \overline{pq} und $\overline{q_1r_1}$ mögen keine gemeinsamen Punkte haben, $\overline{pq} \cap \overline{q_1r_1} = \emptyset$. Analog sei $\overline{p_1q_1} \cap \overline{q_1r_1} = \emptyset$.

Sind dann $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$ und $\overline{q_1r_1} \equiv \overline{q_1r_1}$, so ist auch $\overline{pr} \equiv \overline{p_1r_1}$.

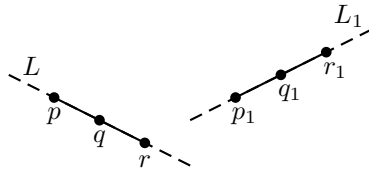


Abb. 9

Definition 1.1.10 Im kartesischen Modell definieren wir

$$\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1} \Leftrightarrow \|p - q\| = \|p_1 - q_1\|.$$

Man sieht dann leicht, dass die Axiome K₁ bis K₃ gelten.

Für die Formulierung der drei anderen Kongruenzaxiome benötigen wir das Konzept des *Winkels*.

Definition 1.1.11 Ein *Winkel* ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln von Punkten p , q und r , die nicht auf einer Geraden liegen, wobei zwei Tripel (p, q, r) und (p_1, q_1, r_1) äquivalent sind, falls

- i) $q = q_1$
- ii) $L(p, q) = L(p_1, q)$ und p und p_1 liegen auf derselben Seite von q
- iii) $L(r, q) = L(r_1, q)$ und r und r_1 liegen auf derselben Seite von q

oder falls

- i) $q = q_1$
- ii) $L(p, q) = L(r_1, q)$ und p und r_1 liegen auf derselben Seite von q
- iii) $L(r, q) = L(p_1, q)$ und r und p_1 liegen auf derselben Seite von q .

Für die Äquivalenzklasse von (p, q, r) schreiben wir $\angle(p, q, r)$. Der Punkt q heißt dann der *Scheitel* des Winkels $\angle(p, q, r)$.

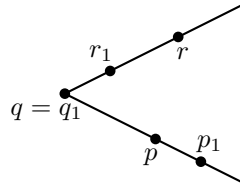


Abb. 10

Wir fordern jetzt ferner, dass für je zwei Winkel $\angle(p, q, r)$ und $\angle(p_1, q_1, r_1)$ die Aussage „ $\angle(p, q, r)$ ist kongruent zu $\angle(p_1, q_1, r_1)$ “ entweder wahr oder falsch sei. Auch hier schreiben wir wieder „ $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)$ “, falls $\angle(p, q, r)$ zu $\angle(p_1, q_1, r_1)$ kongruent ist. In anderen Worten, bezeichnen wir die Menge aller Winkel mit \mathcal{W} , so geben wir uns eine Menge $\mathcal{WK} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ vor, nämlich $\mathcal{WK} = \{(\angle(p, q, r), \angle(p_1, q_1, r_1)) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)\}$.

AXIOM K₄. Die Kongruenz von Winkeln bildet eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.

AXIOM K₅ (Winkelabtragung). Seien p, q, r Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und seien p_1, q_1, s_1 ebenfalls Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann gibt es einen Punkt r_1 auf derselben Seite von $L(p_1, q_1)$ wie s_1 , so dass der Winkel $\angle(p_1, q_1, r_1)$ kongruent ist zu dem Winkel $\angle(p, q, r)$.

Ist ferner r_2 ein weiterer Punkt mit denselben Eigenschaften wie r_1 , d. h. liegt r_2 ebenfalls auf derselben Seite von $L(p_1, q_1)$ wie s_1 und gilt $\angle(p_1, q_1, r_2) \equiv \angle(p, q, r)$, so ist $\angle(p_1, q_1, r_1) = \angle(p_1, q_1, r_2)$.

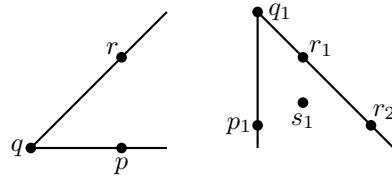


Abb. 11

Axiom K_5 besagt, dass wir einen gegebenen Winkel in eindeutiger Weise abtragen können, wobei wir den Scheitel, ein Bein des Winkels und die Seite des anderen Beines vorgeben.

Das letzte Kongruenzaxiom bringt die Kongruenz von Strecken mit der von Winkeln in Verbindung. Bislang standen die beiden Kongruenzbegriffe völlig unabhängig nebeneinander.

AXIOM K_6 . Seien (p, q, r) und (p_1, q_1, r_1) zwei Tripel von Punkten, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Gilt $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$, $\overline{pr} \equiv \overline{p_1r_1}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$, so gilt auch

$$\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1).$$

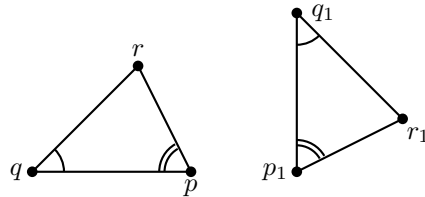


Abb. 12

Ziehen wir einige Schlussfolgerungen aus den bisherigen Axiomen. Erweitern wir zunächst die Aussage aus dem letzten Axiom.

Satz 1.1.12 Die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome seien gültig. Seien (p, q, r) und (p_1, q_1, r_1) zwei Tripel von Punkten, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Gilt $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$, $\overline{pr} \equiv \overline{p_1r_1}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$, so gilt neben $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1)$ auch

$$\angle(p, r, q) \equiv \angle(p_1, r_1, q_1) \quad \text{und} \quad \overline{qr} \equiv \overline{q_1r_1}.$$

Beweis. Die Winkelkongruenzen folgen direkt aus Axiom K_6 , im zweiten Fall nach Bezeichnungswechsel (Vertauschung der Rollen von p und q bzw. p_1 und q_1). Bleibt $\overline{qr} \equiv \overline{q_1r_1}$ zu zeigen. Gemäß Axiom K_1 finden wir auf der Geraden $L(q_1, r_1)$, auf derselben Seite wie r_1 , einen Punkt s_1 , so dass $\overline{q_1s_1} \equiv \overline{qr}$.

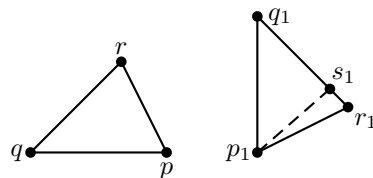


Abb. 13

Wir wenden K_6 auf (p, q, r) und (p_1, q_1, s_1) an und schließen

$$\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, s_1).$$

Andererseits ist aber auch $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$ und damit wegen der Eindeutigkeit in Axiom K_5 ¹

$$\angle(q_1, p_1, s_1) = \angle(q_1, p_1, r_1).$$

Wäre nun $r_1 \neq s_1$, so würden wir schließen, dass p_1 und q_1 beide auf der Geraden $L(r_1, s_1)$ liegen, d. h. p_1, q_1 und r_1 wären auf einer Geraden im Widerspruch zur Annahme.

Also ist $r_1 = s_1$ und damit $\overline{qr} \equiv \overline{q_1r_1}$. □

Definition 1.1.13 Für Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ist die *Winkelgröße* $\sphericalangle(X, Y)$ die eindeutige Zahl aus $[0, \pi]$ mit $\cos(\sphericalangle(X, Y)) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$.

Für Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, ist die *Winkelgröße* entsprechend durch

$$\sphericalangle(p, q, r) = \sphericalangle(p - q, r - q)$$

definiert. Man überlegt sich nun leicht, dass aus $\angle(p, q, r) = \angle(p_1, q_1, r_1)$ folgt $\sphericalangle(p, q, r) = \sphericalangle(p_1, q_1, r_1)$. Im kartesischen Modell kann man nun die Kongruenz von Winkeln durch

$$\angle(p, q, r) \equiv \angle(p_1, q_1, r_1) :\Leftrightarrow \sphericalangle(p, q, r) = \sphericalangle(p_1, q_1, r_1)$$

definieren und die Axiome überprüfen.

Bemerkung 1.1.14 Liegt q zwischen p und r , so sind die Strecken \overline{pq} und \overline{qr} disjunkt, was für die Anwendbarkeit von Axiom K_3 bedeutsam ist. Bezeichnen wir nämlich die Gerade, auf der p, q und r liegen, mit L und nehmen wir an, dass es auf L ein $s \in \overline{pq} \cap \overline{qr}$ gäbe, so wäre wegen $s \in \overline{pq}$ der Punkt s auf derselben Seite von q wie p und wegen $s \in \overline{qr}$ wäre s auf derselben Seite von q wie r . Also lägen p und r auf derselben Seite von q im Widerspruch dazu, dass q zwischen p und r liegt.

Satz 1.1.15 (Kongruenz der Nebenwinkel) Die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome seien gültig. Gilt für Punkte p, q, r, s und p_1, q_1, r_1, s_1 sowohl $(p, q, s) \in \mathcal{A}$ als auch $(p_1, q_1, s_1) \in \mathcal{A}$ sowie $r \notin L(p, q)$ und $r_1 \notin L(p_1, q_1)$, dann folgt aus der Kongruenz der Winkel $\angle(p, q, r)$ und $\angle(p_1, q_1, r_1)$ auch die Kongruenz von $\angle(s, q, r)$ und $\angle(s_1, q_1, r_1)$.

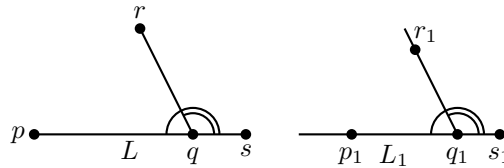


Abb. 14

¹Um die Eindeutigkeitsaussage in Axiom K_5 anwenden zu können, muss sichergestellt sein, dass r_1 und s_1 auf derselben Seite von $L(p_1, q_1)$ liegen. Übung!

Der Winkel $\angle(s, q, r)$ wird auch als *Nebenwinkel* zu $\angle(p, q, r)$ bezeichnet. Der Satz sagt somit, dass die Nebenwinkel kongruenter Winkel ebenfalls kongruent sind.

Beweis. Gemäß Axiom K_1 können die Punkte p_1, r_1 und s_1 als so gewählt angenommen werden, dass $\overline{pq} \equiv \overline{p_1q_1}$, $\overline{rq} \equiv \overline{r_1q_1}$ und $\overline{sq} \equiv \overline{s_1q_1}$.

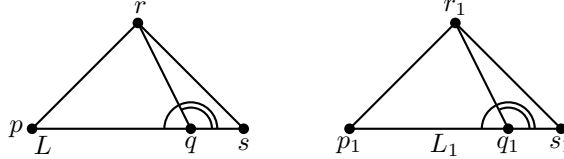


Abb. 15

Nach Satz 1.1.12, angewandt auf (p, q, r) und (p_1, q_1, r_1) , ist $\overline{pr} \equiv \overline{p_1r_1}$. Gemäß Axiom K_3 ist $\overline{ps} \equiv \overline{p_1s_1}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q_1, p_1, r_1)$. Wenden wir Satz 1.1.12 nochmals an, diesmal auf (r, p, s) und (r_1, p_1, s_1) , so folgt $\overline{rs} \equiv \overline{r_1s_1}$ und $\angle(q, s, r) \equiv \angle(q_1, s_1, r_1)$. Axiom K_6 liefert nun für (q, s, r) und (q_1, s_1, r_1) , dass $\angle(s, q, r) \equiv \angle(s_1, q_1, r_1)$. \square

Satz 1.1.16 (Kongruenz der Gegenwinkel) *Die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome seien gültig. Sind L und M zwei verschiedene Geraden, die sich in p schneiden, und liegen $r, q \in L$ auf zwei verschiedenen Seiten von p , und liegen $s, t \in M$, ebenfalls auf zwei verschiedenen Seiten von p , dann ist*

$$\angle(q, p, s) \equiv \angle(r, p, t).$$

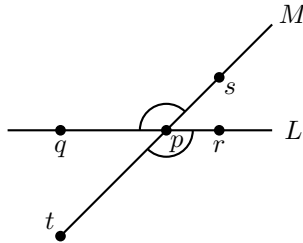


Abb. 16

Beweis. Beide Winkel, $\angle(q, p, s)$ und $\angle(r, p, t)$, sind Nebenwinkel zu $\angle(q, p, t)$. Nach Axiom K_4 ist $\angle(q, p, t)$ zu sich selbst kongruent. Daher folgt die Behauptung aus Satz 1.1.15. \square

Mit diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum ersten wirklich interessanten geometrischen Satz.

Satz 1.1.17 (Existenz einer Parallelen) Die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome seien gültig. Sei L eine Gerade, p ein Punkt, $p \notin L$. Dann gibt es eine Gerade M , die p enthält und die L nicht schneidet.

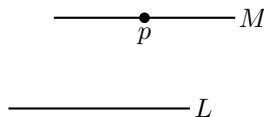


Abb. 17

Wir sagen dann, M ist eine *Parallele* zu L durch p . Der Satz besagt, dass solche Parallelen stets existieren.

Beweis. Sei also L eine Gerade und p ein Punkt, der nicht auf L liegt. Wir werden zunächst die Gerade M konstruieren und anschließend nachweisen, dass sie die gewünschten Eigenschaften hat.

Zur Konstruktion wählen wir einen Punkt $q \in L$ und bilden die Gerade $N := L(p, q)$. Wir wählen einen weiteren Punkt $r \in L$, $r \neq q$. Dann ist $r \notin N$, da sonst $p \in L(p, q) = L(q, r) = L$ wäre. Gemäß Axiom K_5 tragen wir den Winkel $\angle(r, q, p)$ auf der Geraden N im Punkt p ab, d. h. wir finden Punkte $s \in N$ auf der anderen Seite von p als q und $t \in N$ auf derselben Seite von N wie r , so dass der Winkel $\angle(t, p, s)$ kongruent ist zum Winkel $\angle(r, q, p)$. Wir setzen nun $M := L(p, t)$.

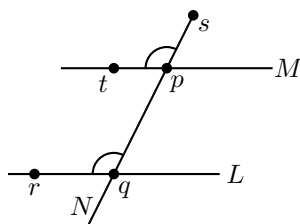


Abb. 18

Es bleibt zu zeigen, dass sich L und M nicht schneiden. Angenommen, L und M schneiden sich in einem Punkt u . Wir beschränken uns auf den Fall, dass u auf derselben Seite von N liegt wie r und t . Der andere Fall kann ähnlich behandelt werden.

Gemäß Axiom K_1 tragen wir die Strecke \overline{uq} auf der Geraden M ab, ausgehend vom Punkt p , und zwar *nicht* auf derselben Seite wie u . Das heißt, $\overline{uq} \equiv \overline{pv}$ mit einem Punkt $v \in M$, so dass p zwischen u und v liegt.

Nach Satz 1.1.16 sind die Winkel $\angle(u, p, s)$ und $\angle(q, p, v)$ kongruent. Somit sind auch die Winkel $\angle(u, q, p)$ und $\angle(q, p, v)$ kongruent. Wir wenden Axiom K_6 auf (u, q, p) und (v, p, q) an und folgern $\angle(q, p, u) \equiv \angle(p, q, v)$.

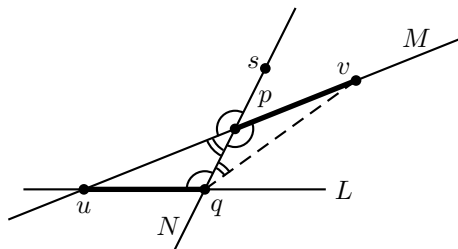


Abb. 19

Nun ist $\angle(q, p, u)$ Nebenwinkel zu $\angle(u, p, s)$, also muss wegen Satz 1.1.15 und der Eindeutigkeit der Winkelabtragung $\angle(p, q, v)$ Nebenwinkel zu $\angle(u, q, p)$ sein. Somit liegt v auf der Geraden L , damit auch p , im Widerspruch zur Annahme. \square

Parallelenaxiom. Die Existenz einer Parallelen lässt sich also mit den bisherigen Axiomen beweisen. Wie steht es mit der Eindeutigkeit? Dies ist Inhalt des Parallelenaxioms.

AXIOM P (Parallelenaxiom). Sei L eine Gerade, p ein Punkt, $p \notin L$. Dann gibt es höchstens eine Gerade, die p enthält und die L nicht schneidet.

Über die Notwendigkeit dieses Axioms gab es eine jahrtausendelange Kontroverse. Viele Mathematiker waren der Ansicht, die Eindeutigkeit der Parallelen sollte sich, ähnlich wie die Existenz, aus den anderen Axiomen herleiten lassen. Es gab zahlreiche Beweisversuche. Carl Friedrich Gauß (1777–1855) war wohl der erste, der wirklich an die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms glaubte. Er veröffentlichte seine Ansichten dazu jedoch nicht. Entschieden wurde die Debatte von dem Russen Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856) und dem Ungarn János Bolyai (1802–1860), die, unabhängig voneinander, eine Geometrie fanden, die alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom erfüllt. Das Parallelenaxiom kann also nicht aus den anderen Axiomen hergeleitet werden. Bolyais Vater, selbst Mathematiklehrer, war über dieses Resultat seines Sohnes so beunruhigt, dass er einen Brief an Gauß schrieb und ihn darin um seine Ansicht bat. In seiner Antwort äußerte sich Gauß durchaus enthusiastisch über die Arbeit des jüngeren Bolyai, fügte aber die Bemerkung bei, er könne ihn nicht loben, da dies ein Selbstlob bedeuten würde, denn er, Gauß, hätte all das seit vielen Jahren auch schon gewusst. János Bolyai veröffentlichte nie mehr etwas über Mathematik.

Besagte Geometrie ist die hyperbolische Geometrie, auch bekannt unter der Bezeichnung „nichteuclidische Geometrie“. Wir werden sie später noch ausführlich behandeln.

Vollständigkeitsaxiome. Bei der Einführung der reellen Zahlen lernt man in der Analysis die Vollständigkeitsaxiome kennen, die unter den angeordneten Zahlkörpern die reellen Zahlen z. B. von den rationalen unterscheiden. Um die euklidische Geometrie axiomatisch eindeutig festzulegen, benötigen wir die entsprechenden Axiome.

AXIOM V_1 (Archimedisches Axiom). Seien \overline{pq} und \overline{rs} zwei nichtleere Strecken. Dann existiert eine natürliche Zahl n , so dass die Strecke $\overline{r_1 s_n}$, die durch n -maliges Abtragen der Strecke \overline{rs} auf der Geraden $L(p, q)$ entsteht, ausgehend von p in Richtung q , die Strecke \overline{pq} enthält.

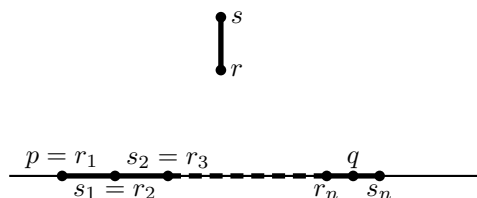


Abb. 20

Bevor wir das letzte Axiom formulieren, fassen wir an dieser Stelle die Daten zusammen, die wir für die axiomatische Formulierung der euklidischen Geometrie benötigen. Wir haben

- eine Menge \mathcal{P} , deren Elemente Punkte heißen,
- eine Menge \mathcal{G} , deren Elemente wir Geraden nennen,
- eine Menge $\mathcal{J} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{G}$, die die Relation \prec zwischen \mathcal{P} und \mathcal{G} festlegt,
- eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, die die dreistellige Relation „ \equiv “ auf \mathcal{P} festlegt,
- eine Menge \mathcal{SK} , die die Relation \equiv_1 auf der Menge der Strecken festlegt,
- eine Menge \mathcal{WK} , die die Relation \equiv_2 auf der Menge der Winkel festlegt.

Formal könnte man nun ein *vorläufiges Modell der ebenen euklidischen Geometrie* definieren als ein 6-Tupel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{J}, \mathcal{A}, \mathcal{SK}, \mathcal{WK})$ bestehend aus solchen Daten, die den Axiomen I₁–I₄, A₁–A₅, K₁–K₆, P, sowie Axiom V₁ genügen.

Unter einer *Erweiterung* eines vorläufigen Modells der ebenen euklidischen Geometrie verstehen wir ein zweites vorläufiges Modell $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{J}', \mathcal{A}', \mathcal{SK}', \mathcal{WK}')$, so dass $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cap (\mathcal{P} \times \mathcal{G})$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap (\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P})$, $\mathcal{SK} = \mathcal{SK}' \cap (\mathcal{S} \times \mathcal{S})$ und $\mathcal{WK} = \mathcal{WK}' \cap (\mathcal{W} \times \mathcal{W})$. Dies bringt zum Ausdruck, dass die Relationen \prec' , \equiv' , \equiv'_1 sowie \equiv'_2 nach Einschränkung auf \mathcal{P} und \mathcal{G} mit den entsprechenden Relationen \prec , \equiv , \equiv_1 übereinstimmen.

Definition 1.1.18 Ein vorläufiges Modell der ebenen euklidischen Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{J}, \mathcal{A}, \mathcal{SK}, \mathcal{WK})$ heißt *maximal*, wenn für jede Erweiterung $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{J}', \mathcal{A}', \mathcal{SK}', \mathcal{WK}')$ gilt, dass $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

Ein maximales vorläufiges Modell ist also nicht mehr echt erweiterbar.

AXIOM V₂ (Maximalität). *Das vorläufige Modell der ebenen euklidischen Geometrie sei maximal.*

Genügt ein vorläufiges Modell der ebenen euklidischen Geometrie auch noch Axiom V₂, nennen wir es ein *Modell der ebenen euklidischen Geometrie*.

Für eine weitergehende Diskussion der axiomatischen Geometrie sei auf Hilberts Buch [5] verwiesen. Dort finden sich Beweise zahlreicher geometrischer Sätze, eine Diskussion

der Eindeutigkeit der euklidischen Geometrie und der Notwendigkeit des archimedischen Axioms, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sowie räumliche euklidische Geometrie. Schließlich sei noch bemerkt, dass man einige Axiome noch etwas abschwächen kann, etwa K_4 und V_2 .

1.2 Das kartesische Modell

Sorgt die axiomatische Methode für logische Klarheit beim Aufbau der Geometrie, so macht sich doch eine ihr eigene Schwerfälligkeit störend bemerkbar. Die Beweise selbst relativ simpler geometrischer Sachverhalte können schnell recht verwickelt werden. Auch ist die Behandlung geometrischer Objekte, die sich nicht aus gewissen einfachen Elementen wie Strecken, Kreisbögen usw. zusammensetzen, ziemlich aufwändig.

Wir folgen daher von nun an Ideen des Franzosen René Descartes (1596–1650) und charakterisieren Punkte durch Koordinaten, die die Lage der Punkte in der Ebene beschreiben. Dies ermöglicht es, Methoden aus der Algebra und der Infinitesimalrechnung auch in der Geometrie einzusetzen, und erweitert unseren mathematischen Werkzeugvorrat ganz erheblich.

Wir erinnern uns an die Definition aus Beispiel 1.1.1

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}^2.$$

Geraden wurden definiert als Punktfolgen der Form

$$L = L_{p,v} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = p + t \cdot v, t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, fixiert sind. Die Menge der Geraden ist dann

$$\mathcal{G} := \{L_{p,v} \mid p, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0\}.$$

Bemerkung 1.2.1 Zwei Geraden $G_{p,v}$ und $G_{p,w}$ sind identisch genau dann, wenn v, w linear abhängig sind, also

$$G_{p,v} = G_{p,w} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} : w = \alpha v.$$

Sind $p, q \in \mathbb{R}^2$ verschieden, so ist die eindeutige Gerade durch p und q gegeben durch

$$G(p, q) := G_{p, q-p} = \{p + t \cdot (q - p) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - t) \cdot p + t \cdot q \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

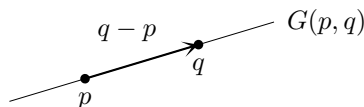


Abb. 21

Die Inzidenzmenge \mathcal{J} definieren wir einfach durch $p \leq L \Leftrightarrow p \in L$, was nun Sinn ergibt, da die Elemente von \mathcal{G} jetzt tatsächlich Punktfolgen sind.

Wir haben uns überlegt, dass die Axiome I_1 bis I_4 gelten.

Ein Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ liegt *zwischen* p und $r \in \mathbb{R}^2$, $p \neq r$, falls es ein $t \in (0, 1)$ gibt, so dass $q = t \cdot p + (1 - t) \cdot r$. Anders ausgedrückt, wir definieren $\mathcal{A} := \{(p, tp + (1 - t)r, r) \mid p \neq r, t \in (0, 1)\}$

Dann gelten Axiome A_1 bis A_4 (Übung).

Definition 1.2.2 Sei L eine Gerade mit $a \in L$ und Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d. h. $L = L_{a,v}$. Ein Vektor $n \in \mathbb{R}^2$, $\neq 0$, heißt *Normalenvektor* von L , falls $\langle v, n \rangle = 0$.

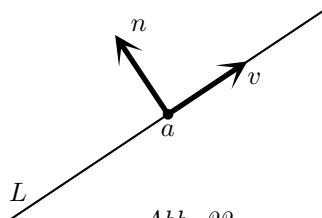


Abb. 22

Beispiel 1.2.3 Aus dem Richtungsvektor können wir einen Normalenvektor einfach durch Drehung um $\pi/2$ gewinnen,

$$n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Da uns die Konstruktion des Normalenvektors noch häufig begegnen wird, führen wir für diese Drehmatrix das Symbol \mathbb{J} ein.

Leiten wir nun eine alternative Form zur Beschreibung von Geraden im kartesischen Modell der ebenen euklidischen Geometrie her.

Satz 1.2.4 (Hesse'sche Normalform) Sei L eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit $a \in L$ und Normalenvektor n . Dann gilt:

$$L = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p - a, n \rangle = 0\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p, n \rangle = \langle a, n \rangle\}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Inklusion „ \subset “. Sei $p \in L$, d. h. es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $p = a + tv$. Dann gilt

$$\langle p - a, n \rangle = \langle tv, n \rangle = t \langle v, n \rangle = 0,$$

was zu zeigen war.

Nun zeigen wir die Inklusion „ \supset “. Sei $p \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle p - a, n \rangle = 0$. Da die Menge $\{w \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w, n \rangle = 0\}$ einen eindimensionalen Untervektorraum von \mathbb{R}^2 bildet und die Vektoren v sowie $w := p - a$ enthält, müssen v und w linear abhängig sein. Da $v \neq 0$ ist, lässt sich w schreiben als $w = tv$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$p = a + w = a + tv \in L_{a,v} = L.$$

□

Die Hesse'sche Normalform erlaubt eine einfache Charakterisierung des Sachverhalts, dass zwei Punkte auf einer Seite einer Geraden liegen.

Lemma 1.2.5 Sei L eine Gerade mit $a \in L$ und Normalenvektor n . Seien $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$.

Die Punkte p und q liegen genau dann auf derselben Seite von L , wenn $\langle p - a, n \rangle$ und $\langle q - a, n \rangle$ dasselbe Vorzeichen haben.

Beweis. Die Strecke \overline{pq} ist gegeben durch $\overline{pq} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = tp + (1-t)q, t \in (0, 1)\}$. Für $x \in \overline{pq}$ gilt also

$$\begin{aligned} \langle x - a, n \rangle &= \langle tp + (1-t)q - a, n \rangle \\ &= \langle tp + (1-t)q - ta - (1-t)a, n \rangle \\ &= \langle t(p-a) + (1-t)(q-a), n \rangle \\ &= \langle t(p-a), n \rangle + \langle (1-t)(q-a), n \rangle \\ &= t\langle p-a, n \rangle + (1-t)\langle q-a, n \rangle. \end{aligned}$$

Nun überlegt man sich leicht, dass eine Funktion der Form $t \mapsto t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta$ mit reellen nichtverschwindenden Konstanten α und β genau dann eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$ hat, wenn α und β entgegengesetztes Vorzeichen haben.

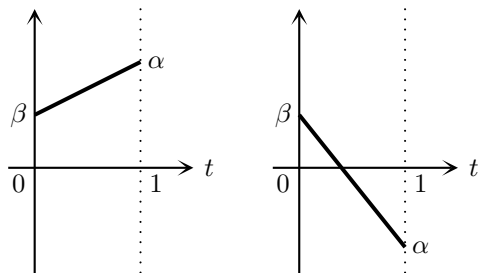


Abb. 23

Damit sehen wir:

- p und q liegen auf derselben Seite von L
- $\Leftrightarrow \overline{pq}$ und L schneiden sich nicht
- $\Leftrightarrow t \mapsto t \cdot \langle p - a, n \rangle + (1-t) \cdot \langle q - a, n \rangle$ hat keine Nullstelle in $(0, 1)$
- $\Leftrightarrow \langle p - a, n \rangle$ und $\langle q - a, n \rangle$ haben gleiches Vorzeichen.

□

Diese Charakterisierung ist sehr nützlich zum Nachweis von Axiom A_5 .

Satz 1.2.6 Im kartesischen Modell gilt Axiom A_5 .

Beweis. Seien p, q und $r \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, sei L eine Gerade, die keinen dieser drei Punkte enthält. Die Gerade L schneide die Strecke \overline{pq} . Wir haben zu zeigen, dass L eine der beiden Strecken \overline{pr} und \overline{qr} schneidet.

Wir schreiben L in der Hesse'schen Normalform, d. h. wir wählen $a \in L$ und einen Normalenvektor n . Da L die Strecke \overline{pq} schneidet, liegen p und q auf verschiedenen Seiten von L . Nach Lemma 1.2.5 haben $\langle p-a, n \rangle$ und $\langle q-a, n \rangle$ verschiedene Vorzeichen. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $\langle p-a, n \rangle > 0$ und $\langle q-a, n \rangle < 0$.

Da $r \notin L$, ist gemäß Satz 1.2.4 $\langle r-a, n \rangle \neq 0$.

1. Fall: $\langle r-a, n \rangle > 0$.

Dann haben $\langle q-a, n \rangle$ und $\langle r-a, n \rangle$ entgegengesetztes Vorzeichen. Nach Lemma 1.2.5 liegen q und r auf zwei verschiedenen Seiten von L , d. h. L schneidet die Strecke \overline{qr} .

2. Fall: $\langle r-a, n \rangle < 0$.

Es folgt analog, dass L die Strecke \overline{pr} schneidet. \square

Wir erinnern uns nun ferner daran, dass wir im kartesischen Modell zwei Strecken \overline{pq} und $\overline{p'q'}$ als kongruent definiert hatten, wenn $\|p-q\| = \|p'-q'\|$. In ähnlicher Weise hatten wir zwei Winkel $\angle(p, q, r)$ und $\angle(p', q', r')$ als kongruent definiert, wenn die zugehörigen Winkelgrößen übereinstimmen,

$$\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r') \Leftrightarrow \sphericalangle(p, q, r) = \sphericalangle(p', q', r').$$

Der Nachweis der Gültigkeit der Axiome K_1 bis K_4 im kartesischen Modell sei dem Leser zur Übung überlassen. Um den Nachweis der verbleibenden Kongruenzaxiome zu vereinfachen, leiten wir nun eine alternative Charakterisierung der Kongruenz von Strecken und von Winkeln im kartesischen Modell her.

Definition 1.2.7 Eine reelle $n \times n$ -Matrix A heißt *orthogonal*, falls gilt

$$A^t \cdot A = \mathbb{1}_n,$$

wobei A^t die zu A transponierte Matrix bezeichnet und $\mathbb{1}_n$ die Einheitsmatrix.

Bemerkung 1.2.8 Orthogonale Matrizen erhalten das Skalarprodukt, d. h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^t \cdot Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Damit wird auch die Norm erhalten,

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|,$$

und die Winkelgröße,

$$\sphericalangle(Ax, Ay) = \arccos\left(\frac{\langle Ax, Ay \rangle}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) = \sphericalangle(x, y).$$

Beispiel 1.2.9 In Dimension $n = 1$ ist $O(1) = \{(1), (-1)\}$, denn für eine 1×1 -Matrix $A = (a)$ sagt die Orthogonalitätsbedingung einfach

$$a^2 = a \cdot a = 1.$$

Beispiel 1.2.10 In zwei Dimensionen gilt $O(2) = SO(2) \dot{\cup} O(2)^-$, wobei

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

die Drehmatrizen zum Winkel θ enthält und

$$O(2)^- = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

die Spiegelungsmatrizen um die Achse mit Winkel θ zur x -Achse.

Definition 1.2.11 Sei $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix. Sei $b \in \mathbb{R}^n$.

Dann nennt man die Abbildung

$$F_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F_{A,b}(x) = Ax + b,$$

eine *euklidische Bewegung*. Der Vektor b wird auch als *Translationsanteil* bezeichnet. Für eine fixierte Dimension n heißt die Menge aller euklidischen Bewegungen,

$$E(n) := \{F_{A,b} \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\},$$

euklidische Bewegungsgruppe.

Tatsächlich bildet $E(n)$ eine Gruppe bzgl. Komposition. Insbesondere ist die Verkettung zweier euklidischer Bewegungen selbst wieder eine. In Dimension $n = 2$ enthält $E(2)$ alle Drehungen um beliebige Mittelpunkte (nicht nur Mittelpunkt 0 wie bei $SO(2)$) und Spiegelungen an beliebigen Achsen (nicht nur denen, die durch 0 gehen wie bei $O(2)^-$).

Satz 1.2.12 Seien p, q, r und $p', q', r' \in \mathbb{R}^2$ Punkte, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Dann gilt:

1. $\overline{pq} \equiv \overline{p'q'} \iff \exists F \in E(2)$ mit $\overline{F(p)F(q)} = \overline{p'q'}$.
2. $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r') \iff \exists F \in E(2)$ mit $\angle(F(p), F(q), F(r)) = \angle(p', q', r')$.

Beweis. Wir führen hier nur den Beweis der ersten Äquivalenz. Die zweite geht ähnlich und bleibt dem Leser zur Übung vorbehalten. Wir haben zwei Richtungen zu zeigen.

„ \Leftarrow “ Sei $F \in E(2)$ mit $\overline{F(p)F(q)} = \overline{p'q'}$, $F = F_{A,b}$. Dann ist gemäß Bemerkung 1.2.8 $\|p' - q'\| = \|F(p) - F(q)\| = \|Ap + b - (Aq + b)\| = \|Ap - Aq\| = \|A(p - q)\| = \|p - q\|$ und somit $\overline{p'q'} \equiv \overline{pq}$.

„ \Rightarrow “ Sei $\overline{p'q'} \equiv \overline{pq}$, d. h. $\|p' - q'\| = \|p - q\|$. Wir setzen $v := p - q$ und $v' := p' - q'$ und haben $\|v\| = \|v'\|$. Wir setzen $r := \|v\| = \|v'\|$. Nun schreiben wir $v = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ und $v' = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta') \\ \sin(\theta') \end{pmatrix}$. Sei nun A die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta' - \theta) & -\sin(\theta' - \theta) \\ \sin(\theta' - \theta) & \cos(\theta' - \theta) \end{pmatrix}.$$

Dann berechnet man $Av = v'$. Nun setzen wir $b := q' - Aq$ und $F := F_{A,b} \in E(2)$. Dann gilt $F(p) = Ap + b = A(v + q) + b = Av + Aq + b = v' + Aq + b = p' - q' + Aq + b = p'$ sowie $F(q) = Aq + b = A(p - v) + b = Ap - Av + b = p' - b - v' + b = p' - v' = q'$. Somit gilt $\overline{F(p)F(q)} = \overline{p'q'}$, was zu zeigen war. \square

Satz 1.2.13 *Im kartesischen Modell gilt Axiom K_6 .*

Beweis. Seien p, q, r und $p', q', r' \in \mathbb{R}^2$ Punkte, die jeweils nicht auf einer Geraden liegen. Es gelte $\overline{pq} \equiv \overline{p'q'}$, $\overline{pr} \equiv \overline{p'r'}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q', p', r')$. Wir haben zu zeigen, dass dann auch $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r')$.

Wegen $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q', p', r')$ gibt es ein $F \in E(2)$ mit $\angle(q', p', r') = \angle(F(q), F(p), F(r))$. Nach der Definition von Winkeln heißt das $F(p) = p'$ und $F(q) - F(p) = t_1 \cdot (q' - p')$ und $F(r) - F(p) = t_2 \cdot (r' - p')$ für geeignete $t_1, t_2 > 0$ oder aber $F(p) = p'$ und $F(r) - F(p) = t_1 \cdot (q' - p')$ und $F(q) - F(p) = t_2 \cdot (r' - p')$ für geeignete $t_1, t_2 > 0$.

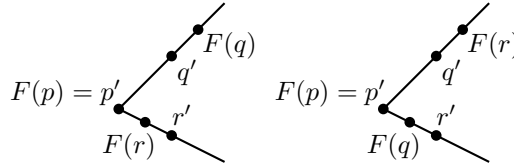


Abb. 24

Im zweiten Fall verketteten wir F mit der Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch p_1 . Dies liefert wieder eine euklidische Bewegung und führt den zweiten Fall auf den ersten zurück.

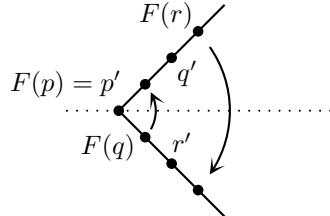


Abb. 25

Sei also o. B. d. A. $F(p) = p'$ und $F(q) - F(p) = t_1 \cdot (q' - p')$ und $F(r) - F(p) = t_2 \cdot (r' - p')$ für geeignete $t_1, t_2 > 0$. Wegen $\overline{pq} \equiv \overline{p'q'}$ ist $\|q - p\| = \|q' - p'\| = \|\frac{1}{t_1}(F(q) - F(p))\| = \frac{1}{|t_1|}\|F(q) - F(p)\| = \frac{1}{t_1}\|q - p\|$ und somit $t_1 = 1$. Damit haben wir $F(q) = F(q) - F(p) + F(p) = 1 \cdot (q' - p') + p' = q'$. Analog folgt $F(r) = r'$. Damit gilt insbesondere $\angle(p', q', r') = \angle(F(p), F(q), F(r))$ und somit $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r')$. \square

Satz 1.2.14 *Im kartesischen Modell gilt das Parallelenaxiom. Genauer:*

Ist $G := G_{p,v} \in \mathcal{G}$ eine Gerade und $q \in \mathbb{R}^2 - G$ ein Punkt, der nicht auf G liegt, so sind $G_{p,v}$ und $G_{q,w}$ parallel genau dann, wenn v und w linear abhängig sind. Man schreibt dafür auch $G_{p,v} \parallel G_{q,w}$.

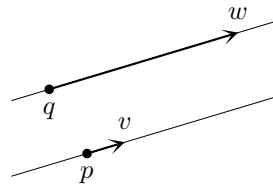


Abb. 26

Beweis.

1. Seien v und w linear abhängig.

Angenommen, es gäbe ein $r \in G_{p,v} \cap G_{q,w}$. Dann können wir $G_{p,v} = G_{r,v}$ schreiben.

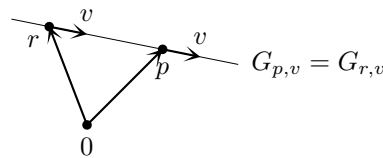


Abb. 27

Genauso erhalten wir $G_{q,w} = G_{r,w}$.

Nun sind v und w linear abhängig, und damit ist nach Bemerkung 1.2.1 $G_{r,v} = G_{r,w}$. Dies stellt aber einen Widerspruch zu der Voraussetzung dar, dass $q \in G_{q,w} = G_{r,w}$, aber $q \notin G_{p,v} = G_{r,v}$; somit sind die Geraden disjunkt.

2. Seien v und w linear unabhängig.

Die Geraden schneiden sich, falls

$$\begin{aligned} \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \quad & p + t_1 v = q + t_2 w \\ \Leftrightarrow \quad & t_1 v - t_2 w = q - p \\ \Leftrightarrow \quad & (v, w) \begin{pmatrix} t_1 \\ -t_2 \end{pmatrix} = q - p. \end{aligned}$$

Da v und w linear unabhängig sind, ist die 2×2 -Matrix (v, w) invertierbar. (Dieser Schritt funktioniert nicht in höheren Dimensionen, da (v, w) dort keine quadratische Matrix ist.) Somit gibt es genau eine Lösung

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ -t_2 \end{pmatrix} = (v, w)^{-1}(q - p). \quad \square$$

Bemerkung 1.2.15 Verlässt man die Ebene, funktioniert nicht nur der Beweis so nicht, sondern nicht parallele Geraden können hier tatsächlich disjunkt („windschief“) sein.

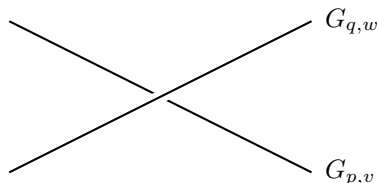


Abb. 28

In Dimension 2 ist dafür zu wenig Platz.

Bemerkung 1.2.16 Auch das Kongruenzaxiom K_5 und das archimedische Axiom V_1 sind nicht allzu schwierig nachzuweisen, deshalb seien auch diese dem geneigten Leser als Übung überlassen.

Der Nachweis des Maximalitätsaxioms V_2 erfordert mehr Überlegung als der der anderen Axiome. Daher wollen wir ihn hier vorführen.

Satz 1.2.17 *Mit den von uns gemachten Definitionen ist das Maximalitätsaxiom V_2 gültig.*

Beweis. Seien $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$ die Punkt- bzw. Geradenmenge einer Erweiterung unseres kartesischen Modells für die euklidische Geometrie. Wir werden die Punkte aus \mathcal{P} *alte Punkte* nennen, die aus $\mathcal{P}' - \mathcal{P}$ *neue Punkte*. Bei den Geraden verfahren wir entsprechend. Wir haben zu zeigen, dass es überhaupt keine neuen Punkte und Geraden gibt, $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ und $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass alte Geraden keine neuen Punkte enthalten, dann dass es keine neuen Punkte gibt, und schließlich dass es keine neuen Geraden gibt.

a) *Alte Geraden enthalten keine neuen Punkte, d. h. für $L \in \mathcal{G}$ und $p \in \mathcal{P}'$ mit $p \notin L$ gilt $p \notin \mathcal{P}$.*

An dieser Stelle darf man sich nicht verwirren lassen. Nach unserer Definition sind alte Geraden Mengen bestehend aus alten Punkten. Im *mengentheoretischen Sinn* enthalten alte Geraden also sowieso nur alte Punkte. Dennoch könnten für die Erweiterung \llcorner der mengentheoretischen Inklusion \in auch neue Punkte in alten Geraden enthalten sein. Dass dies nicht der Fall ist, gilt es nun zu beweisen.

Sei also $L \in \mathcal{G}$ eine alte Gerade. Angenommen, L enthält einen neuen Punkt n . Wir wählen einen alten Punkt $p_1 \in L$. Da L von der Form $L = L_{p,v}$ ist, können wir $p_1 = p + t_1 v =: c(t_1)$ schreiben, $t_1 \in \mathbb{R}$. Tragen wir die Strecke $\overline{(0,0)^\top(0,1)^\top}$ hinreichend oft auf L ab, ausgehend von p_1 in Richtung n , so erhalten wir gemäß dem archimedisches Axiom einen zweiten Punkt $q_1 \in L$ derart, dass n zwischen p_1 und q_1 liegt. Abtragen der Strecke $\overline{(0,0)^\top(0,1)^\top}$ auf einer alten Gerade ausgehend von einem alten Punkt liefert stets wieder einen alten Punkt. Also ist q_1 ein alter Punkt. Wir schreiben $q_1 = c(s_1)$, $s_1 \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $t_1 < s_1$.

Wir zerlegen nun die reellen Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen, $\mathbb{R} = T \dot{\cup} S$, wobei $T = \{t \in \mathbb{R} \mid c(t) \text{ liegt auf derselben Seite von } n \text{ wie } c(t_1)\}$ und $S = \{t \in$

$\mathbb{R} \mid c(t)$ liegt auf derselben Seite von n wie $c(s_1)$. Diese Zerlegung der reellen Zahlen stellt einen Dedekind'schen Schnitt dar. Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} besitzt entweder T ein Maximum oder S ein Minimum. Wir behandeln den Fall, dass T ein Maximum t_2 hat. Der andere Fall geht analog.

Wir setzen $p_2 := c(t_2)$. Da $t_2 \in T$ ist, liegen p_1 und p_2 auf derselben Seite von n . Nach dem archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl k , für die k -faches Abtragen der Strecke $\overline{p_2 n}$ auf L von p_2 in Richtung q_1 die Strecke $\overline{p_2 q_1}$ enthält. Wir setzen $p_3 := c(t_3)$ mit $t_3 = t_2 + (s_1 - t_2)/k$. Dann hat die Strecke $\overline{p_2 p_3}$ die Eigenschaft, dass ihre k -fache Abtragung auf L von p_2 in Richtung q_1 gerade die Strecke $\overline{p_2 q_1}$ ergibt.

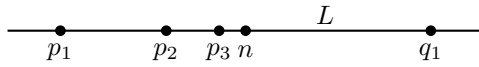


Abb. 29

Da die Strecke $\overline{p_2 q_1}$ in der k -mal abgetragenen Strecke $\overline{p_2 n}$ enthalten ist, ist die Strecke $\overline{p_2 p_3}$ in $\overline{p_2 n}$ enthalten. Daher liegt p_3 zwischen p_2 und n . Also ist $t_3 \in T$ und $t_3 > t_2$. Dies widerspricht der Maximalität von t_2 .

b) *Es gibt keine neuen Punkte, d. h. $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.*

Sei $p \in \mathcal{P}'$ ein beliebiger Punkt. Wir wählen einen alten Punkt $q \in \mathcal{P}$ und betrachten die Gerade L durch p und q . Wir wählen nun drei alte Punkte $r, s, t \in \mathcal{P}$, die nicht auf einer Geraden liegen und keiner auf L , so dass sich L und die Strecke \overline{rs} in q schneiden.

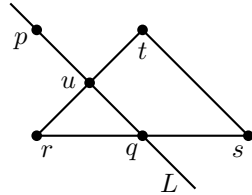


Abb. 30

Nach Axiom A₅ schneidet L die Strecke \overline{rt} oder \overline{ts} in einem Punkt u . Da die beiden alten Geraden $L(r, t)$ und $L(s, t)$ nach a) keine neuen Punkte enthalten, ist u ein alter Punkt. Damit ist $L = L(u, q)$ eine alte Gerade und enthält wiederum nach a) keinen neuen Punkt. Also ist p ein alter Punkt, $p \in \mathcal{P}$.

c) *Es gibt keine neuen Geraden, d. h. $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.*

Sei $L \in \mathcal{G}'$ eine Gerade. Nach Axiom I₃ enthält L zwei verschiedene Punkte p und q . Wegen b) müssen dies alte Punkte sein. Also ist $L = L(p, q)$ eine alte Gerade, $L \in \mathcal{G}$. □

Die Axiome der ebenen euklidischen Geometrie sind also für das kartesische Modell gültig. Insbesondere sehen wir, dass die Axiome *widerspruchsfrei* sind.

1.3 Dreiecke

Geometrie im kartesischen Modell zu betreiben, hat den Vorteil, dass wir nun den ganzen mathematischen Apparat der Differential- und Integralrechnung zur Verfügung haben. Damit wird auch die Behandlung der euklidischen Trigonometrie relativ einfach.

Definition 1.3.1 Unter einem *euklidischen Dreieck* verstehen wir von nun an ein Tripel von Punkten (A, B, C) in \mathbb{R}^2 , die nicht auf einer Geraden liegen. Die *Seitenlängen* sind gegeben durch $a = \|B - C\|$, $b = \|A - C\|$ und $c = \|A - B\|$, die *Winkelgrößen* sind die eindeutigen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ mit

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \left\langle \frac{B - A}{\|B - A\|}, \frac{C - A}{\|C - A\|} \right\rangle \\ \cos(\beta) &= \left\langle \frac{A - B}{\|A - B\|}, \frac{C - B}{\|C - B\|} \right\rangle \\ \cos(\gamma) &= \left\langle \frac{A - C}{\|A - C\|}, \frac{B - C}{\|B - C\|} \right\rangle\end{aligned}$$

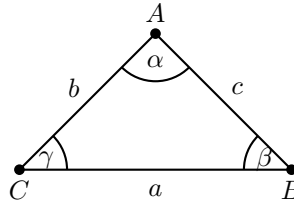


Abb. 31

Satz 1.3.2 (Kosinussatz der euklidischen Geometrie) Sei (A, B, C) ein euklidisches Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c sowie den Winkelgrößen α, β und γ . Dann gilt

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha), \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).\end{aligned}$$

Beweis. Wir brauchen nur eine der drei Gleichungen zu zeigen, da sich dann die anderen beiden durch Vertauschung der Rollen der Punkte A, B und C ergeben. Zeigen wir also die dritte Gleichung. Euklidische Bewegungen verändern die Längen- und Winkelgrößen nicht. Daher können wir nach Anwendung einer geeigneten euklidischen Bewegung annehmen, dass $C = (0, 0)^\top$, $B = (a, 0)^\top$ und $A = (x, y)^\top$.

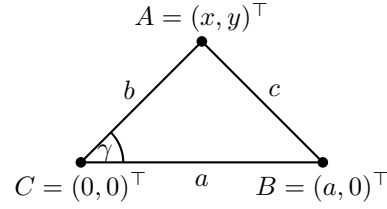


Abb. 32

Es gilt

$$c^2 = (x - a)^2 + y^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + b^2 - 2ax.$$

Ferner ist

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle B, A \rangle}{\|B\| \cdot \|A\|} = \frac{xa + y \cdot 0}{ab} = \frac{ax}{ab}$$

und daher $ax = ab \cos(\gamma)$. Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Korollar 1.3.3 (Satz von Pythagoras) Sei (A, B, C) ein euklidisches Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c sowie den Winkelgrößen α, β und γ . Ist der Winkel bei C ein rechter, $\gamma = \pi/2$, so gilt

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad \square$$

Satz 1.3.4 (Sinussatz der euklidischen Geometrie) Sei (A, B, C) ein euklidisches Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c sowie den Winkelgrößen α, β und γ . Dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Beweis. Nach dem Kosinussatz gilt für den Winkel in der Ecke A

$$-2bc \cos(\alpha) = a^2 - (b^2 + c^2)$$

und daher

$$4b^2c^2 \cos^2(\alpha) = (-a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Analog gilt

$$4a^2c^2 \cos^2(\beta) = (a^2 - b^2 + c^2)^2.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} &= \frac{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2(\alpha))}{4a^2b^2c^2(1 - \cos^2(\beta))} \\ &= \frac{4a^2b^2c^2 - a^2(-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4a^2b^2c^2 - b^2(a^2 - b^2 + c^2)^2} \\ &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2)}{4a^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2)} \\ &= \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Da $a, b, \sin(\alpha), \sin(\beta) > 0$ zeigt dies $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$. Vertauschung der Rollen von B und C liefert $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$. \square

Satz 1.3.5 (Kongruenzsatz für Dreiecke) Seien (A, B, C) und (A', B', C') zwei euklidische Dreiecke. Die Seitenlängen seien wie gewohnt mit a, b, c bzw. a', b', c' bezeichnet, die Winkel mit α, β, γ bzw. α', β', γ' .

Dann sind äquivalent:

1. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', b = b', c = c', \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma';$$

2. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', b = b', c = c';$$

3. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$\alpha = \alpha', b = b', c = c';$$

4. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', \beta = \beta', \gamma = \gamma'.$$

Beweis.

1 \Rightarrow 2,3,4 trivial.

2 \Rightarrow 1 liefert der Kosinussatz der euklidischen Geometrie.

3 \Rightarrow 2 ebenso.

4 \Rightarrow 3 Wir sehen zunächst, da die Innenwinkelsumme in allen Dreiecken π beträgt, dass

$$\alpha = \pi - (\beta + \gamma) = \pi - (\beta' + \gamma') = \alpha'$$

gilt. Nun liefert der Sinussatz der euklidischen Geometrie die Gleichheit von b und b' sowie von c und c' .

Satz 1.3.6 (Winkelsumme im euklidischen Dreieck) Für die Winkelsumme im euklidischen Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus liefern

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin(\alpha) \cos(\beta + \gamma) + \cos(\alpha) \sin(\beta + \gamma) \\ &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) \\ &\quad + \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Für den ersten Summanden liefert der Kosinussatz

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) &= \sin(\alpha) \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{1}{4abc} \frac{\sin(\alpha)}{a} (a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4)\end{aligned}\quad (1.2)$$

und analog für den dritten und vierten Summanden

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) = \frac{1}{4abc} \frac{\sin(\beta)}{b} (-a^4 + b^4 + 2a^2c^2 - c^4), \quad (1.3)$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) = \frac{1}{4abc} \frac{\sin(\gamma)}{c} (-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + c^4). \quad (1.4)$$

Nach dem Sinussatz ist $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$ und wir erhalten für die Summe des ersten, dritten und vierten Summanden aus (1.1) den Ausdruck

$$\frac{1}{4abc} \frac{\sin(\alpha)}{a} (-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2) \quad (1.5)$$

Für den zweiten Summanden aus (1.1) berechnen wir, wieder unter Benutzung von Sinus- und Kosinussatz,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) &= abc \frac{\sin(\alpha)}{a} \frac{\sin(\beta)}{b} \frac{\sin(\gamma)}{c} \\ &= abc \left(\frac{\sin(\alpha)}{a} \right)^3 \\ &= \frac{bc \sin(\alpha)}{a} (1 - \cos(\alpha)^2) \\ &= \frac{bc \sin(\alpha)}{a} \left(1 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4abc} \frac{\sin(\alpha)}{a} \left(4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2 \right),\end{aligned}\quad (1.6)$$

was mit dem Ausdruck in (1.5) übereinstimmt. Setzen wir (1.5) und (1.6) in (1.1) ein, erhalten wir somit $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, d. h. die Winkelsumme muss ein ganzzahliges Vielfaches von π sein,

$$\alpha + \beta + \gamma = k \cdot \pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$. Da alle Winkelgrößen positiv sind, muss $k > 0$ sein. Es kommen also nur $k = 1, 2, 3, \dots$ in Frage. Wenn wir $k \geq 2$ ausschließen, haben wir den Satz bewiesen.

Nehmen wir also an, $k \geq 2$, d. h. $\alpha + \beta + \gamma \geq 2\pi$. Wären dann zwei der drei Winkelgrößen $\leq \pi/2$, so müsste die dritte $\geq \pi$ sein, was nicht erlaubt ist. Also ist höchstens eine der drei Winkelgrößen $\leq \pi/2$. Seien o. B. d. A. $\beta, \gamma > \pi/2$. Dann ist

$$\left\langle \frac{A-B}{\|A-B\|}, \frac{C-B}{\|C-B\|} \right\rangle = \cos(\beta) < 0,$$

also

$$\langle A-B, C-B \rangle < 0,$$

und analog

$$\langle A-C, B-C \rangle < 0.$$

Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$\begin{aligned}
 0 &> \langle A - B, C - B \rangle + \langle A - C, B - C \rangle \\
 &= \langle A, C \rangle - \langle A, B \rangle - \langle B, C \rangle + \langle B, B \rangle + \langle A, B \rangle - \langle A, C \rangle - \langle C, B \rangle + \langle C, C \rangle \\
 &= \langle B, B \rangle - 2 \langle B, C \rangle + \langle C, C \rangle \\
 &= \|B - C\|^2,
 \end{aligned}$$

Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Definition 1.3.7 Ist $\Delta = (a, b, c)$ ein euklidisches Dreieck, so heißt $G(a, \frac{1}{2}(b+c))$ Seitenhalbierende von Δ durch a .

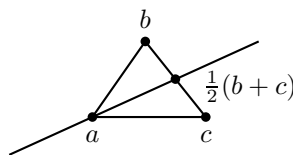


Abb. 33

Satz 1.3.8 (Schwerpunktsatz) In einem euklidischen Dreieck (a, b, c) schneiden sich die drei Seitenhalbierenden genau im Punkt $s = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

Der Punkt s heißt Schwerpunkt von (a, b, c) .

Beweis.

1. Wir wollen zunächst zeigen, dass s auf allen Seitenhalbierenden liegt.

$$\begin{aligned}
 G(a, \frac{1}{2}(b+c)) &= \{t \cdot a + (1-t) \cdot \frac{1}{2}(b+c) \mid t \in \mathbb{R}\}. \\
 \frac{1}{3}(a+b+c) &= \frac{1}{3} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(b+c) \\
 &= t \cdot a + (1-t) \cdot \frac{1}{2}(b+c) \in G(a, \frac{1}{2}(b+c))
 \end{aligned}$$

für $t = \frac{1}{3}$. Analog zeigt man, dass s auf den anderen Seitenhalbierenden liegt.

2. Der Schnittpunkt ist eindeutig:

Gäbe es weitere Schnittpunkte, so wären alle Seitenhalbierenden identisch. Auf dieser Geraden lägen dann jedoch sowohl a , b als auch c ; aber dann wäre (a, b, c) kein euklidisches Dreieck. \square

Bemerkung 1.3.9 Der Schwerpunkt zerlegt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, d.h. die Seitenhalbierenden dritteln sich:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{3}(a+b+c) \\
 \Rightarrow \|s-a\| &= \left\| \frac{1}{3}(a+b+c) - a \right\| \\
 &= \left\| \frac{1}{3}(b+c) - \frac{2}{3}a \right\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \|b + c - 2a\|; \\
\|s - \frac{1}{2}(b + c)\| &= \left\| \frac{1}{3}(a + b + c) - \frac{1}{2}(b + c) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{3}a - \frac{1}{6}(b + c) \right\| \\
&= \frac{1}{6} \|2a - (b + c)\| \\
\Rightarrow \|s - a\| &= 2 \left\| s - \frac{1}{2}(b + c) \right\|.
\end{aligned}$$

Definition 1.3.10 Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein euklidisches Dreieck.

Die Gerade H_C , die C enthält und $G(A, B)$ senkrecht schneidet, heißt *Höhe von Δ durch C* .

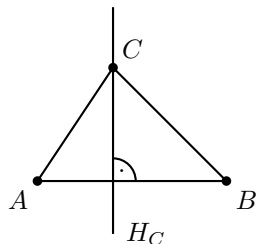


Abb. 34

Bemerkung 1.3.11 Am einfachsten können wir die Höhe in ihrer Normalform angeben:

$$H_C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, B - A \rangle = \langle C, B - A \rangle\}.$$

Satz 1.3.12 (Höhensatz) In einem euklidischen Dreieck schneiden sich die drei Höhen in genau einem Punkt.

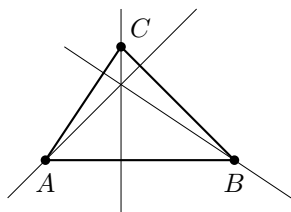


Abb. 35

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die Höhen paarweise nicht parallel liegen, denn wenn zwei Höhen parallel wären, so müssten auch die Dreiecksseiten, auf denen diese senkrecht stehen, parallel sein; und da je zwei Dreiecksseiten immer einen Punkt gemeinsam haben, lägen die drei Eckpunkte auf einer Geraden.

Es existiert also ein eindeutiger Schnittpunkt von H_A und H_B , und wir müssen nur zeigen, dass dieser auch auf H_C liegt. Sei S dieser Schnittpunkt.

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad \langle S, C - B \rangle &= \langle A, C - B \rangle, \\
\text{II} \quad \langle S, C - A \rangle &= \langle B, C - A \rangle \\
\stackrel{\text{II-I}}{\implies} \quad \langle S, B - A \rangle &= \langle B, C - A \rangle - \langle A, C - B \rangle \\
&= \langle B, C \rangle - \langle B, A \rangle - \langle A, C \rangle + \langle A, B \rangle \\
&= \langle B - A, C \rangle,
\end{aligned}$$

also liegt S tatsächlich auf H_C . \square

Satz 1.3.13 (Höhenformel) Sei (A, B, C) ein euklidisches Dreieck. Wir nennen den Schnittpunkt von H_C mit $G(A, B)$ C' , analog seien A' und B' die Punkte, in denen H_A bzw. H_B senkrecht auf die entsprechenden Dreiecksseiten treffen.

Weiterhin bezeichnen wir die Abstände folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
a &:= \|B - C\|, \\
b &:= \|A - C\|, \\
c &:= \|A - B\|; \\
h_C &:= \|C - C'\|, \\
h_B &:= \|B - B'\|, \\
h_A &:= \|A - A'\|;
\end{aligned}$$

und die Winkel an den Eckpunkten des Dreiecks:

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \sphericalangle(B, A, C), \\
\beta &:= \sphericalangle(A, B, C), \\
\gamma &:= \sphericalangle(B, C, A).
\end{aligned}$$

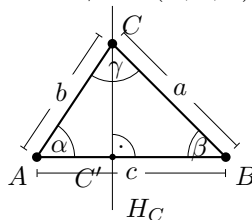


Abb. 36

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
h_C &= b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta), \\
h_B &= a \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\alpha), \\
h_A &= c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma).
\end{aligned}$$

Beweis. Wenden wir den Sinussatz (Satz 1.3.4) auf das Dreieck (A, C, C') an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{h_C}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = b \\
\Rightarrow h_C &= b \cdot \sin(\alpha).
\end{aligned}$$

Analog erhält man alle anderen Beziehungen. \square

1.4 Strahlensätze und Verwandte

Definition 1.4.1 Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$. dann heißt das n -Tupel (a_1, \dots, a_n) n -Eck.

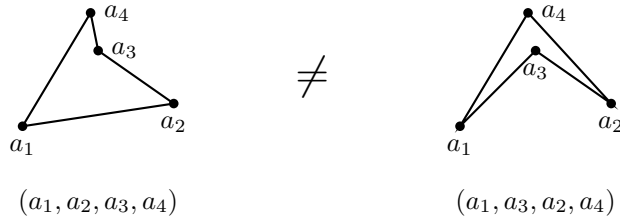


Abb. 37

Das n -Eck heißt *entartet*, falls drei aufeinanderfolgende Ecken a_i, a_{i+1}, a_{i+2} (bzw. a_n, a_1, a_2 oder a_{n-1}, a_n, a_1) auf einer Geraden liegen.

Insbesondere müssen bei nicht entarteten n -Ecken je zwei aufeinander folgende Ecken verschieden sein.

Bemerkung 1.4.2 Diese Definition verallgemeinert den Begriff des Dreiecks auf eine beliebige Anzahl von Eckpunkten. Euklidische Dreiecke sind hiernach nichts anderes als nicht entartete Dreiecke.

Beispiel 1.4.3

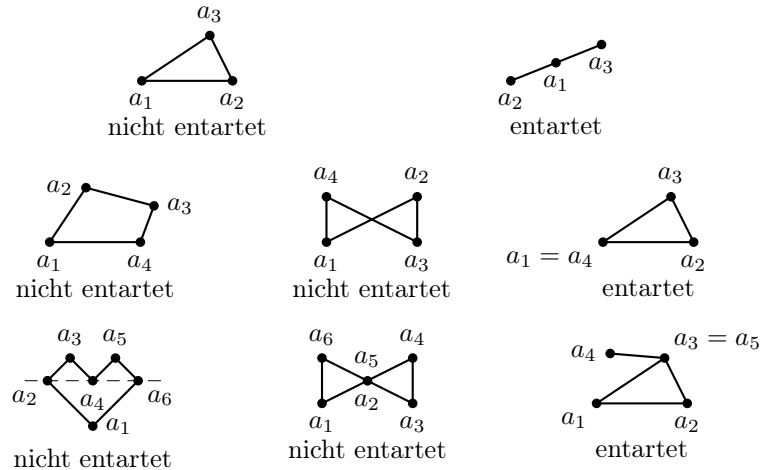


Abb. 38

In den beiden Sechsecken liegen nur solche drei Punkte auf einer Geraden, die nicht aufeinanderfolgen.

Definition 1.4.4 Ein Viereck (a, b, c, d) heißt *Parallelogramm*, falls

$$G(a, b) \parallel G(c, d) \text{ und } G(a, d) \parallel G(b, c).$$

Satz 1.4.5 (Diagonalensatz) Sei $V = (a, b, c, d)$ ein nicht entartetes Viereck. Dann sind äquivalent:

1. V ist ein Parallelogramm;
2. $c - b = d - a$ und $b - a = c - d$;
3. Die Diagonalen $G(a, c)$ und $G(b, d)$ schneiden sich genau in dem Punkt m mit

$$\|m - b\| = \|m - d\| \text{ und } \|m - a\| = \|m - c\|.$$

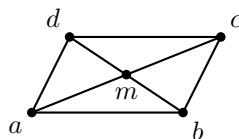


Abb. 39

Kurz formuliert, besagt Bedingung 3, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.

Beweis.

„ $2 \Rightarrow 1$ “ Aus $c - b = d - a$ folgt:

$$G(b, c) = G_{b, c-b} = G_{b, d-a} \parallel G_{a, d-a} = G(a, d).$$

Analog folgt aus $b - a = c - d$ sofort $G(a, b) \parallel G(c, d)$.

Somit ist V ein Parallelogramm.

„ $1 \Rightarrow 2$ “ Sei V ein Parallelogramm.

Dann ist $G(a, b) \parallel G(c, d)$, also gibt es eine reelle Zahl α mit

$$c - d = \alpha(a - b).$$

Analog finden wir ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$d - a = \beta(c - b).$$

Wenn man nun in der ersten Gleichung auf beiden Seiten $(b - a)$ und in der zweiten $(c - b)$ subtrahiert, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & a - b + c - d & = (\alpha - 1)(b - a) \\ \text{II} & -a + b - c + d & = (\beta - 1)(c - b) \\ \hline \text{I+II} & 0 & = (\alpha - 1)(b - a) + (\beta - 1)(c - b). \end{array}$$

Da V nicht entartet ist, sind die Vektoren $(b - a)$ und $(c - b)$ linear unabhängig und die Gleichung hat nur die triviale Lösung

$$\alpha - 1 = \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1.$$

Daraus ergibt sich die gewünschte Aussage

$$c - d = a - b \text{ und } d - a = c - b.$$

„2 \Rightarrow 3“ Wir wählen $m \in \mathbb{R}^2$ mit

$$m = \frac{1}{2}(a + c).$$

Dies ist der Mittelpunkt der Diagonale \overline{ac} , weshalb auch

$$\|m - a\| = \|m - c\|$$

gilt. Wir zeigen nun, dass m auch der Mittelpunkt der Diagonale \overline{bd} ist.

Laut Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} c - b &= d - a \\ \Leftrightarrow a + c &= b + d \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a + c) &= \frac{1}{2}(b + d). \end{aligned}$$

Die beiden Diagonalen schneiden sich also im Punkt m .

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass die Diagonalen keinen weiteren Schnittpunkt haben. Wäre das der Fall, so müssten sie identisch sein und damit lägen a, b, c, d auf einer Geraden – das Parallelogramm wäre entartet. ζ

„3 \Rightarrow 2“ Eigenschaft 3 sagt aus: Die beiden Geraden schneiden sich im Mittelpunkt, also

$$\frac{1}{2}(a + c) = m = \frac{1}{2}(b + d).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit 2 und zieht a und b ab, so erhält man

$$c - b = d - a;$$

bei Multiplikation mit 2 und anschließender Subtraktion von a und d ergibt sich

$$c - d = b - a. \quad \square$$

Satz 1.4.6 (Strahlensatz) Seien $G, H \subset \mathbb{R}^2$ Geraden mit $G \cap H = \{p\}$. Seien $a, a' \in G - \{p\}$, $b, b' \in H - \{p\}$.

Dann sind äquivalent:

1. $G(a, b) \parallel G(a', b')$;
2. p liegt zwischen a und a' genau dann, wenn p auch zwischen b und b' liegt, und

$$\frac{\|p - a'\|}{\|p - a\|} = \frac{\|p - b'\|}{\|p - b\|}.$$

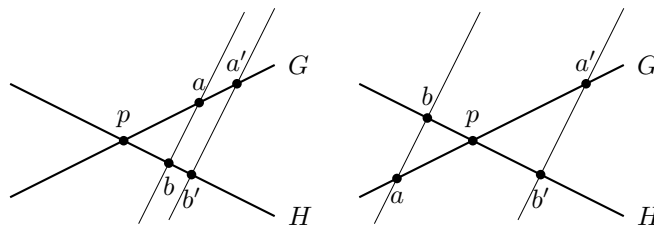


Abb. 40

Beweis. Wir können eine Translation anwenden, die p auf 0 abbildet. Da Translationen sowohl die Abstände als auch die Eigenschaft der Parallelität unverändert lassen, können wir auch einfach o.B.d.A. annehmen, dass $p = 0$ ist.

Wähle nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $a' = \alpha a$ und $b' = \beta b$.

a und b sind linear unabhängig, da sonst $G = H = G \cap H \supsetneq \{p\}$.

„1 \Rightarrow 2“ Da $G(a, b) \parallel G(a', b')$, können wir ein $\gamma \in \mathbb{R}$ finden mit $(b' - a') = \gamma(b - a)$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta b - \alpha a &= b' - a' = \gamma(b - a) \\ \implies (\gamma - \alpha)a + (\beta - \gamma)b &= 0 \\ \stackrel{a, b \text{ lin. unabh.}}{\implies} \gamma - \alpha &= \beta - \gamma = 0 \\ \implies \alpha &= \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{\|0 - a'\|}{\|0 - a\|} = \frac{\|a'\|}{\|a\|} = \frac{|\alpha| \|a\|}{\|a\|} = |\alpha|. \quad (1.7)$$

Ebenso ergibt sich

$$\frac{\|0 - b'\|}{\|0 - b\|} = |\beta|, \quad (1.8)$$

und wegen $\alpha = \beta$ auch

$$\frac{\|0 - a'\|}{\|0 - a\|} = \frac{\|0 - b'\|}{\|0 - b\|}.$$

Weiter sehen wir, dass 0 genau dann zwischen a und a' liegt, wenn α negativ ist, und zwischen b und b' , wenn β negativ ist.

Da nun aber $\alpha = \beta$ gilt, haben sie insbesondere dasselbe Vorzeichen, und damit liegt 0 zwischen a und a' dann und nur dann, wenn 0 auch zwischen b und b' liegt.

„2 \Rightarrow 1“ Wir benutzen die Gleichungen (1.7) und (1.8) aus dem ersten Beweisteil, um zu sehen, dass

$$|\alpha| = \frac{\|0 - a'\|}{\|0 - a\|} \stackrel{\text{vor.}}{=} \frac{\|0 - b'\|}{\|0 - b\|} = |\beta|.$$

Die zweite Voraussetzung, dass 0 genau dann zwischen a und a' liegt, wenn 0 auch zwischen b und b' liegt, führt uns zu der Erkenntnis, dass α und β dasselbe Vorzeichen besitzen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & \alpha = \beta \\ \implies & b' - a' = \beta b - \alpha a = \alpha(b - a) \\ \implies & G(a', b') \parallel G(a, b). \end{aligned}$$

□

Satz 1.4.7 (Satz von Desargues) Seien $F, G, H \subset \mathbb{R}^2$ paarweise verschiedene Geraden. Seien $a, a' \in F$, $b, b' \in G$, $c, c' \in H$. Weiterhin gelte entweder

1. F, G, H sind zueinander parallel; oder
2. $F \cap G \cap H = \{p\}$ und $a, a', b, b', c, c' \neq p$.

Dann gilt:

$$G(a, b) \parallel G(a', b') \wedge G(b, c) \parallel G(b', c') \implies G(a, c) \parallel G(a', c').$$

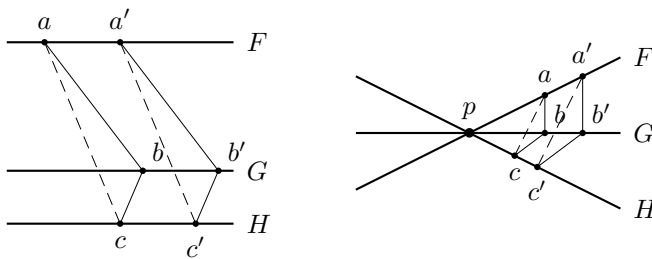


Abb. 41

Beweis.

1. F, G, H seien zueinander parallel.
Sei $G(a, b) \parallel G(a', b')$ und $G(b, c) \parallel G(b', c')$.

$$F \parallel G, G(a, b) \parallel G(a', b') \implies (a, b, b', a') \text{ ist ein Parallelogramm.}$$

Daraus folgt mit Satz 1.4.5

$$b - a = b' - a'.$$

Analog erhält man aus $G \parallel H$ und $G(b, c) \parallel G(b', c')$ die Gleichung

$$c - b = c' - b'.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$c - a = c' - a' \implies G(a, c) \parallel G(a', c').$$

2. Sei $F \cap G \cap H = \{p\}$ und $a, a', b, b', c, c' \neq p$.
Sei $G(a, b) \parallel G(a', b')$ und $G(b, c) \parallel G(b', c')$.

$$G(a, b) \parallel G(a', b') \stackrel{\text{Satz 1.4.6}}{\implies} \frac{\|a' - p\|}{\|a - p\|} = \frac{\|b' - p\|}{\|b - p\|}$$

und p liegt genau dann zwischen a und a' , wenn p auch zwischen b und b' liegt. Analog ergibt sich aus $G(b, c) \parallel G(b'c')$ die Gleichung

$$\frac{\|b' - p\|}{\|b - p\|} = \frac{\|c' - p\|}{\|c - p\|}$$

und die Eigenschaft, dass p zwischen b und b' genau dann liegt, wenn p auch zwischen c und c' liegt.

Wenn p also zwischen a und a' liegt, liegt es auch zwischen b und b' und damit auch zwischen c und c' und umgekehrt; und durch Gleichsetzen der Abstandsverhältnisse ergibt sich

$$\frac{\|a' - p\|}{\|a - p\|} = \frac{\|c' - p\|}{\|c - p\|}.$$

Wenden wir nun wieder Satz 1.4.6 (den Strahlensatz) an, erhalten wir sofort

$$G(a, c) \parallel G(a', c'). \quad \square$$

Satz 1.4.8 (Pappus von Alexandria) Seien $G, H \subset \mathbb{R}^2$ Geraden. Seien $a, a', a'' \in G - H$ und $b, b', b'' \in H - G$ paarweise verschieden.

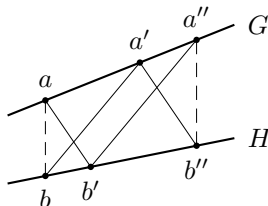


Abb. 42

Dann gilt:

Ist $G(a, b') \parallel G(a', b'')$ und ist $G(a', b) \parallel G(a'', b')$, so ist auch $G(a, b) \parallel G(a'', b'')$.

Beweis. Es ist $G \neq H$, da wir sonst keine Punkte auf $G - H$ wählen könnten.

Sei $G(a, b') \parallel G(a', b'')$ und $G(a', b) \parallel G(a'', b')$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: G und H sind parallel.

Dann ist (a, b', b'', a') ein Parallelogramm und damit nach Satz 1.4.5

$$b' - a = b'' - a'.$$

Auch (a', b, b', a'') ist ein Parallelogramm, und daraus erhalten wir

$$b - a' = b' - a''.$$

Addiert man diese zwei Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} b' - a + b - a' &= b'' - a' + b' - a'' && \xrightarrow{-b'+a'} b - a = b'' - a'' \\ &&& \implies G(a, b) \parallel G(a'', b''). \end{aligned}$$

2. Fall: G und H sind nicht parallel.

Der Schnittpunkt von G und H sei o.B.d.A. der Koordinatenursprung.

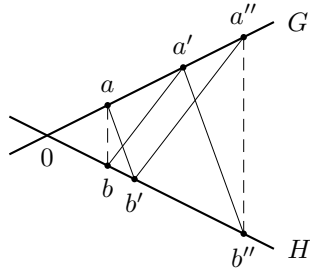


Abb. 43

Dann sind a, a', a'' linear abhängig.

Schreibe also $a' = \alpha a$, $a'' = \alpha' a'$ mit $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Ebenso schreiben wir $b' = \beta b$, $b'' = \beta' b'$ mit $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$.

Da $G(a, b) \parallel G(a', b'')$, folgt aus dem Strahlensatz (Satz 1.4.6), dass $\alpha = \beta'$ ist.

(Zunächst erhalten wir $\frac{\|0-a'\|}{\|0-a\|} = \frac{\|0-b''\|}{\|0-b'\|}$ und eine Aussage über die Seite auf den Geraden bezüglich des Schnittpunktes, auf welcher a, a', b', b'' liegen; im Beweis des Strahlensatzes haben wir jedoch gesehen, dass dies äquivalent zu $\alpha = \beta'$ ist.)

Analog ergibt sich aus $G(a', b) \parallel G(a'', b')$ die Aussage $\alpha' = \beta$.

Multiplizieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Da dies die Faktoren sind, mit denen man die ungestrichenen Vektoren multiplizieren muss, um die doppelt gestrichenen zu erhalten, liefert der Strahlensatz (in umgekehrter Richtung)

$$G(a, b) \parallel G(a'', b''). \quad \square$$

Satz 1.4.9 (Pascal) Seien $G, H \subset \mathbb{R}^2$ Geraden, die sich genau im Punkt p schneiden. Seien $a, a', a'' \in G - \{p\}$ und $b, b', b'' \in H - \{p\}$ paarweise verschieden.

Ferner sei $G(a', b'') \cap G(a'', b') = \{c\}$, $G(a, b'') \cap G(a'', b) = \{c'\}$ und $G(a, b') \cap G(a', b) = \{c''\}$.

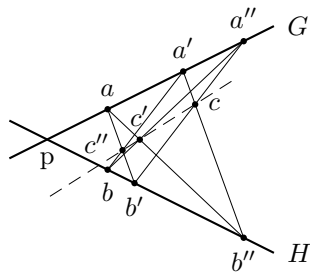


Abb. 44

Dann liegen c, c', c'' auf einer Geraden.

Beweis.

1. Zunächst können wir wieder o.B.d.A. $p = 0$ annehmen. Dann sind a, a', a'' linear abhängig und wir können schreiben $a' = \alpha'a, a'' = \alpha''a$ und ebenso $b' = \beta'b, b'' = \beta''b$.

Weiterhin sind a und b linear unabhängig, da sonst $G = H$ wäre.

2. Wir wollen nun einen Ausdruck für c bestimmen.

Da c der Schnittpunkt von $G(a', b'')$ und $G(a'', b')$ ist, lässt sich ein $s \in \mathbb{R}$ finden mit

$$c = sa' + (1-s)b'' = s\alpha'a + (1-s)\beta''b,$$

und ebenso ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$c = tb' + (1-t)a'' = t\beta'b + (1-t)\alpha''a.$$

Da a, b linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten in dieser Darstellung von c eindeutig, und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} s\alpha' &= (1-t)\alpha'', \\ t\beta' &= (1-s)\beta''. \end{aligned}$$

Stellt man die zweite Gleichung nach t um und setzt das Ergebnis in die erste ein, so erhält man

$$\begin{aligned} s\alpha' &= \left(1 - (1-s)\frac{\beta''}{\beta'}\right)\alpha'' \\ &= \alpha'' \cdot \frac{\beta' - (1-s)\beta''}{\beta'} \\ &= \alpha'' \left(\frac{\beta' - \beta''}{\beta'} + \frac{s\beta''}{\beta'}\right) \\ \Leftrightarrow s \left(\alpha' - \frac{\alpha''\beta''}{\beta'}\right) &= \alpha'' \cdot \frac{\beta' - \beta''}{\beta'} \\ \Leftrightarrow s \cdot \frac{\alpha'\beta' - \alpha''\beta''}{\beta'} &= \alpha'' \cdot \frac{\beta' - \beta''}{\beta'} \\ \Leftrightarrow s &= \alpha'' \cdot \frac{\beta' - \beta''}{\alpha'\beta' - \alpha''\beta''}. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Rollen der β und α , so ergibt sich ein Ausdruck für t :

$$t = \beta'' \cdot \frac{\alpha' - \alpha''}{\alpha'\beta' - \alpha''\beta''}.$$

Daraus erhalten wir nun den gesuchten Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} c &= s\alpha'a + (1-s)\beta''b \\ &= s\alpha'a + t\beta'b \\ &= \alpha'\alpha'' \frac{\beta' - \beta''}{\alpha'\beta' - \alpha''\beta''}a + \beta'\beta'' \frac{\alpha' - \alpha''}{\alpha'\beta' - \alpha''\beta''}b. \end{aligned}$$

Um c' zu erhalten, müssen wir die Rollen der ungestrichenen und der einfach gestrichenen Buchstaben vertauschen; aber da α' der Faktor ist, mit dem a multipliziert wird, um a' zu erhalten, muss es durch diejenige Zahl ersetzt werden, mit der a multipliziert wird, um a zu erhalten, und das ist 1. Dasselbe gilt natürlich auch für β' .

$$\begin{aligned} c' &= 1 \cdot \alpha'' \frac{1 - \beta''}{1 \cdot 1 - \alpha''\beta''}a + 1 \cdot \beta'' \frac{1 - \alpha''}{1 \cdot 1 - \alpha''\beta''}b \\ &= \alpha'' \frac{\beta'' - 1}{\alpha''\beta'' - 1}a + \beta'' \frac{\alpha'' - 1}{\alpha''\beta'' - 1}b. \end{aligned}$$

Für c'' müssen wir jetzt nur noch einfach gestrichene und doppelt gestrichene Buchstaben vertauschen und erhalten:

$$c'' = \alpha' \frac{\beta' - 1}{\alpha' \beta' - 1} a + \beta' \frac{\alpha' - 1}{\alpha' \beta' - 1} b.$$

Bisher haben wir unbekümmert durch die unterschiedlichsten Ausdrücke dividiert. Zumindest jedoch beim Endergebnis können wir sicher sein, dass die Nenner nicht verschwinden, denn wir fordern ja, dass die Schnittpunkte existieren und eindeutig sind. Wir halten also fest:

$$\begin{aligned} \alpha' \beta' - \alpha'' \beta'' &\neq 0, \\ \alpha' \beta' - 1 &\neq 0, \\ \alpha'' \beta'' - 1 &\neq 0. \end{aligned}$$

3. Nun können wir überprüfen, ob c , c' und c'' tatsächlich kollinear sind. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass $c' - c$ und $c'' - c$ linear abhängig sind. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} c' - c &= \alpha'' \left(\frac{\beta'' - 1}{\alpha'' \beta'' - 1} - \alpha' \frac{\beta' - \beta''}{\alpha' \beta' - \alpha'' \beta''} \right) a \\ &\quad + \beta'' \left(\frac{\alpha'' - 1}{\alpha'' \beta'' - 1} - \beta' \frac{\alpha' - \alpha''}{\alpha' \beta' - \alpha'' \beta''} \right) b \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{\alpha'' \beta''}{\alpha'' \beta'' - 1} \underbrace{\left(\frac{-\alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'' \beta'' + \alpha' \alpha'' \beta' + \alpha' - \alpha' \alpha'' \beta''}{\alpha' \beta' - \alpha'' \beta''} \right)}_{=:\gamma_a} \cdot a \\ &\quad + \frac{\alpha'' \beta''}{\alpha'' \beta'' - 1} \underbrace{\left(\frac{-\beta'' - \alpha' \beta' + \alpha'' \beta'' + \alpha' \beta' \beta'' + \beta' - \alpha' \beta' \beta''}{\alpha' \beta' - \alpha'' \beta''} \right)}_{=:\gamma_b} \cdot b \\ &= \frac{\alpha'' \beta''}{\alpha'' \beta'' - 1} (\gamma_a \cdot a + \gamma_b \cdot b). \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Ausdruck für $c'' - c$ wieder dadurch erhalten, dass wir die einfach gestrichenen und die doppelt gestrichenen Buchstaben vertauschen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst den Term für γ_a .

Dort tauchen die einfach gestrichenen und die doppelt gestrichenen Buchstaben immer mit entgegengesetzten Vorzeichen auf. Wenn wir diese nun also vertauschen, wird sich sowohl das Vorzeichen des Zählers als auch das des Nenners umkehren – der Term, den wir oben γ_a genannt haben, bleibt auch im Ausdruck für $c'' - c$ unverändert. Dasselbe gilt natürlich für γ_b .

Somit ergibt sich:

$$c'' - c = \frac{\alpha' \beta'}{\alpha' \beta' - 1} (\gamma_a \cdot a + \gamma_b \cdot b).$$

Nun sieht man, dass sich diese Ausdrücke nur durch einen reellen Faktor unterscheiden, so dass gilt:

$$\frac{\alpha' \beta' - 1}{\alpha' \beta'} (c' - c) - \frac{\alpha'' \beta'' - 1}{\alpha'' \beta''} (c'' - c) = 0.$$

Die Koeffizienten bei $(c' - c)$ und $(c'' - c)$ sind aber beide von null verschieden, da wir in Beweisteil 2 erkannt haben, dass deren Zähler (oben waren es die Nenner) nicht null werden. Und wenn sich 0 nichttrivial aus $(c' - c)$ und $(c'' - c)$ linearkombinieren lässt, bedeutet dies, dass diese Vektoren linear abhängig sind. \square

1.5 Kreise

Definition 1.5.1 Sei $p \in \mathbb{R}^2$, sei $r > 0$ reell.

Dann heißt $K_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p\| = r\}$ der *Kreis um p mit dem Radius r* . Der Punkt p heißt dabei *Mittelpunkt des Kreises*.

Wir erinnern uns an das Lösen von quadratischen Gleichungen:

Lemma 1.5.2 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Sei $L = \{t \in \mathbb{R} \mid at^2 + bt + c = 0\}$.

Dann hat L

1. genau zwei Elemente, falls $b^2 - 4ac > 0$, und zwar ist

$$L = \left\{ \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) \right\};$$

2. genau ein Element, falls $b^2 - 4ac = 0$, und zwar ist

$$L = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\};$$

3. kein Element, falls $b^2 - 4ac < 0$ (wir haben $L \subset \mathbb{R}$ definiert), also

$$L = \emptyset.$$

Korollar 1.5.3 (Wurzelsatz von Vieta) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Sei $b^2 - 4ac \geq 0$. Sei $\{t_1, t_2\}$ die Menge der Lösungen von $at^2 + bt + c = 0$. (Im Falle $b^2 - 4ac = 0$ ist $t_1 = t_2$.)

Dann gilt:

$$t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}, \quad t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.5.2 Sind t_1, t_2 gegeben durch

$$t_i = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right).$$

Wir berechnen nun

$$t_1 + t_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

sowie

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{4a^2} \cdot (b^2 - (b^2 - 4ac)) = \frac{c}{a}. \quad \square$$

Das Lemma wollen wir nun nutzen, um Schnittgebilde von Geraden und Kreisen zu klassifizieren.

Sei also $K_r(m)$ ein Kreis mit $m \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, sei $G_{p,v}$ eine Gerade mit $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$.

Sei $x = p + tv \in G_{p,v}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 x \in K_r(m) &\Leftrightarrow r = \|x - m\| \\
 \Leftrightarrow r^2 &= \|x - m\|^2 \\
 &= \langle x - m, x - m \rangle \\
 &= \langle p + tv - m, p + tv - m \rangle \\
 &= \|v\|^2 \cdot t^2 + 2\langle p - m, v \rangle \cdot t + \|p - m\|^2 \\
 \Leftrightarrow \|v\|^2 \cdot t^2 + 2\langle p - m, v \rangle \cdot t + \|p - m\|^2 - r^2 &= 0 \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nach Lemma 1.5.2 drei Fälle für die Anzahl der Schnittpunkte:

1. Fall: Die Gerade schneidet den Kreis in genau zwei Punkten, falls

$$\begin{aligned}
 0 &< 4\langle p - m, v \rangle^2 - 4\|v\|^2(\|p - m\|^2 - r^2) \\
 \Leftrightarrow 0 &< \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2 - \|p - m\|^2 + r^2 \\
 \Leftrightarrow \|p - m\|^2 &< r^2 + \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Solch eine Gerade nennt man *Sekante von $K_r(m)$* .

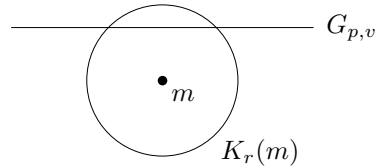


Abb. 45

2. Fall: Die Gerade schneidet den Kreis in genau einem Punkt, falls

$$\|p - m\|^2 = r^2 + \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2. \quad (1.11)$$

Dieser Ausdruck ist immer größer oder gleich r^2 , somit besitzt $G_{p,v}$ keine Punkte im Inneren des Kreises.

Man nennt solch eine Gerade *Tangente an $K_r(m)$* .

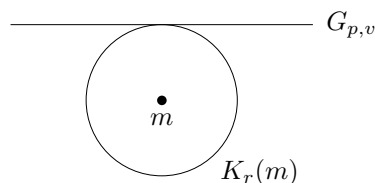


Abb. 46

3. Fall: Die Gerade schneidet den Kreis nicht, falls

$$\|p - m\|^2 > r^2 + \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2, \quad (1.12)$$

also insbesondere größer als r^2 . Somit verläuft $G_{p,v}$ vollständig außerhalb des Kreises.

Geraden, die dies erfüllen, nennt man *Passanten von $K_r(m)$* .

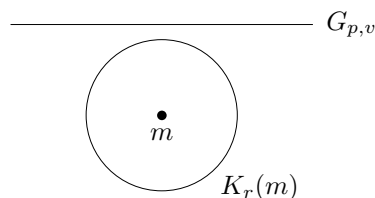


Abb. 47

Korollar 1.5.4 Sei $K_r(m)$ ein Kreis, sei G eine Gerade mit dem Richtungsvektor v . Sei p ein Schnittpunkt von G mit $K_r(m)$.

Dann ist G eine Tangente von $K_r(m)$ genau dann, wenn $\sphericalangle(p - m, v) = \frac{\pi}{2}$.

Beweis. G kann keine Passante sein, da wir sonst kein p fänden.

p liegt auf dem Kreis, also ist $\|p - m\| = r$. Setzen wir dies in (1.10) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} r^2 &< r^2 + \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2 \\ \Leftrightarrow 0 &< \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\neq \left\langle p - m, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ \Leftrightarrow \sphericalangle(p - m, v) &\neq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

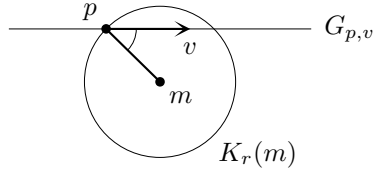


Abb. 48

Analog ergibt sich aus (1.11) mit p als Schnittpunkt:

$$\sphericalangle(p - m, v) = \frac{\pi}{2}.$$

□

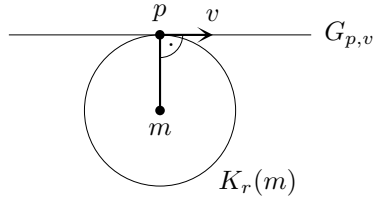


Abb. 49

Bemerkung 1.5.5 Für alle $f \in E(2)$ gilt:

$$f(K_r(m)) = K_r(f(m)).$$

Beweis. Sei $p \in K_r(m)$. Dann ist

$$\overline{f(p)f(m)} \equiv \overline{pm} \Rightarrow \|f(p) - f(m)\| = \|p - m\| \Rightarrow f(p) \in K_r(f(m)),$$

also ist $f(K_r(m)) \subset K_r(f(m))$.

Die umgekehrte Inklusion folgt sofort, da mit f auch f^{-1} in $E(2)$ liegt.

Satz 1.5.6 (Zwei-Sehnen-Satz) Sei $K = K_r(m)$ ein Kreis, sei $p \in \mathbb{R}^2 - K$. Dann ist für alle Sekanten von K , die durch p verlaufen, das Produkt der Sehnenabschnitte ζ_1 und ζ_2 identisch.

p im Inneren des Kreises

p außerhalb des Kreises

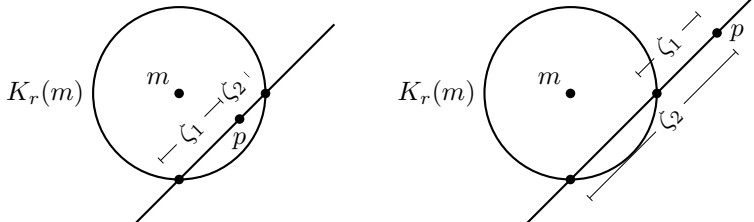


Abb. 50

Beweis. Sei $G_{p,v}$ eine Sekante von K durch p mit $\|v\| = 1$.

Gleichung (1.9) beschreibt, dass $x = p + tv \in G_{p,v}$ auf K liegt genau dann, wenn

$$\underbrace{\|v\|^2}_{=1} t^2 + 2\langle p - m, v \rangle t + \|p - m\|^2 - r^2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung seien t_1 und t_2 , wodurch die Punkte $x_i = p + t_i v$ beschrieben werden. Wir bestimmen nun

$$\zeta_i = \|x_i - p\| = \|p + t_i v - p\| = |t_i| \cdot \|v\| = |t_i|.$$

Mit dem Satz von Vieta (Korollar 1.5.3) ergibt sich dann

$$\zeta_1 \zeta_2 = |t_1 t_2| = \left| \frac{\|p - m\|^2 - r^2}{\|v\|^2} \right| = \left| \|p - m\|^2 - r^2 \right|.$$

Dieser Ausdruck jedoch hängt lediglich vom Kreis und vom Punkt p ab, nicht aber von der Wahl der Sekante. \square

Satz 1.5.7 (Sehnen-Tangenten-Satz) Sei K ein Kreis, sei $p \in \mathbb{R}^2$ außerhalb des Kreises.

Sei G eine Sekante von K durch p mit den Sehnenabschnitten ζ_1 und ζ_2 .

Sei T eine Tangente an K durch p ; der Schnittpunkt von T und K sei q .

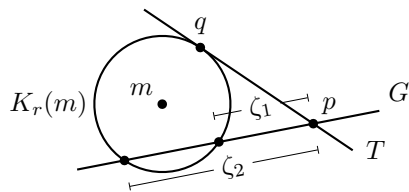


Abb. 51

Dann ist

$$\|p - q\|^2 = \zeta_1 \zeta_2.$$

Beweis. Eine Möglichkeit des Beweises ist, den Beweis des Zwei-Sehnen-Satzes für den Fall $t_1 = t_2$ nachzuvollziehen.

Eine andere Möglichkeit ist, den Sehnen-Tangenten-Satz als Grenzfall des Zwei-Sehnen-Satzes anzusehen und aus Gründen der Stetigkeit auf die gewünschte Aussage zu schließen.

Abb. 52

Bemerkung 1.5.8 Sei $K_r(M) \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis, sei $P \in \mathbb{R}^2$ mit $\|P - M\| > r$. Sei weiter T eine Tangente an $K_r(M)$, die P enthält. Q sei der Schnittpunkt von T mit $K_r(M)$.

Aus Korollar 1.5.4 wissen wir, dass das Dreieck (P, Q, M) rechtwinklig ist.

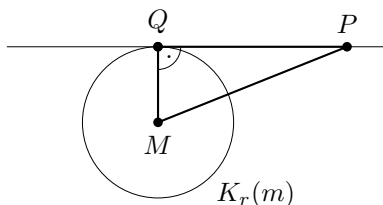


Abb. 53

M und P sind gegeben, und $\|M - Q\| = r$, da $Q \in K_r(M)$. Damit lässt sich nach dem Satz des Pythagoras (Korollar 1.3.3) auch $\|P - Q\| = \sqrt{\|M - P\|^2 - r^2}$ bestimmen.

Nun haben wir alle Seitenlängen durch P , M und r ausgedrückt; über den Kosinussatz der euklidischen Geometrie erhalten wir dann auch sämtliche Winkel im Dreieck als Ausdrücke, die nur von diesen drei Größen abhängen. Insbesondere ist der Winkel α zwischen der Tangente und $G(M, P)$ nur durch den Kreis und P festgelegt.

Die beiden Tangenten an $K_r(M)$ durch P erhält man also durch Abtragung desselben Winkels α auf beiden Seiten von $G(M, P)$.

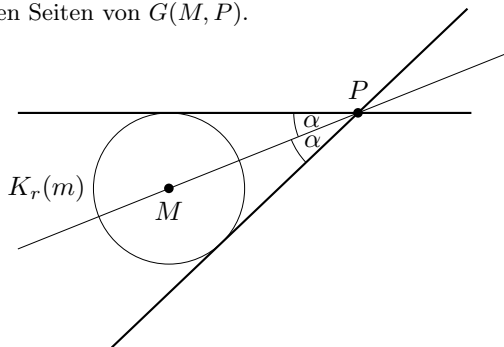


Abb. 54

$G(M, P)$ ist sonach die Winkelhalbierende der beiden Tangenten.

Bemerkung 1.5.9 Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis, sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann sind äquivalent:

1. K besitzt Punkte auf beiden Seiten von G ;
2. G ist eine Sekante von K .

Beweis. Wähle einen Punkt $p \in G$ und einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| = 1$, so dass G sich schreiben lässt als $G = G_{p,v}$. Sei m der Mittelpunkt, r der Radius von K , so dass $K = K_r(m)$.

Die Punkte $x = p + tv$, die auf K liegen, beschreibt die Gleichung (1.9). Anhand des Vorzeichens der Diskriminante

$$D = 4(\langle p - m, v \rangle^2 - \|p - m\|^2 + r^2)$$

lässt sich die Anzahl der Lösungen von (1.9) ablesen.

Wähle nun für \mathbb{R}^2 die Orthonormalbasis $(v, \mathbb{J}v)$, um $\|p - m\|$ zu bestimmen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\|x\|^2 = \langle x, v \rangle^2 + \langle x, \mathbb{J}v \rangle^2;$$

daraus ergibt sich mit $x = p - m$:

$$D = 4(r^2 - \langle p - m, \mathbb{J}v \rangle^2).$$

Wir zeigen die Äquivalenz der beiden Aussagen, indem wir die Äquivalenz der jeweiligen Negationen zeigen:

G ist Passante oder Tangente von K

$$\iff r^2 - \langle p - m, \mathbb{J}v \rangle^2 \leq 0 \quad \forall p \in G$$

$$\iff r^2 \leq \langle p - m, \mathbb{J}v \rangle^2 \quad \forall p \in G$$

$$\iff \langle p - m, \mathbb{J}v \rangle \geq r \quad \forall p \in G \text{ oder } \langle p - m, \mathbb{J}v \rangle \leq -r \quad \forall p \in G.$$

(Da das Skalarprodukt stetig in p ist, kann nur eine der Ungleichungen für alle p gelten.) Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die erste Ungleichung; der andere Fall verläuft analog.

Zu der Ungleichung kann auf beiden Seiten ein beliebiger Term addiert werden, also addieren wir $\langle -x, \mathbb{J}v \rangle$ mit $\|x\| = r$:

$$\iff \langle p - m - x, \mathbb{J}v \rangle \geq r - \underbrace{\langle x, \mathbb{J}v \rangle}_{\leq \|x\| \cdot \|\mathbb{J}v\| = r \cdot 1} \quad \forall p \in G \quad \forall x \in K_r(0)$$

$$\iff \langle p - m - x, \mathbb{J}v \rangle \geq 0 \quad \forall p \in G \quad \forall x \in K_r(0)$$

$$\stackrel{y=m+x}{\iff} \langle p - y, \mathbb{J}v \rangle \geq 0 \quad \forall p \in G \quad \forall y \in K_r(m).$$

Schließlich liefert Lemma 1.2.5, dass dies genau dann der Fall ist, wenn alle Punkte $y \in K_r(m)$ auf einer Seite von G liegen. \square

Satz 1.5.10 (Satz vom Inkreis) Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein nicht entartetes Dreieck in \mathbb{R}^2 .

Dann existiert genau ein Kreis $K = K_r(M) \subset \mathbb{R}^2$ so, dass alle Seiten von Δ Tangenten an K sind.

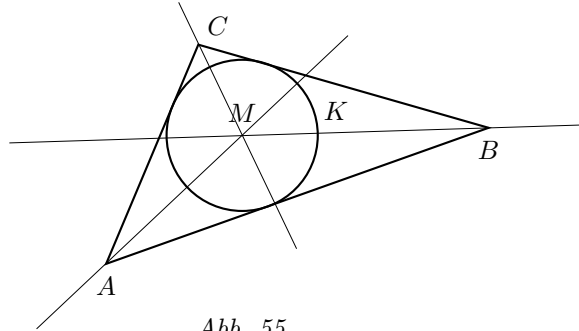


Abb. 55

Der Mittelpunkt M von K ist der gemeinsame Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von Δ .

Dieser Kreis heißt Inkreis von Δ .

Beweis.

1. Zur Existenz:

Falls ein Inkreis existiert, so liegt infolge Bemerkung 1.5.8 sein Mittelpunkt auf allen Winkelhalbierenden. Wir zeigen also zunächst, dass sich die Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

(a) Je zwei Winkelhalbierende schneiden sich.

Dazu müssen wir als erstes feststellen, dass wir mit dem Begriff „Winkelhalbierende von A “ eine Gerade bezeichnen wollen, von der aus gesehen die Punkte B und C auf verschiedenen Seiten liegen. (So wurde die Winkelhalbierende in Bemerkung 1.5.8 auch konstruiert.)

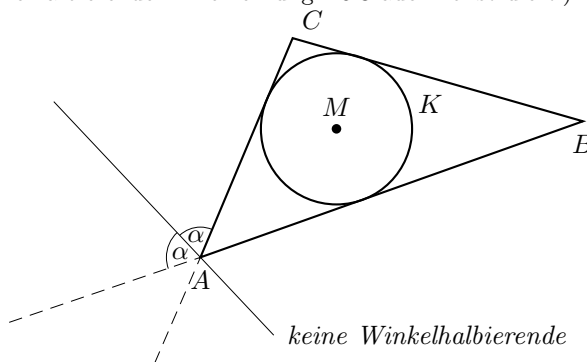


Abb. 56

Das heißt, die Winkelhalbierende von A schneidet die Strecke \overline{BC} in einem Punkt A' . Nun liegen aber auch A und A' auf verschiedenen Seiten der Winkelhalbierenden durch B , da nach Definition A und C auf verschiedenen Seiten liegen und $B \in G(A', C)$ der eindeutige Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit $G(A', C)$ ist. Somit schneidet die Winkelhalbierende $G(B, B')$ die Strecke $\overline{AA'}$ in einem Punkt M , in dem wir also den Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender gefunden haben.

(b) Alle Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

Sei F_A der Fußpunkt des Lotes von M auf \overline{BC} , analog seien F_B und F_C definiert.

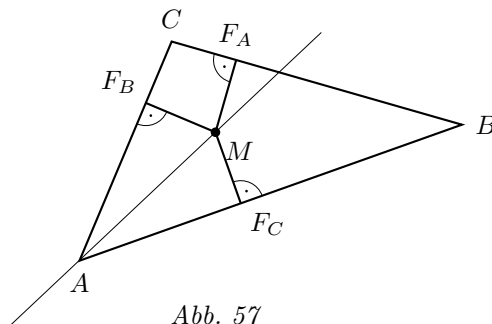


Abb. 57

Nach dem Kongruenzsatz für Dreiecke (Satz 1.3.5) sind die Strecken $\overline{MF_B}$ und $\overline{MF_C}$ kongruent: Die Dreiecke (A, M, F_C) und (A, M, F_B) haben die Strecke \overline{AM} gemeinsam; außerdem ist $\angle(M, A, F_C) \equiv \angle(M, A, F_B)$, da

$G(A, M)$ Winkelhalbierende ist, und $\angle(A, F_C, M) \equiv \angle(A, F_B, M)$, da beides rechte Winkel sind.

Da M weiterhin auf der Winkelhalbierenden von B liegt, ist auch $\overline{MF_A} \equiv \overline{MF_C}$, und wegen der Transitivität der Streckenkongruenz gilt ebenfalls $\overline{MF_A} \equiv \overline{MF_B}$.

Betrachte nun die Dreiecke (C, M, F_A) und (C, M, F_B) . Diese beiden Dreiecke haben die gemeinsame Strecke \overline{CM} . Weiterhin ist $\overline{MF_A} \equiv \overline{MF_B}$ und wegen $\sphericalangle(C, F_A, M) = \sphericalangle(C, F_B, M) = \frac{\pi}{2}$ mit Satz 1.3.3 (dem Pythagoras) auch $\overline{CF_A} \equiv \overline{CF_B}$. Der Kongruenzsatz liefert nun wieder $\sphericalangle(M, C, F_A) = \sphericalangle(M, C, F_B)$, und deshalb ist $G(M, C)$ die Winkelhalbierende von C – der Punkt M liegt also auch auf der dritten Winkelhalbierenden.

(c) Der Kreis $K_r(M)$ mit $r = \|F_A - M\|$ ist der Inkreis von Δ .

Hierzu stellen wir als erstes fest, dass $r = \|F_A - M\| = \|F_B - M\| = \|F_C - M\|$ gilt, wie in Teil 1b gezeigt wurde. Sonach sind schon einmal $F_A, F_B, F_C \in K_r(M)$. Außerdem ist nach Konstruktion $\sphericalangle(F_A - M, C - B) = \sphericalangle(F_B - M, C - A) = \sphericalangle(F_C - M, B - A) = \frac{\pi}{2}$, also folgt nach Korollar 1.5.4, dass sämtliche Dreiecksseiten Tangenten an $K_r(M)$ sind.

2. Zur Eindeutigkeit:

Sind K und K' Inkreise von Δ , dann sind sie nach Beweisteil 1 konzentrisch, also $K = K_r(M)$, $K' = K_{r'}(M)$. Sei $r' < r$.

Dann ist K' vollständig im Inneren von K ; da jedoch nach (1.11) kein Punkt einer Tangente an K im Inneren von K liegt, besitzt K' keine Punkte auf den Dreiecksseiten. ζ

Definition 1.5.11 Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ verschieden. Dann heißt

$$\begin{aligned} H &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, B - A \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + B), B - A \rangle\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, B - A \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2)\} \end{aligned}$$

die *Mittelsenkrechte* von \overline{AB} .

Satz 1.5.12 (Satz vom Umkreis) Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein nicht entartetes Dreieck in \mathbb{R}^2 .

Dann gibt es genau einen Kreis $K = K_r(M)$, so dass $A, B, C \in K$.

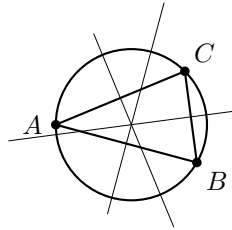


Abb. 58

Der Mittelpunkt M von K ist der gemeinsame Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten von Δ .

Ein solcher Kreis heißt Umkreis von Δ .

Beweis.

- Wir zeigen zunächst, dass die Mittelsenkrechten sich in einem Punkt schneiden. Je zwei der Mittelsenkrechten schneiden sich auf jeden Fall in genau einem Punkt, da sie sonst parallel sein müssten; dann wären aber auch die Dreiecksseiten parallel und das Dreieck somit entartet.

Sei nun M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von \overline{AB} und \overline{AC} , also

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \langle M, B - A \rangle &= \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2) \\ \text{II} \quad \langle M, C - A \rangle &= \frac{1}{2}(\|C\|^2 - \|A\|^2) \\ \stackrel{\text{I-II}}{\implies} \quad \langle M, B - C \rangle &= \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|C\|^2), \end{aligned}$$

und diese Gleichung beschreibt in Hesse'scher Normalform genau, dass M auch auf der Mittelsenkrechten von \overline{BC} liegt.

- Setze $r := \|M - A\|$. Dann müssen wir zeigen, dass auch B und C auf $K_r(M)$ liegen.

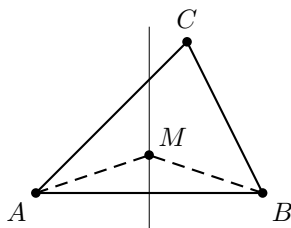


Abb. 59

Sei $S \in E(2)$ die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Seite \overline{AB} .

Dann ist $S(M) = M$, $S(A) = B$, $S(B) = A$. Daraus entnimmt man für die Abstände

$$\|M - B\| = \|S(M) - S(A)\| \stackrel{E(2)}{=} \|M - A\| = r,$$

also liegt B auf $K_r(M)$.

Mit einer Spiegelung an einer der anderen Mittelsenkrechten erhält man analog $C \in K_r(M)$.

- Zur Eindeutigkeit:

Sei $K_{r'}(M')$ ein Kreis mit $A, B, C \in K_{r'}(M')$. Wir wollen nun zeigen, dass $r' = r$ und $M' = M$ ist.

Wegen $A, B \in K_{r'}(M')$ ist

$$\|A - M'\|^2 = \|B - M'\|^2 = (r')^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} 0 &= \|A - M'\|^2 - \|B - M'\|^2 \\ &= \|A\|^2 - 2\langle A, M' \rangle + \|M'\|^2 - (\|B\|^2 - 2\langle B, M' \rangle + \|M'\|^2) \\ &= \|A\|^2 - \|B\|^2 + 2\langle B - A, M' \rangle \\ \Leftrightarrow \langle M', B - A \rangle &= \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2) = \left\langle \frac{1}{2}(A + B), B - A \right\rangle, \end{aligned}$$

d.h. M' liegt auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} . Analog zeigt man, dass M' auch auf den anderen Mittelsenkrechten liegen muss und somit der gemeinsame Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten ist: $M' = M$.

Da $r' = \|M' - A\|$ und $M' = M$ ist, folgt sofort $r' = r$. □

Bemerkung 1.5.13 Der Radius des Umkreises lässt sich wie folgt berechnen:

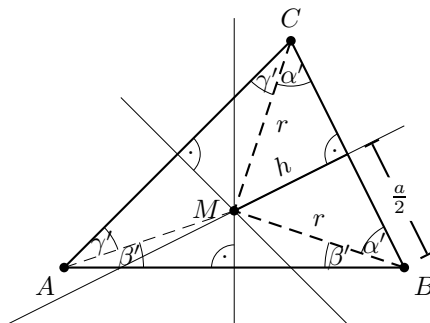


Abb. 60

Wir betrachten zunächst das Dreieck $(\frac{1}{2}B + C, B, M)$. Dann liefert der Satz des Pythagoras:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Aus dem Sinussatz erhalten wir

$$h = r \cdot \sin(\alpha'),$$

und eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} r^2 &= r^2 \sin^2(\alpha') + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ (1 - \sin^2(\alpha'))r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \cos^2(\alpha') \cdot r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{a}{2 \cos(\alpha')}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Nun interessiert uns die Größe von α' .

Die beiden in der Abbildung mit α' bezeichneten Winkel sind tatsächlich gleich groß, denn die Spiegelung an der Mittelsenkrechten von \overline{BC} überführt einen in den anderen. Dasselbe gilt natürlich auch für die mit β' bzw. γ' bezeichneten Winkelgrößen.

Bezeichnet man die Innenwinkel des Dreiecks wie gewöhnlich mit α , β und γ , so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \text{I} \quad \alpha &= \beta' + \gamma' \\
 \text{II} \quad \beta &= \alpha' + \beta' \\
 \text{III} \quad \gamma &= \alpha' + \gamma' \\
 \xrightarrow{\text{II}+\text{III}-\text{I}} \quad 2\alpha' &= (\beta + \gamma) - \alpha \\
 &= (\pi - \alpha) - \alpha \\
 &= \pi - 2\alpha \\
 \implies \alpha' &= \frac{\pi}{2} - \alpha \\
 \implies \cos(\alpha') &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \sin(\alpha).
 \end{aligned}$$

Setzt man dieses Resultat in (1.13) ein, so erhält man

$$r = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin(\alpha)}.$$

Analog leitet man diese Beziehung auch für die anderen Seiten und die ihnen gegenüberliegenden Winkel her:

$$r = \frac{1}{2} \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{1}{2} \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Insbesondere haben wir eine neue Erklärung für den Sinussatz der euklidischen Geometrie gefunden.

Satz 1.5.14 (Euler) Sei (A, B, C) ein nicht entartetes Dreieck in \mathbb{R}^2 . Sei S der Schwerpunkt dieses Dreiecks, H der gemeinsame Schnittpunkt der Höhen und M der Mittelpunkt des Umkreises.

Dann gilt die Euler-Gleichung

$$H + 2M - 3S = 0. \quad (1.14)$$

Beweis. Wir wissen bereits aus Satz 1.3.8, dass gilt:

$$3S = A + B + C.$$

Nach Skalarmultiplikation mit $B - A$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 \langle 3S, B - A \rangle &= \langle A + B + C, B - A \rangle \\
 &= \langle \cancel{A}, \cancel{B} \rangle - \|A\|^2 + \|B\|^2 - \langle \cancel{B}, \cancel{A} \rangle + \langle C, B \rangle - \langle C, A \rangle \\
 &= \|B\|^2 - \|A\|^2 + \langle C, B - A \rangle.
 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Der Mittelpunkt des Umkreises liegt auf den Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten. Direkt aus der Definition der Mittelsenkrechten von \overline{AB} entnehmen wir:

$$\begin{aligned}
 \langle M, B - A \rangle &= \frac{1}{2} (\|B\|^2 - \|A\|^2) \\
 \langle 2M, B - A \rangle &= \|B\|^2 - \|A\|^2.
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

H liegt auf der Höhe durch C , also ist nach Definition der Höhen

$$\langle H, B - A \rangle = \langle C, B - A \rangle. \quad (1.17)$$

Addiert man nun die Gleichungen (1.17) und (1.16) und zieht (1.15) ab, so erhält man:

$$\langle H + 2M - 3S, B - A \rangle = 0. \quad (1.18)$$

Analog ergibt sich

$$\langle H + 2M - 3S, C - A \rangle = 0. \quad (1.19)$$

Da das Dreieck (A, B, C) nicht entartet ist, sind $B - A$ und $C - A$ linear unabhängig; $(B - A, C - A)$ ist also eine Basis von \mathbb{R}^2 . Somit folgt aus (1.18) und (1.19), dass $H + 2M - 3S$ selbst verschwindet,

$$H + 2M - 3S = 0. \quad \square$$

Korollar 1.5.15 Da die Koeffizienten in der Euler-Gleichung von null verschieden sind, ihre Summe jedoch null ergibt, sind die Punkte H , M und S kollinear.

Definition 1.5.16 Sind H , M , S nicht alle gleich, so ist die Gerade, die diese Punkte enthält, eindeutig bestimmt. Diese Gerade heißt *Euler-Gerade von (A, B, C)* .

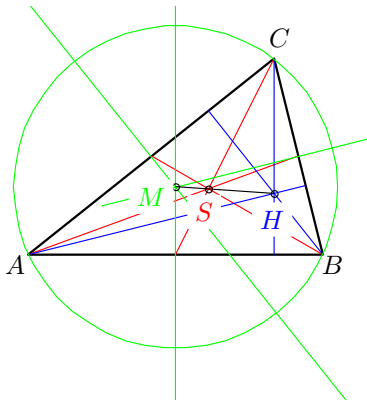


Abb. 61

Bemerkung 1.5.17 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Zwei der drei Punkte H , M , S stimmen überein;
2. Alle drei Punkte stimmen überein;
3. Das Dreieck (A, B, C) ist gleichseitig.

Der Beweis hiervon bildet eine interessante Übungsaufgabe.

Bemerkung 1.5.18 Der Mittelpunkt des Inkreises, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, liegt im Allgemeinen nicht auf der Euler-Geraden.

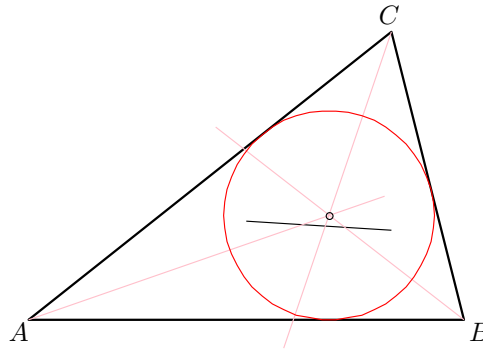


Abb. 62

Lemma 1.5.19 Sei $\Delta = (A, B, C)$ ein Dreieck in \mathbb{R}^2 . Setze

$$A' := \frac{1}{2}(B + C), B' := \frac{1}{2}(A + C), C' := \frac{1}{2}(A + B); \Delta' := (A', B', C').$$

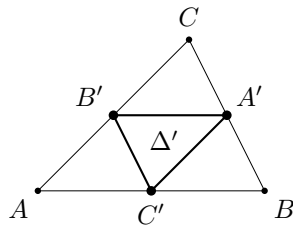


Abb. 63

Dann ist Δ entartet genau dann, wenn Δ' entartet ist.

Beweis. Sei Δ nicht entartet. Wir wollen zeigen, dass dann Δ' ebenfalls nicht entartet ist. Die andere Richtung verläuft vollkommen analog.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$\alpha A' + \beta B' + \gamma C' = 0 \text{ und } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Wir wissen, dass das Dreieck (A', B', C') genau dann nicht entartet ist, wenn unter diesen Voraussetzungen die Koeffizienten alle verschwinden. Zu zeigen ist also:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Nun ersetzen wir zunächst A' , B' und C' :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha A' + \beta B' + \gamma C' \\ &= \frac{\alpha}{2}(B+C) + \frac{\beta}{2}(A+C) + \frac{\gamma}{2}(A+B) \\ &= \frac{\beta+\gamma}{2}A + \frac{\alpha+\gamma}{2}B + \frac{\alpha+\beta}{2}C. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Koeffizientensumme:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Wir haben also die Voraussetzungen geschaffen, um für das Dreieck (A, B, C) die obige Kollinearitätsbedingung anzuwenden: Das Dreieck ist nicht entartet, also sind die Koeffizienten alle null.

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

Wir schreiben das mit Hilfe einer Matrix um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat die Determinante 2 und ist somit invertierbar. Dadurch erhalten wir das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definition 1.5.20 Sei Δ ein nicht entartetes Dreieck. Sei Δ' wie im vorangegangenen Lemma definiert.

Dann heißt der Umkreis von Δ' *Feuerbachkreis von Δ* .

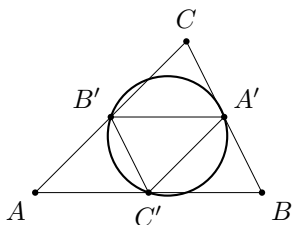


Abb. 64

Satz 1.5.21 (Satz vom Feuerbachkreis) Sei Δ ein nicht entartetes Dreieck in \mathbb{R}^2 . Seien S, H, M wie im Satz von Euler definiert, sei F der Mittelpunkt des Feuerbachkreises.

Dann gilt:

1. die Feuerbach-Gleichung:

$$3S - M - 2F = 0;$$

Ist Δ gleichseitig, so ist $F = M = H = S$;

Ist Δ nicht gleichseitig, so liegt F auf der Euler-Geraden;

2. Der Radius des Feuerbachkreises ist halb so groß wie der Radius des Umkreises;
3. Außer den Seitenmittelpunkten von Δ liegen auch die Fußpunkte der Höhen auf dem Feuerbachkreis sowie die Mittelpunkte der Höhenabschnitte $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$.

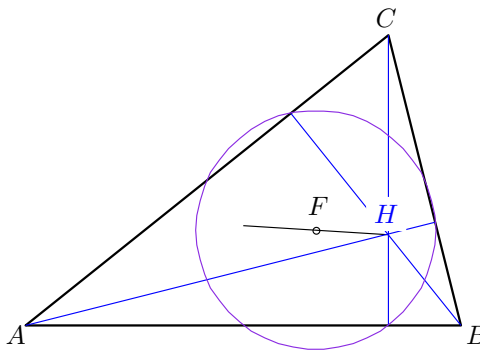


Abb. 65

Beweis.

1. Wir suchen zunächst den Schwerpunkt S' von Δ' :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{3}(A' + B' + C') \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A + B)\right) \\ &= \frac{1}{3}(A + B + C) \\ &= S. \end{aligned}$$

Weiterhin beobachten wir, dass $G(A', C') \parallel G(A, C)$, da

$$A' - C' = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(C - A).$$

Da nun die Mittelpunkte der Seiten von Δ die Ecken von Δ' sind, sind die Mittelsenkrechten von Δ gleichzeitig die Höhen von Δ' , also ist der Höhenschnittpunkt

von Δ'

$$H' = M.$$

Der Mittelpunkt des Umkreises von Δ' ist nun gerade F nach Definition, und so liefert die Euler-Gleichung für Δ' :

$$\begin{aligned} H' + 2F - 3S' &= 0 \\ \Leftrightarrow M + 2F - 3S &= 0. \end{aligned}$$

2. Sei r' der Radius des Feuerbachkreises. Ausgehend von der Feuerbach-Gleichung berechnen wir:

$$\begin{aligned} 0 &= 3S - M - 2F \\ &= A + B + C - M - 2F \\ &= (A - M) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(B + C) - F\right) \\ M - A &= 2(A' - F) \\ \|M - A\| &= 2\|A' - F\| \\ r &= 2r'. \end{aligned}$$

3. (a) Wir beweisen zunächst, dass die Mittelpunkte der Höhenabschnitte auf dem Feuerbachkreis liegen.

Dazu stellen wir die Euler-Gleichung und die Feuerbach-Gleichung nach $2M$ um:

$$\begin{aligned} 2M &= 3S - H \\ 2M &= 6S - 4F. \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} 3S - H &= 6S - 4F \\ 4F &= 3S + H \\ 2F &= \frac{1}{2} \cdot (3S + H) \\ 2F &= \frac{1}{2}(A + B + C + H) \\ F - \frac{1}{2}(A + B) &= \frac{1}{2}(C + H) - F \\ r' = \|F - C'\| &= \left\| \frac{1}{2}(C + H) - F \right\|; \end{aligned}$$

Der Punkt $\frac{1}{2}(C + H) -$ und das ist genau der Mittelpunkt des Höhenabschnitts \overline{HC} – liegt also auf dem Feuerbachkreis. Analog verläuft der Beweis für die anderen Höhenabschnitte.

- (b) Nun zeigen wir noch, dass die Fußpunkte der Höhen auf dem Feuerbachkreis liegen.

Sei C' wie gehabt der Mittelpunkt von \overline{AB} . Sei C_H der Fußpunkt der Höhe durch C , C'' der Fußpunkt des Lots von F auf $G(A, B)$.

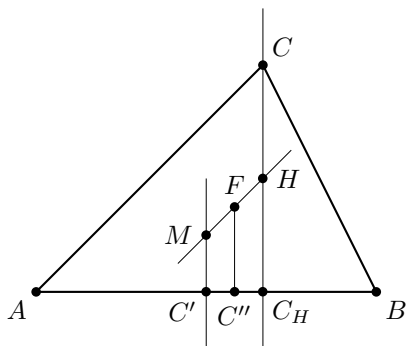


Abb. 66

Ist die Euler-Gerade nicht parallel zu $G(A, B)$, so liefert der Strahlensatz:

$$\begin{aligned} \frac{\|C_H - C'\|}{\|C'' - C'\|} &= \frac{\|H - M\|}{\|F - M\|} \\ &= \frac{\|2F - M - M\|}{\|F - M\|} \\ &= 2, \end{aligned}$$

also ist C'' der Mittelpunkt von $\overline{C'C_H}$.

($H = 2F - M$ ergibt sich aus der Euler- und der Feuerbach-Gleichung.)

Ist die Euler-Gerade parallel zu $G(A, B)$, so ergibt sich dieselbe Aussage aus dem Diagonalensatz.

(Genaugenommen haben wir noch nicht gezeigt, dass C'' tatsächlich zwischen C' und C_H liegt; die folgende Bemerkung wird jedoch zeigen, dass F zwischen H und M liegt, und daraus ergibt sich dann tatsächlich, dass auch C'' zwischen C' und C_H liegt. Wer nicht auf diese Bemerkung warten möchte, der bestimme noch das Verhältnis von $\|C_H - C'\|$ zu $\|C'' - C'\|$ und erhalte daraus die gewünschte Relation.)

Wenn wir nun an der Geraden $G(F, C'')$ spiegeln, dann wird der Feuerbachkreis auf sich selbst abgebildet; der Punkt C' wird auf C_H überführt. Da C' nach Definition auf dem Feuerbachkreis liegt, muss nun auch das Bild von C' , also C_H , auf dem Feuerbachkreis liegen. \square

Bemerkung 1.5.22 Wir untersuchen die Längenverhältnisse auf der Euler-Geraden.

Aus der Feuerbach-Gleichung entnehmen wir

$$\begin{aligned} 3S - M - 2F &= 0 \\ S - M &= 2(F - S). \end{aligned}$$

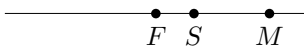


Abb. 67

Anschließend liefert uns die Euler-Gleichung

$$\begin{aligned} H + 2M - 3S &= 0 \\ H - S &= 2(S - M). \end{aligned}$$

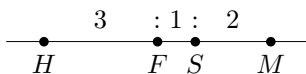


Abb. 68

1.6 Ähnlichkeitstransformationen

Definition 1.6.1 Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Ähnlichkeitstransformation*, falls eine positive Zahl r existiert mit

$$\|f(x) - f(y)\| = r \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Die Zahl r heißt *Streckungsfaktor* oder *Maßstab* von f .

Ein typisches Beispiel für Ähnlichkeitstransformationen, welches auch in der Schule behandelt wird, sind zentrische Streckungen.

Bemerkung 1.6.2

1. Jede Ähnlichkeitstransformation ist injektiv und damit auch bijektiv.
2. Ist f eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab r , so ist f^{-1} eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab $\frac{1}{r}$.
3. Sind f und f' Ähnlichkeitstransformationen mit den Maßstäben r bzw. r' , dann ist $f' \circ f$ eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab $r \cdot r'$.

Diese Aussage wird später noch verallgemeinert, weshalb an dieser Stelle auf die Beweise verzichtet wird.

Definition 1.6.3 Die Menge

$$\text{Ähn}(n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist eine Ähnlichkeitstransformation}\}$$

heißt *Ähnlichkeitsgruppe* von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 1.6.4 $\text{Ähn}(n)$ bildet tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Verkettung „ \circ “ von Funktionen. Das neutrale Element ist die Identität.

$E(n) \subset \text{Ähn}(n)$ ist eine Untergruppe.

Satz 1.6.5 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Ähnlichkeitstransformation genau dann, wenn eine Matrix $A \in O(n)$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und eine reelle Zahl $r > 0$ existieren, so dass

$$f(x) = r \cdot Ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis.

1. Sei $f(x) = r \cdot Ax + b$. Dann gilt für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \|r \cdot Ax + b - (rAx' + b)\| \\ &= r \|A(x - x')\| \\ &= r \|x - x'\| \end{aligned}$$

2. Sei f eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab r .

Setze $g(x) := \frac{1}{r}f(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x')\| &= \left\| \frac{1}{r}f(x) - \frac{1}{r}f(x') \right\| \\ &= \frac{1}{r} \|f(x) - f(x')\| \\ &= \frac{1}{r} \cdot r \|x - x'\| \\ &= \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Damit ist g eine euklidische Bewegung (der exakte Beweis folgt in Satz 2.1.14, allerdings wurde eine ähnliche Aussage auch schon in Satz 1.2.12 bewiesen) und hat also die Form

$$g(x) = Ax + \tilde{b},$$

mit $A \in O(n)$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Nun berechnen wir schließlich

$$f(x) = r \cdot g(x) = r \cdot Ax + \underbrace{r \cdot \tilde{b}}_{=: b} = rAx + b. \quad \square$$

Definition 1.6.6 Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *affin*, falls es eine Matrix $A \in GL(n)$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$f(x) = Ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $\text{Aff}(n)$ bezeichnen wir die Gruppe der affinen Transformationen von \mathbb{R}^n .

Bemerkung 1.6.7 $\text{Ähn}(n)$ ist eine Untergruppe von $\text{Aff}(n)$.

Zu den affinen Abbildungen zählen auch die Scherungen, die aber im Allgemeinen nicht mehr zum Schulstoff gehören.

Bemerkung 1.6.8

1. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ affin, so ist auch $f(G)$ eine Gerade.

2. Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab r , so bildet f den Kreis $K_R(m)$ auf den Kreis $K_{rR}(f(M))$ ab.
3. Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affin, so ist das Bild eines Kreises unter f im Allgemeinen kein Kreis.
4. Ähnlichkeitstransformationen erhalten die Winkel in \mathbb{R}^n .

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ nicht kollinear, f sei eine Ähnlichkeitstransformation. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\sphericalangle(f(a), f(b), f(c))\right) &= \frac{\langle f(b) - f(a), f(b) - f(c) \rangle}{\|f(b) - f(a)\| \cdot \|f(b) - f(c)\|} \\
 &= \frac{\langle \mathcal{P} \cdot A(b - a), \mathcal{P} \cdot A(b - c) \rangle}{\mathcal{P} \|A(b - a)\| \cdot \mathcal{P} \|A(b - c)\|} \\
 &\stackrel{A \in \text{O}(n)}{=} \frac{\langle b - a, b - c \rangle}{\|b - a\| \cdot \|b - c\|} \\
 &= \cos\left(\sphericalangle(a, b, c)\right) \\
 \Leftrightarrow \quad \sphericalangle(f(a), f(b), f(c)) &= \sphericalangle(a, b, c).
 \end{aligned}$$

Definition 1.6.9 Zwei euklidische Dreiecke (A_1, A_2, A_3) und (B_1, B_2, B_3) heißen *ähnlich*, falls eine Abbildung $f \in \text{Ähn}(2)$ existiert, sodass nach eventueller Umbenennung gilt:

$$f(A_1) = B_1, \quad f(A_2) = B_2, \quad f(A_3) = B_3.$$

Die Dreiecke heißen *kongruent*, falls $f \in \text{E}(2)$ ist.

Satz 1.6.10 (Kongruenzsatz für Dreiecke) Seien $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ zwei euklidische Dreiecke. Die Seitenlängen seien wie gewohnt mit a, b, c bzw. a', b', c' bezeichnet, die Winkel mit α, β, γ bzw. α', β', γ' .

Dann sind äquivalent:

1. Δ und Δ' sind kongruent;
2. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma';$$

3. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c';$$

4. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$\alpha = \alpha', \quad b = b', \quad c = c';$$

5. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$a = a', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Beweis.

$2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ wurde bereits in Satz 1.3.5 gezeigt.

$1 \Rightarrow 2$ ist klar, da jedes $f \in E(n)$ längen- und winkeltreu ist.

Da 2, 3, 4 und 5 äquivalent sind, können wir uns aussuchen, welche dieser Eigenschaften wir benutzen, um zurück zur Eigenschaft 1 zu gelangen. Wir wählen die Implikation

$4 \Rightarrow 1$ Sei $\alpha = \alpha', b = b', c = c'$. Gesucht ist eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$.

Wir wählen zunächst eine Translation $T \in E(2)$ mit $T(A) = A'$.

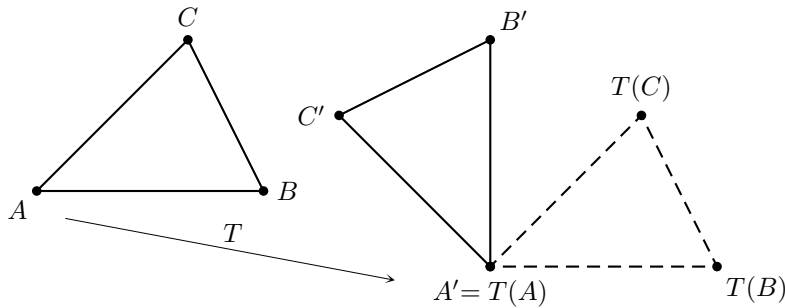


Abb. 69

Als nächstes bezeichnen wir mit $R \in E(2)$ die Drehung um das Zentrum A' , mittels derer die Gerade $G(A', T(B))$ auf $G(A', B')$ so abgebildet wird, dass $R(T(B))$ und B' auf dieser Geraden auf derselben Seite von A' liegen.

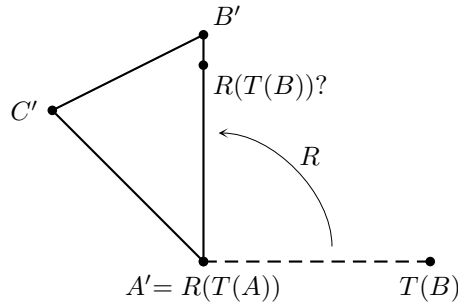


Abb. 70

Nun gilt

$$R(T(A)) = R(A') = A';$$

$$\|R(T(B)) - A'\| = \|R(T(B)) - R(T(A))\| = \|B - A\| = c = c' = \|B' - A'\|,$$

also ist entgegen der Abbildung tatsächlich $R(T(B)) = B'$.

Nun ist noch von Interesse, wo der Punkt C nach Ausführung von $R \circ T$ landet. Dazu untersuchen wir zwei Fälle:

1. Fall: C' und $R(T(C))$ liegen auf derselben Seite von $G(A', B')$.

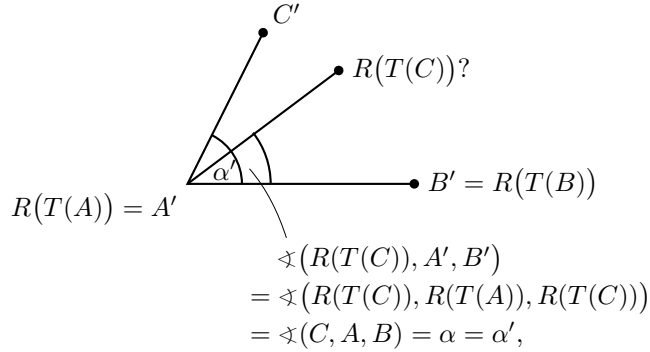


Abb. 71

also liegen A' , C' und $R(T(C))$ auf einer Geraden. Außerdem ist

$$\|A' - R(T(C))\| = \|R(T(A)) - R(T(C))\| = \|A - C\| = b = b' = \|A' - C'\|$$

und somit $R(T(C)) = C'$.

Die Abbildung $f := R \circ T \in E(2)$ ist damit die gesuchte Bewegung, die Δ in Δ' überführt, und wir haben gezeigt, dass die Dreiecke tatsächlich kongruent sind.

2. Fall: C' und $R(T(C))$ liegen nicht auf derselben Seite von $G(A', B')$.

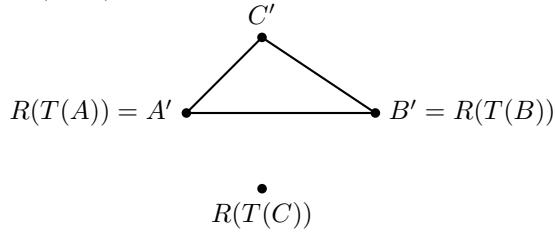


Abb. 72

Dann spiegeln wir mit der Abbildung $S \in E(2)$ an $G(A', B')$ und führen damit den 2. auf den 1. Fall zurück. Hierbei ist $f := S \circ R \circ T \in E(2)$ die gesuchte Bewegung. \square

Satz 1.6.11 (Ähnlichkeitssatz für Dreiecke) Seien $\Delta = (A, B, C)$ und $\Delta' = (A', B', C')$ euklidische Dreiecke. Die Seiten und Winkel seien wie üblich bezeichnet.

Dann sind äquivalent:

1. Δ und Δ' sind ähnlich;
2. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma';$$

3. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};$$

4. Nach eventueller Umbenennung der Ecken gilt:

$$\alpha = \alpha', \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Beweis.

1 \Rightarrow 2 klar, da alle Ähnlichkeitstransformationen der euklidischen Ebene winkeltreu sind.

2 \Rightarrow 3 Der Sinussatz für euklidische Dreiecke liefert

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \stackrel{\text{vor.}}{=} \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta')} = \frac{a'}{b'}.$$

3 \Rightarrow 4 Nenne das gegebene Streckenverhältnis r :

$$r := \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Setze $f := r \cdot \text{id} \in \text{Ähn}(2)$, $\Delta'' := f(\Delta')$.

Da f den Maßstab r besitzt, gilt in Δ'' :

$$a'' = r \cdot a' = a.$$

Analog erhält man $b'' = b$, $c'' = c$. Nach dem Kongruenzsatz sind Δ und Δ'' kongruent und damit auch ähnlich. Da nun Δ' und Δ'' nach Konstruktion ähnlich sind, müssen gemäß Bemerkung 2.2.2 auch Δ und Δ' ähnlich sein. Bei einer Ähnlichkeitstransformation bleiben aber die Winkel erhalten, also gilt $\alpha = \alpha'$, und der Rest steht bereits in der Voraussetzung.

4 \Rightarrow 1 Wir definieren wieder Δ'' wie eben und erhalten diesmal

$$\alpha'' = \alpha' = \alpha, \quad b'' = b, \quad c'' = c,$$

womit wieder nach dem Kongruenzsatz Δ und Δ'' kongruent sind. Analog zum vorigen Beweisteil ergibt sich hieraus sofort, dass dann Δ und Δ' ähnlich sein müssen. \square

Bemerkung 1.6.12 Seien Δ und Δ' ähnlich. Dann ist (einfach aufgrund der Winkeltreue)

1. Δ rechtwinklig genau dann, wenn Δ' rechtwinklig ist;
2. Δ gleichschenkelig genau dann, wenn Δ' gleichschenkelig ist;
3. Δ gleichseitig genau dann, wenn Δ' gleichseitig ist.

Definition 1.6.13 Sei (A, B, C) ein nicht entartetes Dreieck.

Sei A' der Schnittpunkt derjenigen Winkeldritteln von B und C , die der Seite $G(B, C)$ näher liegen. Analog seien B' und C' definiert.

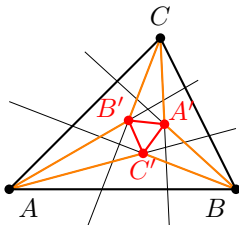


Abb. 73

Dann heißt das Dreieck (A', B', C') *Morley-Dreieck* von (A, B, C) .

Das folgende Lemma gehört eigentlich in die Analysis und nicht in die Geometrie. Wir brauchen es jedoch, um den darauf folgenden, sehr schönen und überraschenden Satz zu beweisen.

Lemma 1.6.14 Sei $T \in \mathbb{R}$ mit $0 < T < \pi$. Dann ist die Funktion

$$f : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sin(T-t)},$$

streng monoton wachsend und damit insbesondere injektiv.

Beweis. Wir bestimmen die Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\cos(t) \sin(T-t) + \sin(t) \cos(T-t)}{\sin^2(T-t)} \\ &= \frac{\sin(t + (T-t))}{\sin^2(T-t)} \\ &= \frac{\overbrace{\sin(T)}^{>0}}{\underbrace{\sin^2(T-t)}_{>0}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Satz 1.6.15 (Satz von Morley) Das Morley-Dreieck eines beliebigen nicht entarteten Dreiecks ist immer gleichseitig.

Beweis. Sei (A, B, C) ein nicht entartetes Dreieck; die Winkel seien wie gewöhnlich mit α, β, γ bezeichnet. Wir konstruieren nun ein Vergleichsdreieck (D, E, F) wie folgt: Zunächst beginnen wir mit einem gleichseitigen Dreieck (D', E', F') , das die Seitenlänge 1 besitzt.

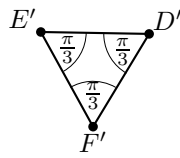


Abb. 74

Nun konstruieren wir einen Punkt D , der nicht auf derselben Seite von $G(E', F')$ liegt wie D' , mit der Eigenschaft, dass

$$\sphericalangle(D, E', F') = \frac{\gamma + \pi}{3} \text{ und } \sphericalangle(D, F', E') = \frac{\beta + \pi}{3}.$$

Daraus ermittelt man auch den fehlenden Winkel des Dreiecks (D, E', F') :

$$\sphericalangle(E', D, F') = \pi - \frac{\gamma + \pi}{3} - \frac{\beta + \pi}{3} = \frac{\pi - (\beta + \gamma)}{3} = \frac{\alpha}{3}.$$

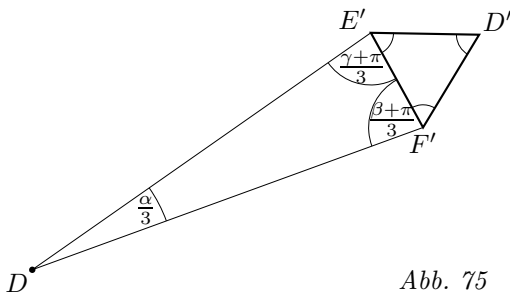


Abb. 75

Entsprechend legen wir die Punkte E und F fest.

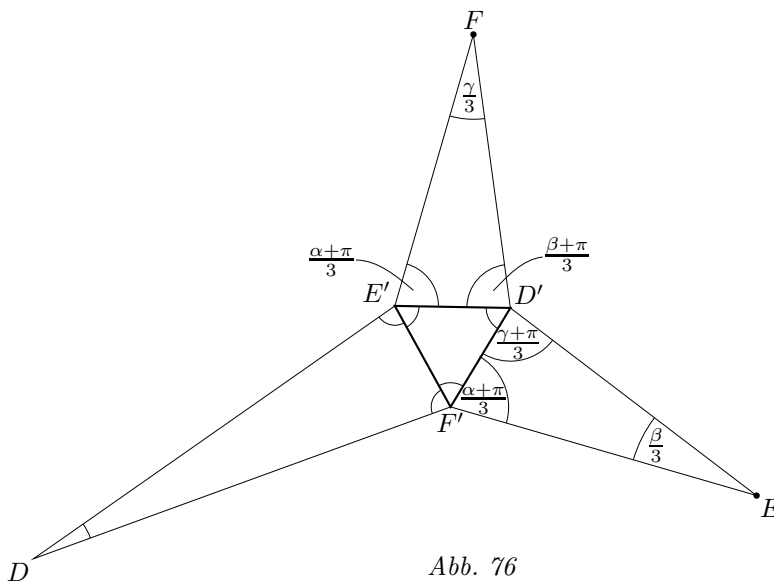


Abb. 76

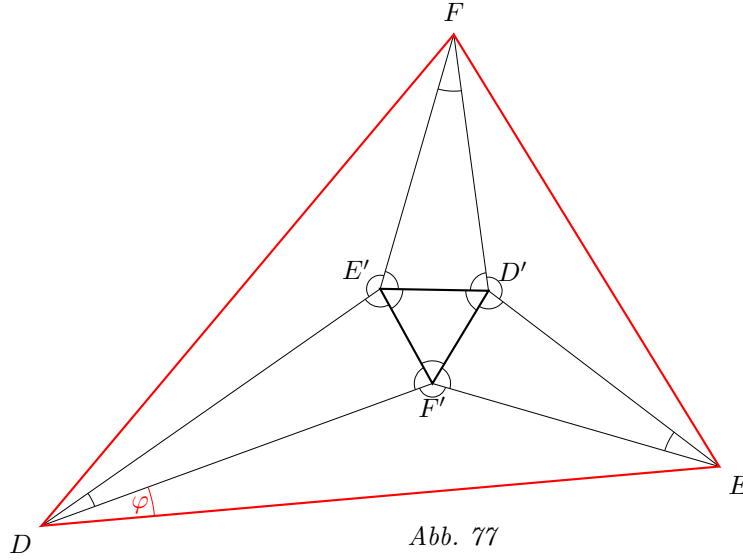
Da wir nun jeweils drei der auftretenden Winkel bei D' , E' und F' kennen, können wir auch noch den letzten berechnen, z.B. bei E' :

$$\sphericalangle(D, E', F) = 2\pi - \frac{\alpha + \pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\gamma + \pi}{3} = \pi - \frac{\alpha + \gamma}{3}.$$

Ebenso erhalten wir

$$\sphericalangle(E, F', D) = \pi - \frac{\alpha + \beta}{3} \text{ und } \sphericalangle(F, E', D) = \pi - \frac{\beta + \gamma}{3}.$$

Nun wollen wir $\varphi := \sphericalangle(F', D, E)$ bestimmen.



Wenn wir φ kennen, dann kennen wir auch

$$\sphericalangle(F', E, D) = \pi - \left(\pi - \frac{\alpha + \beta}{3} \right) - \varphi = \frac{\alpha + \beta}{3} - \varphi.$$

Da wir, solange unsere Betrachtungen nur auf Winkel eingeschränkt bleiben, hier nicht weiterkommen, berechnen wir einmal zwei Strecken im Dreieck (D, E, F') :

Zunächst liefert der Sinussatz, angewandt auf (D, E', F') ,

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{1} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \pi}{3}\right)}{\|D - F'\|} \Rightarrow \|D - F'\| = \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)},$$

womit wir schon mal eine Seite in (D, E, F') kennen. Analog erhalten wir mit dem Sinussatz, angewandt auf (D', E, F') :

$$\|E - F'\| = \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}.$$

Nun wissen wir aus dem Sinussatz, den wir auf (D, E, F') anwenden, dass gilt:

$$\frac{\sin(\varphi)}{\|E - F'\|} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{3} - \varphi\right)}{\|D - F'\|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\sin(\varphi)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{3} - \varphi\right)} &= \frac{\|E - F'\|}{\|D - F'\|} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)}. \end{aligned}$$

Und an dieser Stelle brauchen wir das Lemma 1.6.14! In unserem Fall heißt die Variable φ , und weiter ist $T = \frac{\alpha+\beta}{3}$.

Wir überprüfen die Voraussetzungen für das Lemma:

1. Es soll $0 < T < \pi$ gelten.

Dass $\frac{\alpha+\beta}{3} > 0$ ist, ist klar. Außerdem ist

$$\frac{\alpha + \beta}{3} < \alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Um diese Voraussetzung brauchen wir uns also nicht weiter zu kümmern.

2. Das Lemma macht eine Aussage über $\varphi \in [0, T)$, es wäre also schön, wenn unser Winkel φ tatsächlich in diesem Intervall liegen muss.

Dass $\varphi > 0$ ist, ist wieder klar. Außerdem ist

$$0 < \sphericalangle(F', E, D) = \frac{\alpha + \beta}{3} - \varphi \Leftrightarrow \varphi < \frac{\alpha + \beta}{3},$$

und damit ist das Lemma anwendbar. Es sagt aus, dass es genau eine Lösung für φ gibt. Wir brauchen also nur noch diese Lösung zu finden.

Die Zeichnung legt – ebenso wie die Aussage, die wir beweisen möchten – bereits nahe, dass $\varphi = \frac{\alpha}{3}$, und wenn wir das überprüfen, so stellen wir fest:

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{3} - \frac{\alpha}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{3}\right)} \checkmark$$

Daraus berechnet man direkt

$$\sphericalangle(F', E, D) = \frac{\beta}{3},$$

und analog zu diesem Vorgehen ergeben sich die übrigen Winkel, die in der Abbildung 77 noch nicht als bekannt eingezeichnet sind.

Dies sagt uns zweierlei: Erstens sind $G(D, E')$, $G(D, F')$, $G(E, D')$, $G(E, F')$, $G(F, D')$ sowie $G(F, E')$ die Winkeldrittelnden von (D, E, F) , weshalb (D', E', F') das Morley-Dreieck von (D, E, F) ist; und zweitens besitzt das Dreieck (D, E, F) dieselben Innenwinkel wie (A, B, C) , die Dreiecke sind also ähnlich.

Nun wissen wir bereits, dass Ähnlichkeitstransformationen winkeltreu sind. Damit werden die Winkeldrittelnden eines Dreiecks auf die Winkeldrittelnden des Bilddreiecks abgebildet, und dasselbe gilt demzufolge auch für die Morley-Dreiecke. Das Morley-Dreieck von (A, B, C) muss also ebenfalls ähnlich zu (D', E', F') sein; letzteres wurde jedoch als gleichseitiges Dreieck konstruiert, und nach Bemerkung 1.6.12 ist somit auch das Morley-Dreieck von (A, B, C) gleichseitig. \square

1.7 Kurven zweiten Grades

Ellipsen

Definition 1.7.1 Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$, sei $\varrho > \|A - B\|$. Dann heißt

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - A\| + \|P - B\| = \varrho\}$$

Ellipse. A und B heißen dabei die *Brennpunkte*, $\frac{1}{2}(A + B)$ der *Mittelpunkt* von E .

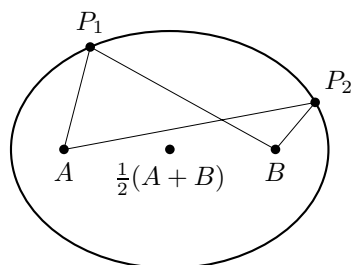


Abb. 78

Bemerkung 1.7.2 Diese Definition beschreibt bereits eine Möglichkeit zur Konstruktion von Ellipsen mit Hilfe eines Fadens, die sogenannte „Gärtnerellipse“ (weil sie in der Landschaftsarchitektur Verwendung findet):

Dazu befestigt man einen Faden der Länge ϱ an den Punkten A und B und zieht ihn mit dem Zeichengerät straff. Dieses beschreibt nun eine Ellipse. (Gärtner benutzen tatsächlich einen geschlossenen Fadenkreis der Länge $\varrho + \|A - B\|$, den sie um die Punkte A und B spannen. So können sie die obere und die untere Hälfte der Konstruktion ausführen, ohne abzusetzen.)

Bemerkung 1.7.3 Wir untersuchen, wozu wir die Voraussetzung $\varrho > \|A - B\|$ benötigen:

Für $P \in E$ gilt die Dreiecksungleichung

$$\varrho = \|P - A\| + \|P - B\| \geq \|A - B\|.$$

Damit ist $\varrho < \|A - B\|$ schon einmal ausgeschlossen. Für $\varrho = \|A - B\|$ muss in der Dreiecksungleichung die Gleichheit gelten, und das bedeutet, dass $P \in \overline{AB}$ ist. Diesen Fall wollen wir jedoch nicht als Ellipse bezeichnen.

Bemerkung 1.7.4 Was wir hingegen zulassen, ist $A = B$. In diesem Fall ist

$$E = K_{\frac{\varrho}{2}}(A).$$

Definition 1.7.5 Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse mit den Brennpunkten $A \neq B$. Die Geraden

$$G(A, B) \text{ und } \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \langle Q, B - A \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2)\}$$

heißen *Achsen* von E .

Bemerkung 1.7.6 Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B , dem Mittelpunkt M und den Achsen g und h .

Ist $f \in E(2)$, so ist $f(E)$ eine Ellipse mit den Brennpunkten $f(A)$ und $f(B)$, dem Mittelpunkt $f(M)$ und den Achsen $f(g)$ und $f(h)$.

Satz 1.7.7 Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Ellipse genau dann, wenn es ein $f \in E(2)$ und positive reelle Zahlen a, b gibt, so dass

$$f(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}. \quad (1.20)$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse. Wir überführen zunächst den Mittelpunkt von E durch eine Translation f_1 in den Koordinatenursprung. Dann drehen wir $G(f_1(A), f_1(B))$ durch die Abbildung f_2 so um 0, dass diese Gerade auf die x -Achse abgebildet wird und $f_2(f_1(A))$ auf der positiven x -Achse liegt. Nun gilt

$$f(A) = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, f(B) = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $f := f_2 \circ f_1$ für ein $\sigma > 0$. Ferner wissen wir, dass

$$\varrho > \|A - B\| = \|f(A) - f(B)\| = 2\sigma. \quad (1.21)$$

Nun liegt ein Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf E genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \varrho &= \left\| P - \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| P - \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x + \sigma \\ y \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x - \sigma \\ y \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(x + \sigma)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sigma)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow \varrho^2 &= (x + \sigma)^2 + y^2 + (x - \sigma)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x + \sigma)^2 + y^2)((x - \sigma)^2 + y^2)} \\ &= 2 \left(x^2 + \sigma^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 - \sigma^2)^2 + y^4 + y^2((x + \sigma)^2 + (x - \sigma)^2)} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\varrho^2}{2} - (x^2 + y^2 + \sigma^2) &= \sqrt{(x^2 - \sigma^2)^2 + y^4 + 2(x^2 + \sigma^2)y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\varrho^4}{4} - \varrho^2(x^2 + y^2 + \sigma^2) + \underbrace{(x^2 + y^2 + \sigma^2)^2}_{(x^2 + y^2)^2 + \sigma^4 + 2\sigma^2 x^2 + 2\sigma^2 y^2} &= x^4 - 2\sigma^2 x^2 + \sigma^4 + y^4 + \cancel{2x^2 y^2} + \cancel{2\sigma^2 y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\varrho^4}{4} - \varrho^2 \sigma^2 &= \varrho^2(x^2 + y^2) - 4\sigma^2 x^2 \\ &= (\varrho^2 - 4\sigma^2)x^2 + \varrho^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varrho^2}{4}(\varrho^2 - 4\sigma^2) = (\varrho^2 - 4\sigma^2)x^2 + \varrho^2 y^2$$

$$\stackrel{(1.21)}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{4}{\varrho^2}x^2 + \frac{4}{\varrho^2 - 4\sigma^2}y^2.$$

Setzen wir nun

$$a := \frac{\varrho}{2} \text{ und } b := \frac{\sqrt{\varrho^2 - 4\sigma^2}}{2}, \quad (1.22)$$

erhalten wir $f(E)$ in der Form (1.20).

(Die Wurzel in b ist reell, da nach (1.21) $\varrho > 2\sigma$.)

„ \Leftarrow “ Gegeben sei $f(E)$ in der Form (1.20). Wir zeigen, dass $f(E)$ eine Ellipse ist:

Sei o.B.d.A. $a \geq b$. Setze

$$\varrho := 2a \text{ und } \sigma := \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Dann gelten die Gleichungen (1.22), und gemäß dem ersten Beweisteil (der ja eine Kette von Äquivalenzen enthielt) ist $f(E)$ somit eine Ellipse mit den Brennpunkten σe_1 und $-\sigma e_1$.

Da mit f auch $f^{-1} \in E(2)$ ist, wissen wir nach Bemerkung 1.7.6, dass $E = f^{-1}(f(E))$ ebenfalls eine Ellipse ist. \square

Korollar 1.7.8 *Zu jeder Ellipse $E \subset \mathbb{R}^2$ gibt es eine Abbildung $f \in \text{Aff}(2)$ derart, dass*

$$f(E) = K_1(0)$$

Beweis. Wir wählen zunächst gemäß Satz 1.7.7 eine Abbildung $f_1 \in E(2) \subset \text{Aff}(2)$ so, dass

$$f_1(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$

gilt. Sei nun $f_2 \in \text{Aff}(2)$ die lineare Transformation, die gegeben ist durch die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$. Dann ist

$$f_2(f_1(E)) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

und nach Substitution von $x' := \frac{x}{a}$, $y' := \frac{y}{b}$ erhalten wir

$$(f_2 \circ f_1)(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x')^2 + (y')^2 = 1 \right\}.$$

$f := f_2 \circ f_1$ ist also die gesuchte Abbildung. \square

Korollar 1.7.9 *Ist $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse, dann gibt es ein $f \in E(2)$, so dass*

$$f(E) = \left\{ \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Beweis. Wir kennen eine Parametrisierung des Einheitskreises:

$$K_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Wählen wir f gemäß Satz 1.7.7 und f_2 gemäß Korollar 1.7.8, so ist

$$f(E) = f_2^{-1}(K_1(0)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} K_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \square$$

Satz 1.7.10 Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse, sei $f \in \text{Aff}(2)$. Dann ist $f(E)$ wieder eine Ellipse.

Beweis. Diese Aussage ist nicht offensichtlich, denn affine Transformationen beeinflussen die Abstände nicht in regelmäßiger Weise, aber Ellipsen sind über Abstände definiert. Um den Beweis dennoch überschaubar zu halten, suchen wir zuerst nach Annahmen, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit machen können.

Dafür betrachten wir zunächst die Ellipse. Wir wissen nach Korollar 1.7.8, dass eine Abbildung $f_1 \in \text{Aff}(2)$ existiert, so dass $f_1(E) = K_1(0)$ ist. Damit ist aber

$$f(E) = \underbrace{(f \circ f_1^{-1})}_{\in \text{Aff}(2)}(K_1(0)),$$

d.h. wir müssen lediglich zeigen, dass die Bilder des Einheitskreises unter affinen Transformationen Ellipsen sind. Sei also o.B.d.A. $E = K_1(0)$.

Nun wollen wir noch f vereinfachen. $f \in \text{Aff}(2)$ bedeutet, dass $f(x) = Ax + b$ mit $M \in \text{GL}(2, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2$. Wir können f also zerlegen in $f_1 : x \mapsto Mx$ und $f_2 : x \mapsto x + b$, so dass $f = f_2 \circ f_1$. Nun ist aber $f_2 \in \text{E}(2)$, und bereits Bemerkung 1.7.6 liefert uns, dass $f_2(f_1(E))$ genau dann eine Ellipse ist, wenn auch $f_1(E)$ eine Ellipse ist. Wir brauchen somit nur Abbildungen ohne Translationsanteil zu betrachten.

Sei nun also f linear und beschrieben durch $M \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$. Dann ist $M^t \cdot M \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ eine symmetrische und positiv definite Matrix (SPD-Matrix): Die Symmetrie erhält man aus

$$(M^t M)^t = (M)^t (M^t)^t = M^t M,$$

und die positive Definitheit folgt aus

$$\langle M^t M \cdot v, v \rangle = \langle Mv, Mv \rangle = \|Mv\|^2 > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass symmetrische Matrizen Eigenvektoren besitzen, die eine Orthonormalbasis des zugrundeliegenden Vektorraumes bilden. Seien also λ_1, λ_2 die Eigenwerte von $M^t M$ mit orthonormalen Eigenvektoren v_1, v_2 . Aufgrund der positiven Definitheit sind $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Sei o.B.d.A. $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Nun, da alle Voraussetzungen geklärt sind, können wir zum eigentlichen Beweis schreiten. Dazu sei $P \in K_1(0)$. Wir können P in der obigen Orthonormalbasis ausdrücken als $P = \alpha v_1 + \beta v_2$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} 1 = \|P\|^2 &= \langle \alpha v_1 + \beta v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle \\ 1 &= \underbrace{\alpha^2 \|v_1\|^2}_{=1} + \underbrace{\beta^2 \|v_2\|^2}_{=1} + \underbrace{2\alpha\beta \langle v_1, v_2 \rangle}_{=0} \\ 1 &= \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Setze nun

$$\varrho := 2\sqrt{\lambda_1}, \sigma := \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Wir wollen nun die Ellipsengleichung für $f(K_1(0)) = M \cdot K_1(0)$ überprüfen. Dabei ist natürlich $f(P) = MP$ einzusetzen, und die Brennpunkte erwarten wir bei $\pm \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|}$. Wir berechnen nun zunächst die Abstände von MP zu den Brennpunkten:

$$\begin{aligned} \left\| MP \pm \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|} \right\|^2 &= \|MP\|^2 \pm \frac{2\sigma}{\|Mv_1\|} \langle MP, Mv_1 \rangle + \sigma^2, \\ &\text{und mit } \|Mv_1\| = \sqrt{\langle M^t M \cdot v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{\lambda_1} \text{ folgt} \\ \left\| MP \pm \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|} \right\|^2 &= \langle M^t MP, P \rangle \pm \frac{2\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} \langle P, M^t M v_1 \rangle + \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= \alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2 \pm \frac{2\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}} \alpha \lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ &\stackrel{(1.23)}{=} \alpha^2 \lambda_1 + (\lambda_1 - \alpha^2) \lambda_2 \pm 2\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\lambda_1} \alpha + \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= \alpha^2 (\lambda_1 - \lambda_2) \pm 2\alpha \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\lambda_1} + \lambda_1 \\ &= \left(\sqrt{\lambda_1} \pm \alpha \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \left\| MP \pm \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|} \right\| &= \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Und nun setzen wir das in die Ellipsengleichung ein und sehen

$$\left\| MP - \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|} \right\| + \left\| MP + \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|} \right\| = 2\sqrt{\lambda_1} = \varrho. \quad \square$$

Bemerkung 1.7.11 Fassen wir noch einmal die Parameter, die wir für Ellipsen benutzen, zusammen: Wir wählen o.B.d.A. die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Achsen, die den Koordinatenachsen entsprechen, so dass

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

wobei $a > b > 0$ ist. (Im Fall $a = b$ erhalten wir einen Kreis, und den kennen wir bereits gut. Im Fall $a < b$ vertauschen wir die Achsen.)

Zunächst sehen wir, dass die Punkte $X_{1,2} := \begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_{1,2} := \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ die Gleichung erfüllen, also sind a und b die Längen der Halbachsen von E .

Bei der Fadenkonstruktion erhält man den Punkt X_1 , wenn der Faden von A nach X_1 und zurück nach B läuft. Da jedoch aufgrund der Symmetrie $\|B - X_1\| = \|A - X_2\|$ gilt, entspricht die Länge ϱ des Fadens genau dem Abstand $\|X_2 - X_1\| = 2a$.

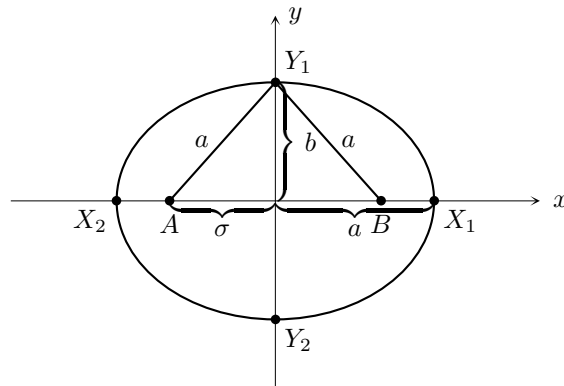


Abb. 79

Natürlich gilt auch im Punkt Y_1 die Ellipsengleichung, weshalb $\|A-Y_1\| = \|B-Y_1\| = a$ sein muss. Damit liefert nun der Satz des Pythagoras für das Dreieck $(0, A, Y_1)$ die Beziehung $\sigma = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Bemerkung 1.7.12 Nun wollen wir eine Ellipsendarstellung in *Polarkoordinaten* finden, d.h. die Punkte der Ellipse eindeutig durch zwei Parameter r und φ so beschreiben, dass für $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \text{ und} \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

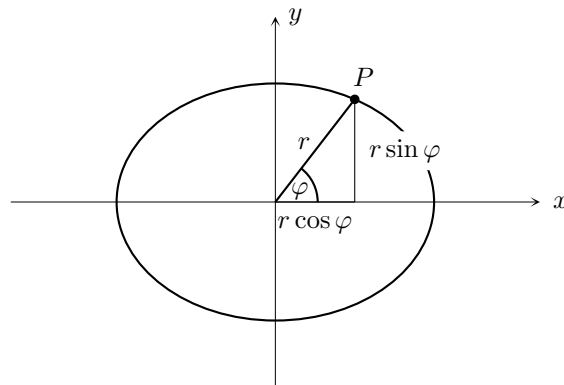


Abb. 80

Nun ist

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \cdot b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \in E & \quad x^2 + b^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \\
& = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + b^2 \\
& = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) r^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \\
\Leftrightarrow & \quad r^2 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2(\varphi)\right) = b^2 \\
\Leftrightarrow & \quad r^2 = \frac{b^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2(\varphi)} \\
& = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\varphi)} \\
& \text{mit } \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.
\end{aligned}$$

Definition 1.7.13 Sei E eine Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b , wobei $a > b$. Die Zahl

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

heißt *numerische Exzentrizität von E* .

Hyperbeln

Definition 1.7.14 Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ mit $A \neq B$. Sei weiter $0 < \varrho < \|A - B\|$. Dann heißt

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|\|A - P\| - \|B - P\|\| = \varrho\}$$

Hyperbel. A und B heißen *Brennpunkte*, $\frac{1}{2}(A + B)$ heißt *Mittelpunkt von H* . Die Geraden

$$G(A, B) \text{ sowie } \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \langle Q, B - A \rangle = \frac{1}{2}(\|B\|^2 - \|A\|^2)\}$$

heißten *Achsen der Hyperbel*.

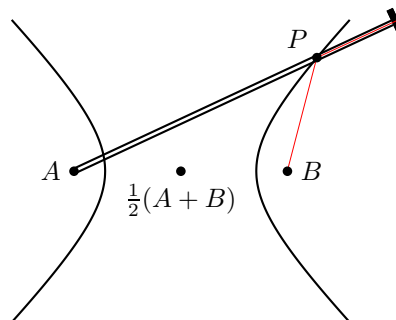


Abb. 81

Definition 1.7.15 Die beiden Zusammenhangskomponenten einer Hyperbel nennt man *Hyperbeläste*:

$$H_B = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|A - P\| - \|B - P\| = \varrho\},$$

$$H_A = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|B - P\| - \|A - P\| = \varrho\}.$$

Bemerkung 1.7.16 Auch diese Definition ist konstruktiv, obgleich die Konstruktion nicht so offensichtlich ist wie bei Ellipsen. In der Abbildung 81 ist bereits die Möglichkeit der Hyperbelkonstruktion mit Faden (rot im Bild) und Lineal (als doppelte Linie) dargestellt. Dabei wird das Lineal der Länge L in einem der Brennpunkte – hier A – mit einem Ende drehbar befestigt. Am anderen Ende wird ein Ende des Fadens der Länge l festgebunden, und das noch freie Ende des Fadens befestigt man im zweiten Brennpunkt. Nun wird das Schreibgerät so an das Lineal geführt, dass es den Faden straffzieht. Dreht man das Lineal, erhält man ein Teil der Hyperbel.

(Die gesamte Hyperbel kann man schon deshalb nicht erhalten, weil das Lineal nur eine endliche Länge besitzt. Außerdem muss man das Lineal nacheinander an beiden Brennpunkten befestigen, um die verschiedenen Hyperbeläste zu bekommen.)

Dass dabei tatsächlich eine Hyperbel konstruiert wird, erkennt man, wenn man den Faden wieder von B losbindet und an das Lineal anlegt (also B durch eine Drehung um den Punkt P auf das Lineal legt), denn dann sieht man:

$$\|A - P\| - \|B - P\| = \|A - f(B)\| = L - l =: \varrho.$$

(Wem es an Vorstellungskraft mangelt, der möge $\|B - P\| = l - \|P - C\|$ einsetzen, um auf dieselbe Gleichung zu kommen.)

Bemerkung 1.7.17 Wir untersuchen die Notwendigkeit der Bedingung $0 < \varrho < \|A - B\|$:

Mit jedem P gilt die inverse Dreiecksungleichung

$$\|A - B\| \geq \left| \|A - P\| - \|B - P\| \right| = \varrho.$$

$\varrho > \|A - B\|$ geht also schon mal nicht, da wäre dann $H = \emptyset$, und das soll nicht Hyperbel heißen. Für $\varrho = \|A - B\|$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Ist $P \in H_B$, so ist

$$\|A - B\| = \|A - P\| - \|B - P\| \Leftrightarrow \|A - P\| = \|A - B\| + \|B - P\| \Rightarrow B \in \overline{AP};$$

Ist $P \in H_A$, so ist

$$\|A - B\| = \|B - P\| - \|A - P\| \Leftrightarrow A \in \overline{BP}.$$

Somit wäre in diesem Fall $H = G(A, B) - \overline{AB} \cup \{A, B\}$ – dieses Gebilde soll auch nicht Hyperbel heißen.

Dass $\left| \|A - P\| - \|B - P\| \right| = \varrho < 0$ zu einer leeren Menge H führt, ist klar. Für $\varrho = 0$ erhalten wir $\|A - P\| = \|B - P\|$, und das beschreibt die Mittelsenkrechte von \overline{AB} . Auch diese Gerade ist keine Hyperbel.

Die Betrachtung dieser Grenzfälle gibt uns jedoch einen Hinweis darauf, welcherart Hyperbeln sein können: Für kleine ϱ ergibt sich dieses Bild:

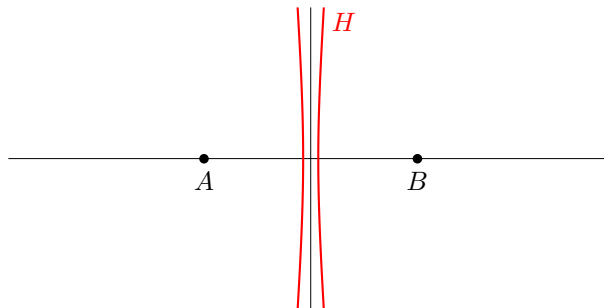


Abb. 82

Eine Hyperbel mit großem ϱ sieht dagegen so aus:

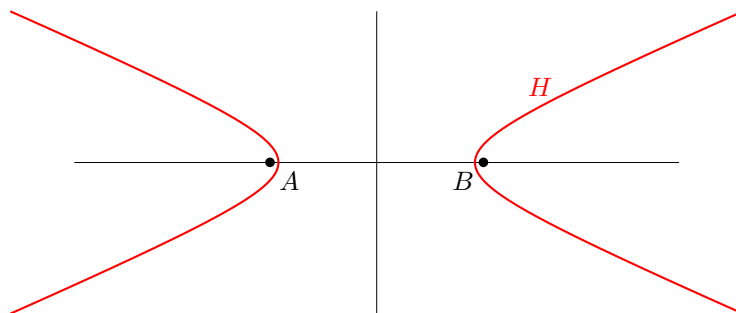


Abb. 83

Dabei kann man ϱ direkt ablesen, denn ϱ ist der Abstand der beiden Achsenschnittpunkte:

Seien X_1, X_2 die beiden Schnittpunkte, X_1 liege näher bei A . Dann ist aufgrund der Symmetrie $\|A - X_1\| = \|B - X_2\|$, und weiter:

$$\varrho = \|A - X_2\| - \|B - X_2\| = \|A - X_2\| - \|A - X_1\| = \|X_1 - X_2\|.$$

Bemerkung 1.7.18 Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B , dem Mittelpunkt M und den Achsen g und h .

Ist $f \in E(2)$, so ist $f(H)$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten $f(A)$ und $f(B)$, dem Mittelpunkt $f(M)$ und den Achsen $f(g)$ und $f(h)$.

Satz 1.7.19 $H \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Hyperbel genau dann, wenn es ein $f \in E(2)$ und positive reelle Zahlen a, b gibt, so dass

$$f(H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}. \quad (1.24)$$

Beweis.

„ \Rightarrow “ Wähle wieder ein $f \in E(2)$ so, dass

$$f(A) = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, f(B) = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma > 0$. Hierbei gilt

$$\varrho < \|A - B\| = \|f(A) - f(B)\| = 2\sigma, \quad (1.25)$$

und diese Bedingung wird den Unterschied zur Ellipse bewirken. Genau wie im Satz 1.7.7 gelangen wir durch mehrfaches Quadrieren – und hierbei fallen die Betragsstriche und das Minus aus der Definition von Hyperbeln weg – zu der Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow \frac{4}{\varrho^2}x^2 + \frac{4}{\varrho^2 - 4\sigma^2}y^2 = 1.$$

Nun ist aber $\varrho^2 - 4\sigma^2$ negativ, also müssen wir die Differenz umkehren, um die Wurzel ziehen und somit b finden zu können, und an dieser Stelle kommt das Minus wieder in die Gleichung: Mit

$$a := \frac{\varrho}{2}, b := \frac{\sqrt{4\sigma^2 - \varrho^2}}{2}$$

gilt Gleichung (1.24).

„ \Leftarrow “ $f(H)$ ist eine Hyperbel, da mit

$$\varrho := 2a, \sigma := \sqrt{a^2 + b^2}$$

die Kette von Äquivalenzen zurückverfolgt werden kann, und wegen Bemerkung 1.7.18 ist dann auch H selbst eine Hyperbel. \square

Korollar 1.7.20 Zu jeder Hyperbel $H \subset \mathbb{R}^2$ gibt es eine Abbildung $f \in \text{Aff}(2)$ derart, dass

$$f(H) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \right\}.$$

Beweis. Setze $f := f_2 \circ f_1$, wobei $f_1 \in E(2)$ wie im Satz 1.7.19 und f_2 linear, gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$. Dann zeigt man wie in Korollar 1.7.8 die gewünschte Aussage.

Wir erinnern uns an die *hyperbolischen Funktionen*. Sie sind definiert durch

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(t) := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh(t) := \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

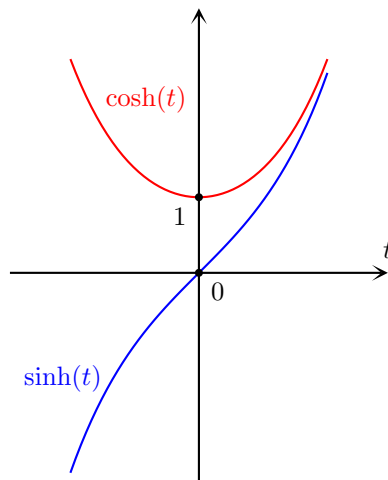


Abb. 84

Man prüft leicht nach, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad (1.26)$$

$$\sinh(-t) = -\sinh(t), \quad \cosh(-t) = \cosh(t), \quad (1.27)$$

$$\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1. \quad (1.28)$$

Aus (1.28) entnehmen wir direkt, dass die Kurve $t \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$ eine Teilmenge von $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \right\}$ durchläuft. Betrachten wir nun andererseits diese Menge und setzen $y =: \sinh(t)$, so erhalten wir aus (1.28) $x^2 = \cosh(t)^2$, also entweder $x = \cosh(t)$ oder $x = -\cosh(t)$. Die Kurve durchläuft somit genau die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0 \right\}$.

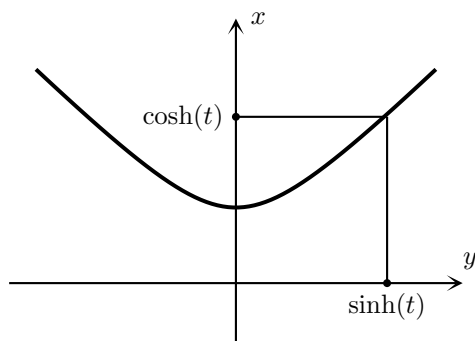


Abb. 85

Korollar 1.7.21 Ist $H \subset \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel, dann gibt es ein $f \in E(2)$, so dass

$$f(H) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \pm a \cdot \cosh(t) \\ b \cdot \sinh(t) \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis. Wählen wir f gemäß Satz 1.7.19 und f_2 gemäß Korollar 1.7.20, so ist nach obiger Vorüberlegung

$$f_2(f(H)) = \left\{ \left(\begin{array}{c} \pm \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Durch die Anwendung von f_2^{-1} entsteht daraus die gewünschte Form. \square

Satz 1.7.22 Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel, sei $f \in \text{Aff}(2)$. Dann ist $f(H)$ wieder eine Hyperbel.

Beweis. Analog zu Satz 1.7.10 genügt es, sich auf die Hyperbel

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \mid x^2 - y^2 = 1 \right\}$$

und lineare Abbildungen $f : x \mapsto Mx$ mit $M \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ zu beschränken.

Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte der SPD-Matrix $M^t M$ mit den zugehörigen Eigenvektoren v_1 bzw. v_2 , die eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bilden. Wir setzen wieder $\varrho := 2\sqrt{\lambda_1}$, diesmal jedoch $\sigma := \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$. Dann zeigt man wie in Satz 1.7.10, dass $f(H)$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten $\pm \sigma \frac{Mv_1}{\|Mv_1\|}$ ist.

Definition 1.7.23 Seien $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$d(Y, Z) := \inf\{\|y - z\| \mid y \in Y, z \in Z\}$$

der *Abstand von Y und Z* , d.h. man betrachtet alle möglichen Abstände von $x \in X$ und $y \in Y$ und nimmt davon das Infimum.

Analog definieren wir für $x \in \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$

$$d(x, Y) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\}.$$

Bemerkung 1.7.24 Ist $Y \cap Z \neq \emptyset$, dann ist $d(Y, Z) = 0$.

Es kann jedoch Mengen $Y, Z \subset X$ geben, für die $d(Y, Z) = 0$ gilt, obwohl $Y \cap Z = \emptyset$ ist.

Beispiel 1.7.25 Seien $Y = (0, 1)$, $Z = (-1, 0)$. Dann ist

$$\inf\{\|y - z\| \mid y \in Y, z \in Z\} = 0,$$

aber dieses Infimum wird nicht angenommen.

Definition 1.7.26 Sei $H \subset \mathbb{R}^2$ eine Hyperbel. Eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Asymptote* von H , falls

1. $G \cap H = \emptyset$ sowie
2. $d(G, H) = 0$.

Bemerkung 1.7.27 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $P \in \mathbb{R}^2 - G$. Sei Q der Fußpunkt des Lotes von P auf G .

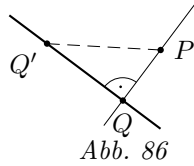


Abb. 86

Dann ist $d(P, G) = \|P - Q\|$, denn für jedes $Q' \neq Q$ folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\|P - Q'\| = \sqrt{\|P - Q\|^2 + \|Q - Q'\|^2} > \|P - Q\|.$$

Satz 1.7.28 Jede Hyperbel besitzt genau zwei Asymptoten. Diese schneiden sich im Mittelpunkt der Hyperbel.

Beweis. O.B.d.A. sei die Hyperbel gegeben durch

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Dann hat H den Mittelpunkt 0.

1. Wir zeigen, dass $G_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $G_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ Asymptoten von H sind. Die Geraden G_1 und G_2 sind offensichtlich verschieden und schneiden sich in 0. Danach bleibt nur noch zu zeigen, dass es keine weiteren Asymptoten von H gibt.

Für einen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in G_1$ gilt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{ta}{a}\right)^2 - \left(\frac{tb}{b}\right)^2 = t^2 \neq 1,$$

also ist $G_1 \cap H = \emptyset$. Analoges zeigt man für G_2 .

Setze nun für $s \in \mathbb{R}$

$$P_s := \frac{1}{2}e^s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in G_1, \quad Q_s := \begin{pmatrix} a \cosh(s) \\ b \sinh(s) \end{pmatrix} \in H.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \|P_s - Q_s\| &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{e^s}{2} \cdot a - a \cosh(s) \\ \frac{e^s}{2} \cdot b - b \sinh(s) \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} a \left(\frac{e^s}{2} - \frac{e^s + e^{-s}}{2} \right) \\ b \left(\frac{e^s}{2} - \frac{e^s - e^{-s}}{2} \right) \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} -a \frac{e^{-s}}{2} \\ b \frac{e^{-s}}{2} \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{e^{-s}}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

somit ist auch $\inf\{\|P - Q\| \mid P \in G_1, Q \in H\} = 0$ und G_1 ist eine Asymptote von H . Ebenso zeigt man, dass auch G_2 eine Asymptote von H ist.

2. Den Eindeutigkeitsbeweis formal zu führen ist eher ermüdend. Damit darob die Freude an der Geometrie nicht verlorengelht, wollen wir ihn hier nur skizzieren. Sei dazu $G = G_{p,v}$ eine von G_1 und G_2 verschiedene Gerade mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Wir haben gesehen, dass für alle $v \in G_1 \cup G_2$ gilt:

$$\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{b}\right)^2 = 0.$$

Für die Punkte der Hyperbel ist diese Differenz gleich 1, also größer als 0. Aus Stetigkeitsbetrachtungen ergibt sich eine Einteilung von \mathbb{R}^2 : In Abbildung 87 ist das Vorzeichen von $\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{b}\right)^2$ für v aus den verschiedenen Bereichen dargestellt.

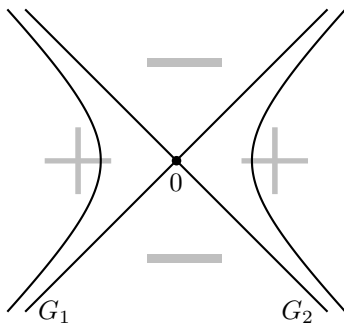


Abb. 87

Dies machen wir uns nun zunutze bei der Argumentation, dass G keine Asymptote von H ist.

1. Fall: $\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{b}\right)^2 > 0$.

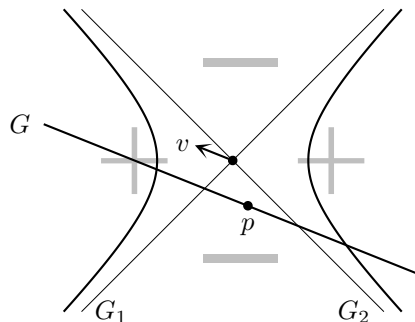


Abb. 88

Dann schneidet G beide Hyperbeläste. Mit $G \cap H \neq \emptyset$ ist damit eine der Voraussetzungen für eine Asymptote verletzt.

2. Fall: $\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{b}\right)^2 = 0$. Die Gerade G verläuft also parallel zu einer der Asymptoten.

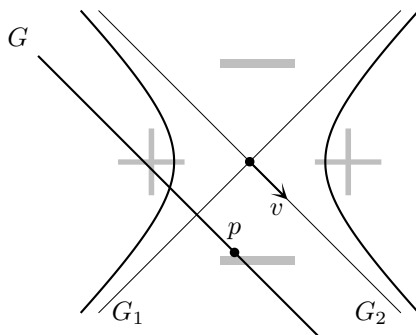


Abb. 89

Dann schneidet G genau einen der Hyperbeläste, aber da $G \cap H \neq \emptyset$, kann G auch in diesem Fall keine Asymptote von H sein.

3. Fall: $\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{b}\right)^2 < 0$. Hierbei können drei verschiedene Situationen auftreten, in Abbildung 90 durch verschiedene Farben symbolisiert:

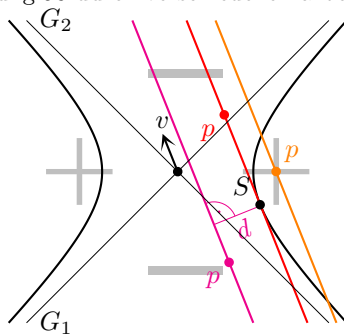


Abb. 90

Im orangefarbenen Fall schneidet G einen Hyperbelast in zwei Punkten, dann ist wieder $G \cap H \neq \emptyset$. Dasselbe gilt für den roten Fall, wo G den Hyperbelast in nur einem Punkt S berührt. Im rosa Fall ist nun zwar $G \cap H = \emptyset$, wir könnten also prinzipiell eine weitere Asymptote gefunden haben; aber wenn wir die Abstandsbedingung überprüfen, so stellen wir mit Hilfe der Abbildung und Bemerkung 1.7.27 fest, dass

$$d(G, H) = d(G, S) = d > 0.$$

Es kann also außer G_1 und G_2 keine weiteren Asymptoten von H geben. \square

Bemerkung 1.7.29 Auch für die Hyperbeln wollen wir noch einmal alle Parameter, die wir definiert haben, zusammenfassen: Wir wählen wieder o.B.d.A. eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt 0 und Achsen, die den Koordinatenachsen entsprechen, so dass

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

wobei $a \geq b > 0$ ist.

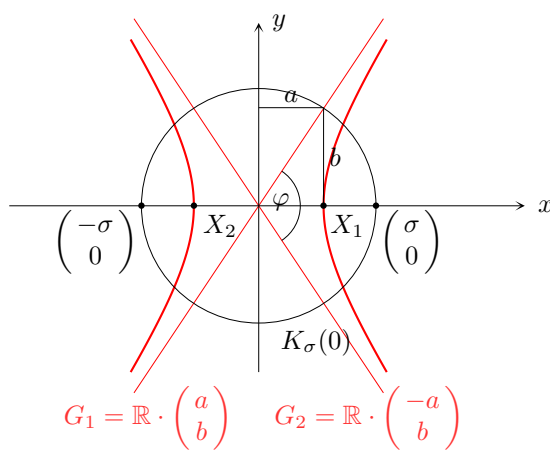
Zunächst sehen wir, dass die Punkte $X_{1,2} := \begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ die Gleichung erfüllen, und dies bestätigt auch die weiter oben gemachte Feststellung, dass der Abstand der Achsen-schnittpunkte $\varrho = 2a$ ist.

Über die Asymptoten wissen wir, dass sie die Punkte $\begin{pmatrix} \pm a \\ b \end{pmatrix}$ enthalten. Wenn man also vom Achsen-schnittpunkt des einen Hyperbelastes um b nach oben geht, so kann man eine Asymptote konstruieren. Die andere entsteht entweder, indem man dasselbe für den anderen Hyperbelast macht, oder durch Spiegelung an der y -Achse.

Nun ist die x -Koordinate der Brennpunkte gegeben durch

$$\pm\sigma = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|,$$

d.h. der bereits zur Konstruktion der Asymptoten benutzte Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und die beiden Brennpunkte liegen auf einem Kreis um den Koordinatenursprung.



Diese Zusammenfassung beschreibt eine Konstruktion der Asymptoten, der Achsen-schnittpunkte oder der Brennpunkte einer Hyperbel, wenn die zwei anderen dieser drei Objekte gegeben sind (natürlich genügt eine gegebene Asymptote).

Außerdem lässt sich der Winkel φ zwischen den Asymptoten leicht aus ϱ und σ bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi) &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right\|} \\
 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{2a^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{2a^2}{a^2 + b^2} - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{\sigma^2} - 1.
 \end{aligned}$$

Parabeln

Definition 1.7.30 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $A \in \mathbb{R}^2 - G$. Dann heißt

$$P = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \|Q - A\| = d(Q, G)\}$$

Parabel mit der Leitgeraden G und dem Brennpunkt A .

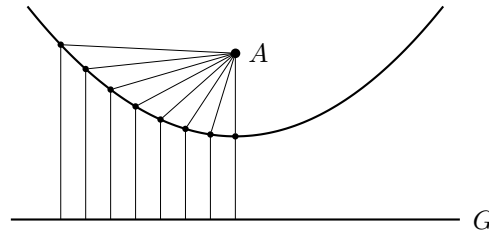


Abb. 92

Bemerkung 1.7.31 Die Parabel lässt sich mit Faden und Geodreieck konstruieren. (Das Geodreieck ist durch seinen rechten Winkel in der Lage, das Lot auf G zu fallen und so den Abstand eines Punktes zu G zu bestimmen.)

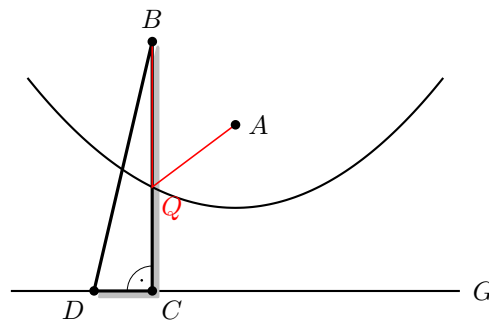


Abb. 93

Dazu befähigt man einen Faden (rot im Bild) der Länge $L = \|B - C\|$ einer Kathete des Geodreiecks an der Ecke B des Dreiecks, die der anderen Kathete gegenüberliegt. Letztere legt man an die Leitgerade an. Das zweite Ende des Fadens wird am Brennpunkt fixiert.

Nun wird das Schreibgerät so an die Kathete geführt, dass es den Faden festzieht. Bewegt man das Geodreieck die Leitgerade entlang (erreicht es den Brennpunkt, muss es gedreht werden), so entsteht ein Teil der Parabel, denn

$$\|Q - A\| = L - \|B - Q\| = \|B - C\| - \|B - Q\| = \|Q - C\| = d(Q, G).$$

Definition 1.7.32 Der Mittelpunkt des Lots von A auf G heißt *Scheitelpunkt der Parabel*.

Bemerkung 1.7.33 Der Scheitelpunkt liegt auf der Parabel.

Bemerkung 1.7.34 Sei P eine Parabel mit der Leitgeraden G , dem Brennpunkt A und dem Scheitelpunkt S . Sei $f \in E(2)$.

Dann ist $f(P)$ eine Parabel mit der Leitgeraden $f(G)$, dem Brennpunkt $f(A)$ und dem Scheitelpunkt $f(S)$.

Satz 1.7.35 $P \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Parabel genau dann, wenn es eine euklidische Bewegung $f \in E(2)$ und eine reelle Zahl $a > 0$ gibt, so dass

$$f(P) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 \right\}. \quad (1.29)$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Wir zeigen, dass $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 \right\}$ die Parabel P mit dem Brennpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ und der Leitgeraden $G = G_{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ist.

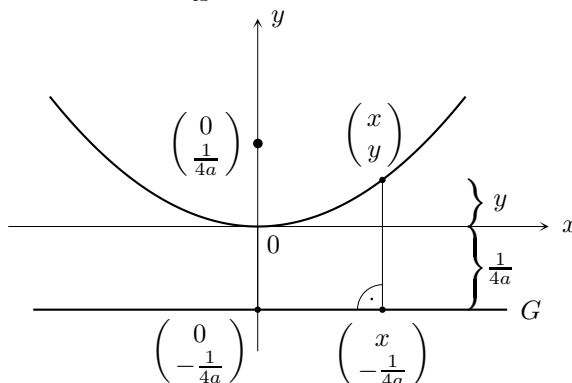


Abb. 94

Es ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \right\| &= d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, G\right) \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{1}{4a} \end{pmatrix} \right\| &= y + \frac{1}{4a} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} &= y + \frac{1}{4a} \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 &= \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{y}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 &= y^2 + \frac{y}{2a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{y}{a} \\ \Leftrightarrow y &= ax^2. \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ Sei P eine Parabel. Verschiebe den Scheitel mittels $f_1 \in E(2)$ in den Koordinatenursprung. Drehe nun mittels $f_2 \in E(2)$ um 0 so, dass $f_1(G)$ auf eine Parallele zur x -Achse mit negativer y -Komponente abgebildet wird. Setze $f := f_2 \circ f_1$.

Bemerkung 1.7.34 liefert nun, dass Brennpunkt, Scheitelpunkt und Leitgerade von P auf die entsprechenden Objekte von $f(P)$ abgebildet wird, und nach dem ersten Beweisteil besitzt $f(P)$ die gewünschte Form. \square

Satz 1.7.36 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Parabel mit dem Brennpunkt A und der Leitgeraden G . Sei $H \perp G$ eine weitere Gerade, S sei der Schnittpunkt von H mit P . Sei schließlich T die Tangente an P im Punkt S .

Dann gilt:

$$\sphericalangle(T, H) = \sphericalangle(T, G(A, S)).$$

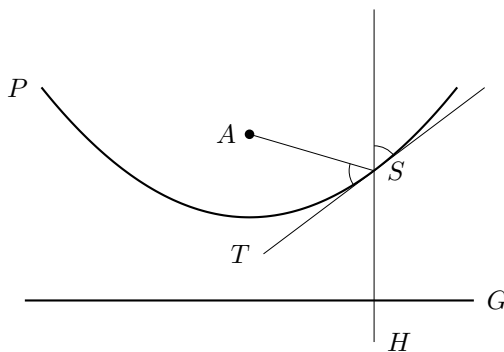


Abb. 95

Beweis. O.B.d.A. habe P die Form (1.29). Da $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P$ ist, können wir schreiben:

$$S = \begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Parabel nun als Funktion ($P = S(x)$ mit $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$), und somit können wir den Anstieg von T in S einfach als erste Ableitung $\frac{d}{dx}S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}$ bestimmen und schreiben:

$$T = G\left(\begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}\right).$$

Für den Winkel $\psi = \sphericalangle(T, H)$ gilt demnach:

$$\cos(\varphi) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}};$$

und für $\psi = \sphericalangle(T, G(A, S))$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \cos(\psi) &= \frac{\left\langle -\begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}, A - S \right\rangle}{\left\| -\begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix} \right\| \|A - S\|} \\
 &= \frac{\left\langle -\begin{pmatrix} 1 \\ 2ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{ax} - ax^2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{1 + 4a^2x^2} \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4a} - ax^2\right)^2}} \\
 &= \frac{x + 2ax \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{1 + 4a^2x^2} \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4a}\right)^2 - \frac{x^2}{2} + a^2x^4}} \\
 &= \frac{2ax \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)}{\sqrt{1 + 4a^2x^2} \sqrt{\left(\frac{1}{4a} + ax^2\right)^2}} \\
 &= \frac{2ax}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \\
 &= \cos(\varphi).
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.7.37 Die eben gezeigte Eigenschaft von Parabeln verleiht diesen Kurven zweiten Grades eine immense Bedeutung: Signale, die aus großer Entfernung kommen, erreichen eine parabelförmige Antenne (Parabolantenne) als nahezu parallele Strahlen. Diese werden nach Satz 1.7.36 alle in den Brennpunkt reflektiert, wo so ein verstärktes Signal registriert werden kann.

Das ist auch der Grund, weshalb der Brennpunkt Brennpunkt heißt.

Satz 1.7.38 *Ist $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Parabel, $f \in \text{Aff}(2)$, dann ist auch $f(P)$ eine Parabel.*

Diesen Satz belassen wir hier ohne Beweis.

Kapitel 2

Metrische Räume

2.1 Isometrien

Bislang habe wir nur die euklidische Geometrie untersucht, bei der sich alles in einer Ebene abspielt. Wichtig für die See- und Luftfahrt ist jedoch die Geometrie der Erdoberfläche, welche sich in guter Näherung als Geometrie auf der Kugeloberfläche beschreiben lässt. In der Relativitätstheorie spielt hingegen die Minkowski-Geometrie eine übergeordnete Rolle.

Um nun solche Geometrien beschreiben zu können, abstrahieren wir den Begriff „Raum“, unter dem wir uns bisher nur den euklidischen vorstellten, und führen dazu den Begriff des metrischen Raumes ein. Indem wir dann einige bereits über die euklidische Ebene getroffene Aussagen verallgemeinern, stellen wir die Grundlagen für die Untersuchung der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie bereit, die uns in den anschließenden zwei Kapiteln beschäftigen wird.

Definition 2.1.1 Sei X eine Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

1. $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$.

Dann heißt (X, d) *metrischer Raum*.

Beispiel 2.1.2 Beim n -dimensionalen euklidischen Raum ist $X = \mathbb{R}^n$ und $d_E(x, y) = \|x - y\|$ der euklidische Abstand. Dabei bezeichnet $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die euklidische Norm und $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ das euklidische Skalarprodukt, wobei wir wie üblich $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ schreiben. Wir untersuchen, ob die Axiome eines metrischen Raumes erfüllt sind:

Axiom 1 ist erfüllt, denn

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \geq 0$$

und

$$0 = d_E(x, y) = \|x - y\| \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Axiom 2 ist erfüllt, denn

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d_E(y, x).$$

Axiom 3 folgt aus der Dreiecksungleichung für die Norm $\|\cdot\|$: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Mit $v = x - y$ und $w = y - z$ erhält man somit:

$$d_E(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d_E(x, y) + d_E(y, z).$$

Also ist (\mathbb{R}^n, d_E) ein metrischer Raum.

Beispiel 2.1.3 Die *Sphäre* $X = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ wird versehen mit dem *sphärischen Abstand* $d_S(x, y) = \arccos(\langle x, y \rangle)$.

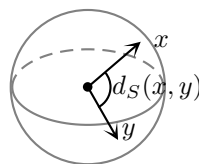


Abb. 96

Auch (S^2, d_S) ist ein metrischer Raum:

Axiom 1 ist erfüllt, da

$$d_S(x, y) \geq 0 \text{ klar (Wertebereich der Arkuskosinusfunktion)}$$

und

$$d_S(x, y) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 1.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$1 = |\langle x, y \rangle| = \underbrace{\|x\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} \Leftrightarrow x = \alpha \cdot y, \alpha \in \mathbb{R};$$

aber da $1 = \|x\| = \|\alpha \cdot y\| = |\alpha| \cdot \|y\| = |\alpha|$, kann nur $x = \pm y$ sein. Für $x = -y$ ergibt sich jedoch

$$\langle x, y \rangle = \langle -y, y \rangle = -\|y\|^2 = -1,$$

also muss $d_S(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$ gelten.

Axiom 2 ist klar, da das euklidische Skalarprodukt symmetrisch ist.

Axiom 3 benötigt einige Überlegung: Zunächst sei an ein nützliches Hilfsmittel erinnert, das *Vektorprodukt* im \mathbb{R}^3 . Zu $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist es definiert durch

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Durch einfaches Nachrechnen verifiziert man leicht für $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(i) \quad x \times y = -y \times x$$

$$(ii) \quad \langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} =: \det(x, y, z)$$

$$(iii) \quad (x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$$

$$(iv) \quad \langle x \times y, z \times w \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle x, z \rangle & \langle x, w \rangle \\ \langle y, z \rangle & \langle y, w \rangle \end{pmatrix} = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle$$

Außerdem lässt sich der Sinus des sphärischen Abstands leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} \|x \times y\| &= \sqrt{\langle x \times y, x \times y \rangle} \\ &= \sqrt{\underbrace{\langle x, x \rangle}_{=1} \cdot \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=1} - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle} \\ &= \sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2} \\ &= \sqrt{1 - \cos(d_S(x, y))^2} \\ &= \sqrt{\sin(d_S(x, y))^2} \\ &= \sin(d_S(x, y)). \end{aligned}$$

Nun können wir zum eigentlichen Beweis schreiten:

Falls $d_S(x, y) + d_S(y, z) > \pi$, so gilt die Dreiecksungleichung trivialerweise, da stets $d_S(x, z) \leq \pi$. Sei also $d_S(x, y) + d_S(y, z) \leq \pi$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\cos(d_S(x, y) + d_S(y, z)) \\ &= \cos(d_S(x, y)) \cos(d_S(y, z)) - \sin(d_S(x, y)) \sin(d_S(y, z)) \\ &= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \|x \times y\| \cdot \|y \times z\| \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle x \times y, y \times z \rangle \\ &= \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle} - \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, z \rangle} + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=1} \langle x, z \rangle \\ &= \langle x, z \rangle \\ &= \cos(d_S(x, z)). \end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$, also folgt

$$d_S(x, z) \leq d_S(x, y) + d_S(y, z). \quad \square$$

Definition 2.1.4 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $p \in X$, sei $r > 0$ reell.

Dann heißt $S_r(p) = \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$ die *Abstandssphäre von p in X mit dem Radius r* . Der Punkt p heißt dabei *Mittelpunkt der Sphäre*.

Ist (X, d) einer der Räume (\mathbb{R}^2, d_E) , (S^2, d_S) oder (H^2, d_H) , so nennt man solch eine Abstandssphäre auch *Kreis* und schreibt $K_r(p)$ statt $S_r(p)$.

Beispiel 2.1.5 $(X, d) = (\mathbb{R}^3, d_E)$, $p = 0$, $r = 1$.

Die Abstandssphäre von 0 in \mathbb{R}^3 mit dem Radius 1 ist S^2 , in Symbolen:

$$S_1(0) = S^2.$$

Definition 2.1.6 Sei (X, d) ein metrischer Raum, seien $Y, Z \subset X$. Dann heißt

$$d(Y, Z) := \inf\{d(y, z) \mid y \in Y, z \in Z\}$$

der *Abstand von Y und Z* .

Für $Y \subset X$, $x \in X$ berechnet sich der Abstand nach

$$d(Y, x) := d(x, Y) := \inf\{d(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Definition 2.1.7 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Isometrie*, falls

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

Bemerkung 2.1.8 Isometrien sind immer bijektiv.

Beweis. Wir müssen lediglich die Injektivität zeigen. Seien dazu $x, x' \in X$ verschieden. Dann ist nach Axiom 1

$$0 < d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')) \stackrel{\text{Axiom 1}}{\iff} f(x) \neq f(x'). \quad \square$$

Bemerkung 2.1.9 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Isometrie. Dann ist auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ eine Isometrie.

Beweis.

$$d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \stackrel{\text{Vor.}}{=} d_Y\left(f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(y'))\right) = d_Y(y, y') \quad \square$$

Bemerkung 2.1.10 Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Isometrien, so ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ eine Isometrie.

Beweis.

$$d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(x')) = d_Z\left(g(f(x)), g(f(x'))\right) \stackrel{\text{Vor.}}{=} d_Y(f(x), f(x')) \stackrel{\text{Vor.}}{=} d_X(x, x'). \quad \square$$

Definition 2.1.11 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt

$$\text{Iso}(X, d) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie}\}$$

die *Isometriegruppe* von (X, d) .

Bemerkung 2.1.12 $\text{Iso}(X, d)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition \circ . Das neutrale Element ist die Identität $\text{id} : x \mapsto x$; die Existenz inverser Abbildungen wurde bereits in Bemerkung 2.1.9 gezeigt.

Satz 2.1.13 Eine Abbildung $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ ist sphärische Isometrie genau dann, wenn es ein $A \in \text{O}(3)$ gibt mit $\varphi = A|_{S^2}$, d.h.

$$\text{Iso}(S^2, d_S) = \{\varphi : S^2 \rightarrow S^2 \mid \exists A \in \text{O}(3) \text{ mit } \varphi(x) = Ax \forall x \in S^2\} \cong \text{O}(3).$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ Sei $A \in \text{O}(3)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^t Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ist insbesondere $x \in S^2$, d.h. $\|x\| = 1$, dann ist auch

$$\|Ax\|^2 = \|x\|^2 = 1.$$

Somit bildet A die Sphäre S^2 nach S^2 ab.

Für $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ vermöge $\varphi(x) := A \cdot x$ stellen wir fest:

$$\begin{aligned} \cos(d_S(\varphi(x), \varphi(y))) &= \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \\ &= \langle Ax, Ay \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \\ &= \cos(d_S(x, y)) \end{aligned}$$

und somit $d_S(\varphi(x), \varphi(y)) = d_S(x, y)$. Also ist $\varphi = A|_{S^2}$ eine sphärische Isometrie.

„ \Rightarrow “ Sei $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ eine sphärische Isometrie. Sei $f_1 := \varphi(e_1), f_2 := \varphi(e_2)$ und $f_3 := \varphi(e_3)$, wobei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^3 ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_j \rangle &= \cos(d_S(f_i, f_j)) \\ &= \cos(d_S(e_i, e_j)) \\ &= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

wobei $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ als *Kronecker-Delta* bezeichnet wird.

Also ist (f_1, f_2, f_3) eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 . Sei $x \in S^2$. Schreibe $\varphi(x) = \sum_{i=1}^3 c_i f_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_j &= \langle x, e_j \rangle = \cos(d_S(x, e_j)) = \cos(d_S(\varphi(x), f_j)) \\ &= \langle \varphi(x), f_j \rangle = c_j, \end{aligned}$$

also

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^3 x_i f_i.$$

Somit ist φ die Einschränkung der orthogonalen Abbildung $A := (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die e_i auf f_i abbildet. \square

Satz 2.1.14

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n, d_E) = E(n)$$

Beweis.

1. Die Inklusion „ \supset “ haben wir bereits in Satz 1.2.12 gezeigt.
2. Die umgekehrte Inklusion „ \subset “ erfordert zunächst folgende Vorüberlegung: Ist $\hat{f} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, d_E)$ mit $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(e_j) = e_j \forall j = 1, \dots, n$, dann ist $\hat{f} = \text{id}$ (wobei e_j der j -te Einheitsvektor ist, also derjenige Vektor, in dessen j -ter Komponente eine Eins steht und überall sonst Nullen).

Um das zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ und berechnen:

$$\|\hat{f}(x)\| = d_E(\hat{f}(x), 0) = d_E(x, 0) = \|x\|; \quad d_E(\hat{f}(x), e_j) = d_E(x, e_j),$$

da nach Voraussetzung $\hat{f}(0) = 0$ und $\hat{f}(e_j) = e_j$. Dies ist in folgender Abbildung zusammengefasst:

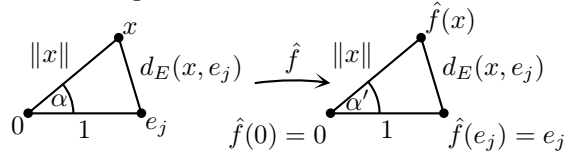


Abb. 97

Aus dem Kosinussatz der euklidischen Geometrie ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$, falls α der Seite a gegenüberliegt) ergibt sich für die in der Grafik eingezeichneten Winkel:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) = \cos(\alpha') &\Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(e_j, x)) = \cos(\sphericalangle(e_j, \hat{f}(x))) \\ &\Leftrightarrow \frac{\langle e_j, x \rangle}{1 \cdot \|x\|} = \frac{\langle e_j, \hat{f}(x) \rangle}{1 \cdot \|\hat{f}(x)\|} = \frac{\langle e_j, \hat{f}(x) \rangle}{1 \cdot \|x\|} \\ &\Rightarrow \langle e_j, x \rangle = \langle e_j, \hat{f}(x) \rangle \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Nun liefert $\langle e_j, v \rangle$ aber genau die j -te Komponente eines Vektors v . Also stimmen alle Komponenten von x und $\hat{f}(x)$ überein, d.h. die Vektoren sind identisch: $\hat{f}(x) = x$. \checkmark

3. Sei schließlich $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, d_E)$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $f \in \text{E}(n)$ sein muss. Setze dazu $b_j := f(e_j) - f(0)$.

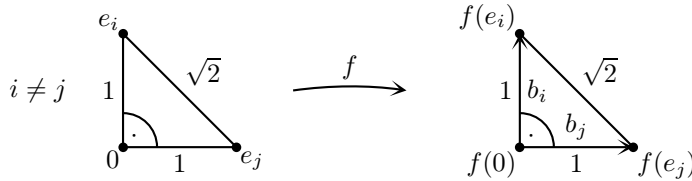


Abb. 98

Sämtliche b_j besitzen Einheitslänge und stehen senkrecht aufeinander. Damit bilden sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , und somit ist $A := (b_1, \dots, b_n) \in \text{O}(n)$. Setze nun $\hat{f}(x) := A^{-1}(f(x) - f(0))$.

Nach Beweisteil 1 ist $\hat{f} \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, d_E)$. Weiter ist

$$\hat{f}(0) = A^{-1}(f(0) - f(0)) = 0 \text{ sowie } \hat{f}(e_j) = A^{-1}(f(e_j) - f(0)) = A^{-1}b_j = e_j.$$

(Die Spalten einer Matrix sind genau die Bilder von e_j , also $Ae_j = b_j$. Somit ist auch $A^{-1}b_j = e_j$.)

Beweisteil 2 liefert uns nun $\hat{f} = \text{id}$, und wir erhalten

$$x = A^{-1}(f(x) - f(0)) \Leftrightarrow f(x) = Ax + \underbrace{f(0)}_b \in \text{E}(n) \quad \square$$

Definition 2.1.15 Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *isometrisch zueinander*, falls es eine Isometrie $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Bemerkung 2.1.16 Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) isometrisch zueinander, so betrachtet man sie als *verschiedene Modelle derselben Geometrie*.

Frage: Ist (\mathbb{R}^2, d_E) isometrisch zu (S^2, d_S) ? (In diesem Falle ließe sich die sphärische Geometrie auf die euklidische zurückführen, was ihre Untersuchung enorm vereinfachen würde.)

Antwort: Der maximale Abstand zweier Punkte aus S^2 ist π (wenn sie genau einander gegenüberliegen), wohingegen der Abstand zweier Punkte im \mathbb{R}^2 beliebig groß werden kann (z.B. ist $d_E\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 7 > \pi$). Es kann also keine Isometrie geben.

2.2 Ähnlichkeitstransformationen

Definition 2.2.1 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Ähnlichkeitstransformation*, falls eine positive Zahl r existiert mit

$$d_Y(f(x), f(x')) = r \cdot d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

Die Zahl r heißt *Streckungsfaktor* oder *Maßstab* von f .

Bemerkung 2.2.2

1. Jede Ähnlichkeitstransformation ist injektiv und damit auch bijektiv.
2. Ist f eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab r , so ist f^{-1} eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab $\frac{1}{r}$.
3. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $f' : Y \rightarrow Z$ Ähnlichkeitstransformationen mit den Maßstäben r bzw. r' , dann ist $f' \circ f : X \rightarrow Z$ eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Maßstab $r \cdot r'$.

Die Beweise der einzelnen Aussagen können leicht in Analogie zu denen in den Bemerkungen 2.1.8 bis 2.1.10 nachvollzogen werden.

Definition 2.2.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt die Menge

$$\text{Ähn}(X, d) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist eine Ähnlichkeitstransformation}\}$$

die *Ähnlichkeitsgruppe von (X, d)* .

Bemerkung 2.2.4 $\text{Ähn}(X, d)$ bildet tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Verkettung „ \circ “ von Funktionen. Das neutrale Element ist id .

$\text{Iso}(X, d) \subset \text{Ähn}(X, d)$ ist eine Untergruppe.

Definition 2.2.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zwei Teilmengen $K, L \subset X$ heißen *kongruent*, falls eine Abbildung $f \in \text{Iso}(X, d)$ existiert mit $f(K) = L$.

K und L heißen *ähnlich*, falls eine Abbildung $f \in \text{Ähn}(X, d)$ mit $f(K) = L$ existiert.

Zwei n -Ecke (A_1, \dots, A_n) und (B_1, \dots, B_n) heißen *kongruent (ähnlich)*, falls $\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{A_i A_{i+1}} \cup \overline{A_n A_1}$ und $\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{B_i B_{i+1}} \cup \overline{B_n B_1}$ kongruent (ähnlich) sind.

Bemerkung 2.2.6 Zwei nicht entartete Dreiecke (A_1, A_2, A_3) und (B_1, B_2, B_3) sind kongruent bzw. ähnlich genau dann, wenn $\{A_1, A_2, A_3\}$ und $\{B_1, B_2, B_3\}$ kongruent bzw. ähnlich sind.

Für n -Ecke mit $n \geq 4$ ist dies kein hinreichendes Kriterium. (Ein Beispiel für Vierecke, die nicht kongruent sind, obschon die Mengen der Eckpunkte kongruent sind, liefert die Abbildung 37.)

2.3 Symmetrien

Definition 2.3.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum; $K \subset X$ sei eine Teilmenge.

Eine Isometrie $f \in \text{Iso}(X, d)$ heißt *Symmetrie von K in X* , falls $f(K) = K$.

Die Menge $\text{Sym}(K, X, d)$ aller Symmetrien von K in X heißt *Symmetriegruppe von K in X* .

Beispiel 2.3.2 Wir untersuchen die Symmetriegruppe eines Punktes in $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$. Sei also $K = \{0\}$.

Sei $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, d_E) = E(n)$, also $f(x) = Ax + b \forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

$$f(K) = K \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \cdot 0 + b = b,$$

die Symmetriegruppe von $\{0\}$ in \mathbb{R}^n besteht also aus allen Isometrien von \mathbb{R}^n , bei denen der Translationsanteil verschwindet:

$$\text{Sym}(\{0\}, \mathbb{R}^n, d_E) = O(n).$$

Diese Gruppe hat unendlich viele Elemente.

Beispiel 2.3.3 Wie sieht die Symmetriegruppe für zwei Punkte aus? Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_E)$, $K = \{0, e_1\}$.

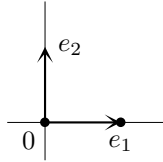


Abb. 99

Sei $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2, d_E) = E(2)$ mit $f(K) = K$. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Fall $f(0) = 0, f(e_1) = e_1$.

Dem Beispiel 2.3.2 entnehmen wir, dass die Bedingung $f(0) = 0$ den Translationsanteil verschwinden lässt, also $f(x) = Ax \forall x \in \mathbb{R}^2$ mit $A \in O(2)$.

Weiterhin soll gelten $e_1 = f(e_1) = A \cdot e_1$, also ist die erste Spalte von A der erste Einheitsvektor:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Nun suchen wir noch b_2 . Da b_1, b_2 aber eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 bilden, kann nur $b_2 = e_2$ oder $b_2 = -e_2$ auftreten.

Im ersten Fall ergibt sich $f = \text{id}$, im zweiten $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, das ist die Spiegelung an der e_1 -Achse.

2. Fall $f(0) = e_1, f(e_1) = 0$.

Aus der ersten Bedingung erhalten wir

$$e_1 = f(0) = A \cdot 0 + b = b,$$

aus der zweiten Bedingung ergibt sich

$$0 = f(e_1) = A \cdot e_1 + b = b_1 + e_1 \Rightarrow b_1 = -e_1.$$

Die möglichen Vektoren für die zweite Spalte der Matrix ergeben sich wie eben zu $b_2 = \pm e_2$.

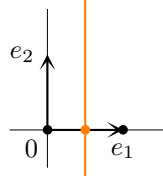


Abb. 100

$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschreibt die Spiegelung an der orangenen Achse;

$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - x$ beschreibt die Drehung um den orangenen Punkt um den Winkel π (also eine Punktspiegelung an $P = \frac{1}{2}e_2$).

$\text{Sym}(\{0, e_1\}, \mathbb{R}^n, d_E)$ hat also 4 Elemente.

Beispiel 2.3.4 $(X, d) = (\mathbb{R}^3, d_E)$, $K = S^2$.

Sei $f \in \text{Sym}(S^2, \mathbb{R}^3, d_E)$. f hat die Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in O(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$.

Ist $b = 0$, so ist $f \in \text{Sym}(S^2, \mathbb{R}^3, d_E)$, da wir wissen, dass jedes $A \in O(3)$ die Sphäre in sich selbst überführt.

Umgekehrt, ist $f(S^2) = S^2$, dann gilt:

$$d_E(x, f(0)) \stackrel{f \in \text{Iso}}{=} \underbrace{d_E(f^{-1}(x), 0)}_{\in S^2} = 1 \quad \forall x \in S^2 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\text{Sym}(S^2, \mathbb{R}^3, d_E) = O(3).$$

Beispiel 2.3.5 Wir untersuchen nun die Symmetrien eines Punktes in S^2 .

Sei $(X, d) = (S^2, d_S)$, $K = \{e_1\}$. Da alle Isometrien von (S^2, d_S) linear sind, folgt aus $f(e_1) = e_1$ sofort, dass die gesamte e_1 -Achse in sich selbst überführt wird. Außerdem darf die Orientierung der e_1 -Achse nicht verändert werden, denn sonst wäre ja $f(e_1) = -e_1$.

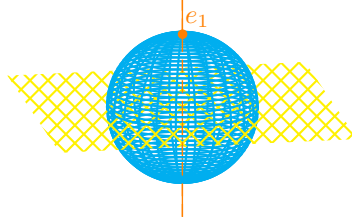


Abb. 101

Das erlaubt uns, die Betrachtung auf die e_2 - e_3 -Ebene zu reduzieren, in der der Koordinatenursprung auf sich selbst abgebildet werden soll. Nach Beispiel 2.3.2 tun dies alle linearen Abbildungen in dieser Ebene und sind sonach auch Symmetrien von $\{e_1\}$ in S^2 ; also

$$\text{Sym}(\{e_1\}, S^2, d_S) \cong O(2).$$

Bemerkung 2.3.6 Seien (X, d) , $K \subset X$ beliebig. Dann ist $\text{Sym}(K, X, d)$ eine Untergruppe von $\text{Iso}(X, d)$.

Beweis.

1. Einselement:

$$\text{id} \in \text{Sym}(K, X, d) \checkmark$$

2. Abgeschlossenheit:

$$f, g \in \text{Sym}(K, X, d) \Rightarrow (f \circ g)(K) = f(g(K)) = f(K) = K \Rightarrow f \circ g \in \text{Sym}(K, X, d) \checkmark$$

3. inverse Elemente:

$$f \in \text{Sym}(K, X, d) \Rightarrow K = f^{-1}(f(K)) = f^{-1}(K) \Rightarrow f^{-1} \in \text{Sym}(K, X, d) \checkmark$$

2.4 Das Hausdorff-Maß

Für diesen gesamten Abschnitt definieren wir für $m \geq 0$

$$\alpha_m := \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}.$$

In diesem Zusammenhang sei an die Gammafunktion erinnert, die definiert ist als

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion sind

$$x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \text{ und } \Gamma(1) = 1,$$

woraus sich induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ergibt. Außerdem werden wir zur Berechnung einiger wichtiger Werte für α_m den Wert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

benötigen.

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi^0}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1} = 1; \\ \alpha_1 &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} = 2; \\ \alpha_2 &= \frac{\pi^1}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{1!} = \pi; \\ \alpha_3 &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Definition 2.4.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $m \geq 0$ und $\delta > 0$.

Für eine Teilmenge $A \subset X$ setze

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) := \alpha_m \cdot \inf \left\{ \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \mid B_j \subset X, \text{diam}(B_j) \leq \delta, \bigcup_j B_j \supset A \right\},$$

wobei $\{B_j\}_j$ höchstens abzählbar ist. Den Durchmesser von B_j erhält man als $\text{diam}(B_j) = \sup\{d(b_1, b_2) \mid b_1, b_2 \in B_j\}$.

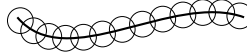


Abb. 102

Da mit $\delta_1 < \delta_2$ die Bedingung $\text{diam}(B_j) \leq \delta_1$ die stärkere Einschränkung darstellt, ist

$$\left\{ \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \mid \text{diam}(B_j) \leq \delta_1 \right\} \subset \left\{ \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \mid \text{diam}(B_j) \leq \delta_2 \right\},$$

und somit kann das Infimum nur größer werden, also

$$\delta_1 < \delta_2 \implies \mathcal{H}_{\delta_1}^m(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^m(A).$$

Damit existiert der Grenzwert

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(A) \in [0, \infty].$$

$\mathcal{H}^m(A)$ heißt *m-dimensionales Hausdorff-Maß von A in X*.

Bemerkung 2.4.2 Für $A \subset X$, $f \in \text{Iso}(X, d)$ gilt

$$\mathcal{H}_\delta^m(f(A)) = \mathcal{H}_\delta^m(A),$$

da sich der Durchmesser der B_j aus den Überdeckungen unter f nicht verändert; und nach dem Grenzübergang erhält man auch

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(A).$$

Bemerkung 2.4.3 Mit $A' \subset A \subset X$ ist jede Überdeckung von A auch eine Überdeckung von A' . Deshalb enthält die für die Bestimmung von $\mathcal{H}_\delta^m(A')$ zu betrachtende Menge mehr Elemente als die entsprechende Menge bei $\mathcal{H}_\delta^m(A)$. Damit kann das Infimum höchstens kleiner werden, also

$$\mathcal{H}_\delta^m(A') \leq \mathcal{H}_\delta^m(A);$$

und nach dem Grenzübergang

$$\mathcal{H}^m(A') \leq \mathcal{H}^m(A).$$

Lemma 2.4.4 Zur Berechnung von $\mathcal{H}_\delta^m(A)$ benötigt man nur solche Überdeckungen, die vollständig in A liegen:

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) := \alpha_m \cdot \inf \left\{ \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \mid B_j \subset A, \text{diam}(B_j) \leq \delta, \bigcup_j B_j = A \right\},$$

wobei $\{B_j\}_j$ höchstens abzählbar ist.

Beweis. Bezeichne die rechte Seite zunächst mit $\tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A)$. Dann wollen wir zeigen, dass $\tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A) = \mathcal{H}_\delta^m(A)$ ist.

Da wir die Menge der zu betrachtenden Überdeckungen eingeschränkt haben, ist die Relation

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A)$$

bereits klar.

Um die andere Richtung der Ungleichung zu zeigen, wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und eine höchstens abzählbare Überdeckung $\{B_j\}_j$ mit $B_j \subset X$, $\bigcup_j B_j \supset A$, $\text{diam}(B_j) \leq \delta$ so, dass

$$\alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(A) + \varepsilon.$$

Dass dies möglich ist, folgt direkt aus der Definition des Hausdorff-Maßes als Infimum.

Setze nun $B'_j := B_j \cap A$. Dann gilt natürlich $B'_j \subset A$ und $\bigcup_j B'_j = \bigcup_j B_j \cap A = A$ sowie

$$\text{diam}(B'_j) \leq \text{diam}(B_j) \leq \delta. \quad (2.1)$$

Die Überdeckung $\{B'_j\}_j$ ist also eine der zu betrachtenden Überdeckungen zur Berechnung von $\tilde{\mathcal{H}}_\delta^m$, und wir erhalten die Ungleichung

$$\tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A) \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B'_j)}{2} \right)^m \stackrel{(2.1)}{\leq} \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \mathcal{H}_\delta^m(A) + \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A) \leq \mathcal{H}_\delta^m(A) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{H}}_\delta^m(A) \leq \mathcal{H}_\delta^m(A),$$

und das ist genau die Ungleichung, die uns bislang noch von der gewünschten Gleichheit trennte. \square

Lemma 2.4.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A_1, \dots, A_n \subset X$ Teilmengen. Dann gilt:

$$\mathcal{H}^m \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^m(A_i).$$

Beweis. Wir wollen zunächst wieder die \mathcal{H}_δ^m miteinander vergleichen, sei also $\delta > 0$. Wähle nun wie im vorigen Lemma ein $\varepsilon > 0$ und eine höchstens abzählbare Überdeckung $\{B_{ij}\}_j$ von A_i mit $\text{diam}(B_{ij}) \leq \delta$ so, dass

$$\varepsilon + \mathcal{H}_\delta^m(A_i) \geq \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_{ij})}{2} \right)^m.$$

Nun nimmt man all diese Überdeckungen zusammen und stellt fest, dass die so entstandene Familie $\{B_{ij}\}_{i,j}$ eine Überdeckung von $\bigcup_i A_i$ darstellt, die sämtliche in der Definition des Hausdorff-Maßes geforderten Bedingungen erfüllt. Somit ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^m\left(\bigcup_i A_i\right) &\stackrel{\text{Def.}}{\leq} \alpha_m \sum_{i,j} \left(\frac{\text{diam}(B_{ij})}{2} \right)^m \\ &= \sum_i \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_{ij})}{2} \right)^m \\ &\leq \sum_i (\varepsilon + \mathcal{H}_\delta^m(A_i)) \\ &= \sum_i \mathcal{H}_\delta^m(A_i) + n\varepsilon \\ \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^m\left(\bigcup_i A_i\right) &\leq \sum_i \mathcal{H}_\delta^m(A_i) \\ \xrightarrow{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^m\left(\bigcup_i A_i\right) &\leq \sum_i \mathcal{H}^m(A_i). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.6 Sind $A_1, \dots, A_n \subset X$ kompakt und paarweise disjunkt, dann ist

$$\mathcal{H}^m\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathcal{H}^m(A_i).$$

(Der Beweis stellt die nächste Übungsaufgabe dar.)

Beispiel 2.4.7 Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum, sei $A \subset X$. Wir berechnen das 0-dimensionale Hausdorff-Maß von A .

1. Fall $A = \{a\}$.

Zunächst stellen wir fest, dass $\left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2}\right)^0 = 1$ gilt und damit

$$\sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^0 = \#\{B_j\}.$$

Mit Lemma 2.4.4 brauchen wir nur solche Überdeckungen zu betrachten, die ganz in A liegen; und da bleibt als einzige Möglichkeit $B_j = A = \{a\}$. Die Überdeckung besteht also nur aus einer einzigen Menge, woraus wir erhalten:

$$\mathcal{H}^0(A) = \alpha_0 \cdot 1 = 1.$$

2. Fall $\#A = n \in \mathbb{N}$, also $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Da die Mengen $\{a_i\}$ kompakt und paarweise disjunkt sind, ist nach Bemerkung 2.4.6

$$\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^0(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

3. Fall $\#A = \infty$.

Wähle eine Teilmenge $A_n \subset A$ mit $\#A_n = n$. Gemäß Bemerkung 2.4.3 ist dann

$$\mathcal{H}^0(A) \geq \mathcal{H}^0(A_n) = n,$$

und dies gilt für beliebig große n , so dass sich für $n \rightarrow \infty$ ergibt:

$$\mathcal{H}^0(A) = \infty.$$

In jedem Fall erhalten wir also

$$\mathcal{H}^0(A) = \#A,$$

weshalb das 0-dimensionale Hausdorff-Maß auch *Zählmaß* genannt wird.

Satz 2.4.8 (Verallgemeinertes Cavalieri'sches Prinzip) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei ferner A eine kompakte Teilmenge von U . Sei schließlich $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\|\text{grad } f(x)\| = 1 \forall x \in A$. Dann gilt:

$$\mathcal{H}^m(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{m-1}(A \cap f^{-1}(t)) dt.$$

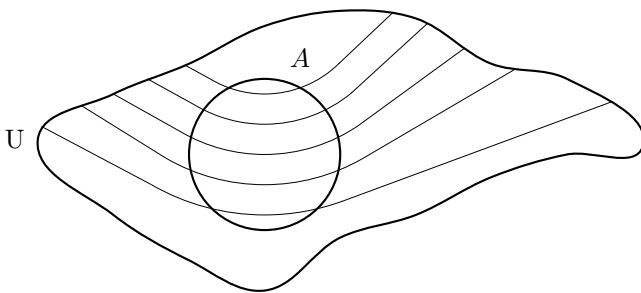


Abb. 103

In der Abbildung sind Niveaumengen $f^{-1}(t)$ eingezeichnet. Mit der Bedingung für den Gradienten stellen wir sicher, dass diese Niveaumengen in ganz A denselben Abstand haben – was außerhalb von A geschieht, spielt keine Rolle. Durch die Gradientenbedingung werden Situationen wie die folgenden ausgeschlossen:



Abb. 104

Dieser Satz soll hier nicht bewiesen werden, da uns die Grundlagen aus der Maßtheorie fehlen.

Beispiel 2.4.9 Wir bestimmen das eindimensionale Hausdorff-Maß des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Um den Satz 2.4.8 anwenden zu können, wählen wir \mathbb{R} als offene Obermenge, $f(x) = x$ als stetig differenzierbare Funktion. Es gilt $\text{grad } f(x) = 1$.

Der Schnitt des Intervalls mit einer Niveaumenge von f läßt sich einfach angeben:

$$[a, b] \cap f^{-1}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } t \notin [a, b]; \\ \{t\}, & \text{falls } t \in [a, b]. \end{cases}$$

Somit ist für $t \in [a, b]$

$$\mathcal{H}^0([a, b] \cap f^{-1}(t)) = \mathcal{H}^0(\{t\}) = 1.$$

Nun liefert Cavalieri:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n([a, b]) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^0([a, b] \cap f^{-1}(t)) dt \\ &= \int_a^b 1 dt \\ &= (b - a). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4.10 Nach Bemerkung 2.4.2 ist somit für $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^1(\overline{ab}) = d_E(a, b).$$

Beispiel 2.4.11 Das n -dimensionale Hausdorff-Maß des Quaders

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

läßt sich bestimmen als

$$\mathcal{H}^n(Q) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Wir zeigen dies durch vollständige Induktion nach n .

$n = 1$: Der eindimensionale Quader ist einfach das Intervall $[a_1, b_1]$, und dessen Hausdorff-Maß ist nach Beispiel 2.4.9 $\mathcal{H}^1([a_1, b_1]) = b_1 - a_1$. ✓

$n - 1 \rightarrow n$: Zur Anwendung von Satz 2.4.8 wählen wir als offene Obermenge des Quaders $U = \mathbb{R}^n$, als stetig differenzierbare Funktion $f(x) = x_n$, also die n -te Komponente von x . Damit ist $\text{grad } f(x) = e_n$ und besitzt wirklich die Norm 1. Wir können also das verallgemeinerte Cavalieri'sche Prinzip anwenden.

Dazu untersuchen wir erst die Schnitte der Niveaumengen von f mit dem Quader. Da $f^{-1}(t)$ die Menge derjenigen Vektoren beschreibt, deren letzte Komponente t ist, lässt sich der Schnitt mit dem Quader sehr einfach beschreiben:

$$Q \cap f^{-1}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } t \notin [a_n, b_n]; \\ [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\}, & \text{falls } t \in [a_n, b_n]. \end{cases}$$

Wir erhalten somit für $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(Q \cap f^{-1}(t)) &= \mathcal{H}^{n-1}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{t\}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 2.4.2}}{=} \mathcal{H}^{n-1}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_{n-1} - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nun liefert uns Cavalieri:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(Q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(Q \cap f^{-1}(t)) dt \\ &= \int_{a_n}^{b_n} (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_{n-1} - a_{n-1}) dt \\ &= (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot (b_n - a_n). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.12 Tatsächlich ist es so, dass das Integral, welches beim verallgemeinerten Cavalieri'schen Prinzip zu bestimmen ist, in jedem Fall endliche Grenzen besitzt, da auf diese Weise nur das Hausdorff-Maß einer kompakten und damit insbesondere beschränkten Menge berechnet werden kann. Die Grenzen von $-\infty$ bis ∞ sind nur deshalb im Satz angegeben, da sie immerhin von der gewählten Menge A und der Funktion f abhängen und diese allgemein anzugeben das Integral somit unübersichtlich werden ließe.

Definition 2.4.13 Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, sei $h > 0$. Dann heißt

$$B \times [0, h]$$

Zylinder über der Basis B mit der Höhe h .

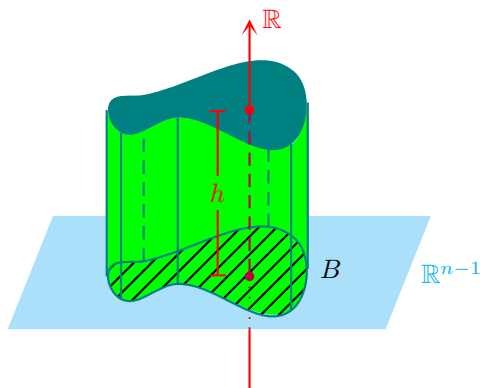


Abb. 105

Mit der Abbildung f wie in Beispiel 2.4.11 berechnet man nach Cavalieri

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(B \times [0, h]) &= \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}(B \times \{t\}) dt \\ &= \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}(B) dt \\ &= h \cdot \mathcal{H}^{n-1}(B). \end{aligned}$$

Definition 2.4.14 Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, sei $h > 0$ und $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann heißt

$$Z_h(B, b) = \bigcup_{t=0}^h ((B + tb) \times \{t\})$$

schiefer Zylinder über der *Basis* B mit der *Höhe* h .

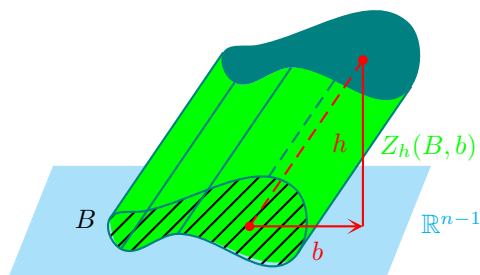


Abb. 106

Auch hier berechnen wir mit Cavalieri und f wie gehabt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^n(Z_h(B, b)) &= \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(t) \cap Z_h(B, b)) dt \\
 &= \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}((B + tb) \times \{t\}) dt \\
 &= \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}(B + tb) dt \\
 &\stackrel{\text{Bem. 2.4.2}}{=} \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}(B) dt \\
 &= h \cdot \mathcal{H}^{n-1}(B).
 \end{aligned}$$

Satz 2.4.15 Sei (X, d) ein metrischer Raum, A eine Teilmenge von X . Sei weiter $f \in \text{Ähn}(X, d)$ mit dem Maßstab r . Dann gilt für alle $m \geq 0$:

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = r^m \mathcal{H}^m(A).$$

Beweis. Wähle $\delta > 0$ und eine Überdeckung $\{B_j\}_j$ von A mit $\text{diam}(B_j) \leq \delta$. Dann ist $\{f(B_j)\}_j$ eine Überdeckung von $f(A)$ mit $\text{diam}(f(B_j)) \leq r\delta$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
 \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(f(B_j))}{2} \right)^m &= \alpha_m \sum_j \left(\frac{r \text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \\
 &= r^m \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \\
 \stackrel{\inf}{\implies} \mathcal{H}_{r\delta}^m(f(A)) &= r^m \mathcal{H}_\delta^m(A) \\
 \stackrel{\delta \searrow 0}{\implies} \mathcal{H}^m(f(A)) &= r^m \mathcal{H}^m(A).
 \end{aligned}$$

□

Definition 2.4.16 Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt, sei $h > 0$ und $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann heißt

$$C(B, b, h) = \left\{ s \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} \mid x \in B, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

Kegel über der Basis B mit der Spitze $\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix}$.

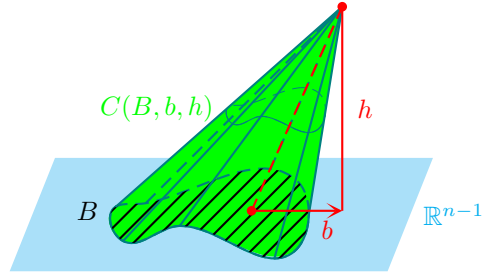


Abb. 107

Um $\mathcal{H}^n(C(B, b, h))$ mittels des verallgemeinerten Cavalieri'schen Prinzips zu bestimmen, wählen wir wieder f wie oben und sehen uns zunächst die Schnitte mit den Niveaumengen an:

$$\begin{aligned} f^{-1}(t) \cap C(B, b, h) &= \left\{ \begin{pmatrix} sx + (1-s)b \\ (1-s)h \end{pmatrix} \mid x \in B, (1-s)h = t \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (1 - \frac{t}{h})x + \frac{t}{h}b \\ t \end{pmatrix} \mid x \in B \right\}; \end{aligned}$$

daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(t) \cap C(B, b, h)) &= \mathcal{H}^{n-1} \left(\left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B + \frac{t}{h}b \right) \\ &= \mathcal{H}^{n-1} \left(\left(1 - \frac{t}{h}\right) B \right) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.4.15}}{=} \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(B) \\ \stackrel{\text{Satz 2.4.8}}{\implies} \mathcal{H}^n(C(B, b, h)) &= \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(B) dt \end{aligned}$$

Substitution $x := 1 - \frac{t}{h}$; $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{h} \iff dt = -h dx$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{H}^{n-1}(B) \int_1^0 x^{n-1} (-h) dx \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(B) \cdot h \int_0^1 x^{n-1} dx \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.4.17 Wir bestimmen das zweidimensionale Hausdorff-Maß der Kreisscheibe

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Wir wählen $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$ und erhalten

$$D \cap f^{-1}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } t \notin [-1, 1]; \\ [-\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}], & \text{falls } t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Nun können wir berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(D) &= \int_{-1}^1 \mathcal{H}^1 \left([-\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2}] \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

Substitution $\sin(x) := t$; $\frac{dt}{dx} = \cos(x) \Leftrightarrow dt = \cos(x)dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin(x)^2} \cos(x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx \\ &= (\sin(z) \cos(z) + z) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \cdot 0 + \frac{\pi}{2} - (-1 \cdot 0 - \frac{\pi}{2}) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.4.15 folgt für die Kreisscheibe vom Radius r :

$$\mathcal{H}^2(D) = \pi r^2.$$

Beispiel 2.4.18 Wir bestimmen das dreidimensionale Hausdorff-Maß des Kegels C über der Kreisscheibe D vom Radius r mit der Höhe h .

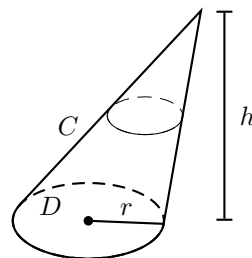


Abb. 108

$$\mathcal{H}^3(C) = \mathcal{H}^3(D) \cdot \frac{h}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{H}^3(C) = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

Beispiel 2.4.19 Das dreidimensionale Hausdorff-Maß der Kugel

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$$

berechnen wir mit dem Cavalierischen Prinzip, wobei die Funktion f wie in allen vorangegangenen Beispielen x auf x_3 abbilde. Dann gilt

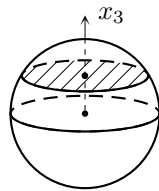


Abb. 109

$$f^{-1}(t) \cap A = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } |t| > 1; \\ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + t^2 \leq 1 \right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } |t| > 1; \\ \text{Kreisscheibe vom Radius } \sqrt{1-t^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^3(A) &= \int_{-1}^1 \mathcal{H}^2(\text{Kreisscheibe vom Radius } \sqrt{1-t^2}) dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2) \cdot \pi dt \\ &= \pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aus Satz 2.4.15 ergibt sich allgemein für die Kugel A_R vom Radius R

$$\boxed{\mathcal{H}^3(A_R) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3.}$$

Beispiel 2.4.20 Nun bestimmen wir das dreidimensionale Hausdorff-Maß der Kugelschale

$$A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq \|x\| \leq R\}.$$

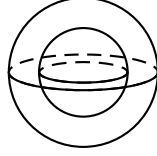


Abb. 110

Es gilt

$$\begin{aligned}
 A_{0,R} &= A_{0,r} \cup A_{r,R} \\
 \stackrel{\text{Lemma 2.4.5}}{\implies} \quad \frac{4\pi R^3}{3} = \mathcal{H}^3(A_{0,R}) &\leq \mathcal{H}^3(A_{0,r}) + \mathcal{H}^3(A_{r,R}) = \frac{4\pi r^3}{3} + \mathcal{H}^3(A_{r,R}) \\
 \implies \mathcal{H}^3(A_{r,R}) &\geq \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3).
 \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Ausdrücke tatsächlich gleich sind, benötigen demnach noch die umgekehrte Ungleichung. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig; dann sind $A_{0,r-\varepsilon}$ und $A_{r,R}$ disjunkt, und da sie überdies noch kompakt sind, können wir Bemerkung 2.4.6 anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{3}(r-\varepsilon)^3 + \mathcal{H}^3(A_{r,R}) &= \mathcal{H}^3(A_{0,r-\varepsilon}) + \mathcal{H}^3(A_{r,R}) \\
 &= \mathcal{H}^3(\underbrace{A_{0,r-\varepsilon} \cup A_{r,R}}_{\subset A_{0,R}}) \\
 &\stackrel{\text{Bem. 2.4.3}}{\leq} \mathcal{H}^3(A_{0,R}) \\
 &= \frac{4\pi}{3}R^3 \\
 \implies \mathcal{H}^3(A_{r,R}) &\leq \frac{4\pi}{3}(R^3 - (r-\varepsilon)^3) \\
 \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\implies} \mathcal{H}^3(A_{r,R}) &\leq \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3).
 \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich somit

$$\boxed{\mathcal{H}^3(A_{r,R}) = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3).}$$

Beispiel 2.4.21 Die eben gewonnene Erkenntnis wollen wir noch benutzen, um den Flächeninhalt der Sphäre zu bestimmen. Dazu berechnen wir das Volumen der Kugelschale mittels Cavalieri, lassen zunächst die Kugeloberfläche unbekannt und erhalten sie schließlich, da wir das Volumen der Kugelschale bereits kennen. Sei also $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, sei weiter $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f : x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Nun ist

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{2x_2}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{2x_3}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{pmatrix} = \frac{x}{\|x\|}, \text{ also } \|\text{grad } f(x)\| = 1 \forall x \in U.$$

Die Niveaumengen besitzen die Form

$$f^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = t\},$$

und außerdem ist

$$f^{-1}(t) \cap A_{r,R} = \begin{cases} f^{-1}(t), & \text{falls } r \leq t \leq R; \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun liefert Cavalieri

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \mathcal{H}^3(A_{r,R}) &= \int_r^R \mathcal{H}^2(f^{-1}(t)) dt \\ &= \int_r^R \mathcal{H}^2(t \cdot S^2) dt \\ &\stackrel{\text{Satz 2.4.15}}{=} \int_r^R t^2 \mathcal{H}^2(S^2) dt \\ &= \mathcal{H}^2(S^2) \int_r^R t^2 dt \\ &= \mathcal{H}^2(S^2) \left(\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Division durch $(R^3 - r^3)/3$:

$$\mathcal{H}^2(S^2) = 4\pi$$

oder allgemeiner

$$\mathcal{H}^2(r \cdot S^2) = 4\pi r^2.$$

Beispiel 2.4.22 Analog berechnet man für die Kreislinie S^1

$$\pi(R^2 - r^2) = \mathcal{H}^1(S^1) \cdot \frac{1}{2}(R^2 - r^2),$$

und somit

$$\mathcal{H}^1(r \cdot S^1) = 2\pi r.$$

Lemma 2.4.23 Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $\mathcal{H}^n(K) < \infty$.

Beweis. Nach dem Satz von Heine-Borel existiert ein $L > 0$, so dass K vollständig im Würfel $[-L, L]^n$ enthalten ist. Damit ist dann

$$\mathcal{H}^n(K) \leq \mathcal{H}^n([-L, L]^n) \stackrel{\text{Bsp. 2.4.11}}{=} (2L)^n < \infty. \quad \square$$

Lemma 2.4.24 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene. Mit K_1 und K_2 seien die Teile von K auf der einen oder der anderen Seite von H (jeweils inklusive $K \cap H$) bezeichnet.

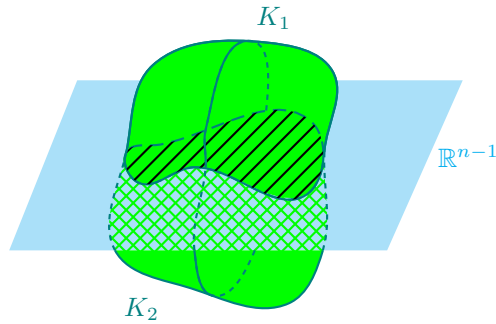


Abb. 111

Dann gilt:

$$\mathcal{H}^n(K) = \mathcal{H}^n(K_1) + \mathcal{H}^n(K_2).$$

Beweis. Da $K_1 \cup K_2 = K$ ist, folgt aus Lemma 2.4.5 direkt

$$\mathcal{H}^n(K) \leq \mathcal{H}^n(K_1) + \mathcal{H}^n(K_2).$$

Wir müssen also lediglich noch die umgekehrte Ungleichung zeigen.

Nach einer eventuellen euklidischen Bewegung ist o.B.d.A. $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, $K_1 = \{x \in K \mid x_n \geq 0\}$, $K_2 = \{x \in K \mid x_n \leq 0\}$. Wähle nun wie im Beweis von Lemma 2.4.23 ein $L > 0$ so, dass $[-L, L]^n \supset K$.

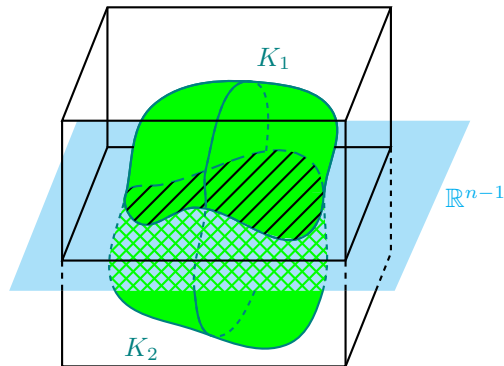


Abb. 112

Zu jedem $\varepsilon > 0$ setze

$$K_{1,\varepsilon} := \{x \in K \mid x_n \geq \varepsilon\} \text{ sowie } K_{2,\varepsilon} := \{x \in K \mid x_n \leq -\varepsilon\}.$$

Dann sind $K_{1,\varepsilon}$ und $K_{2,\varepsilon}$ disjunkt und kompakt, und nach Bemerkung 2.4.6 ist somit

$$\mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon}) + \mathcal{H}^n(K_{2,\varepsilon}) = \mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon} \cup K_{2,\varepsilon}) \leq \mathcal{H}^n(K).$$

Andererseits erkennen wir, wenn wir K_1 den fehlenden Teil (und noch etwas mehr) wiedergeben, dass gilt:

$$K_1 \subset K_{1,\varepsilon} \cup ([-L, L]^{n-1} \times [0, \varepsilon]),$$

also

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(K_1) &\leq \mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon}) + \mathcal{H}^n([-L, L]^{n-1} \times [0, \varepsilon]) \\ &= \mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon}) + (2L)^{n-1} \cdot \varepsilon \\ \implies \mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon}) &\geq \mathcal{H}^n(K_1) - (2L)^{n-1} \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\mathcal{H}^n(K_{2,\varepsilon}) \geq \mathcal{H}^n(K_2) - (2L)^{n-1} \varepsilon.$$

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(K) &\geq \mathcal{H}^n(K_{1,\varepsilon}) + \mathcal{H}^n(K_{2,\varepsilon}) \\ &\geq \mathcal{H}^n(K_1) - (2L)^{n-1} \varepsilon + \mathcal{H}^n(K_2) - (2L)^{n-1} \varepsilon \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^n(K) &\geq \mathcal{H}^n(K_1) + \mathcal{H}^n(K_2). \end{aligned}$$

□

Definition 2.4.25 Wir nennen im Folgenden eine Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine *einfach geschlossene Kurve*, falls

$$c(a) = c(b) \text{ sowie } c|_{[a,b)} \text{ injektiv.}$$

Eine exakte Begriffsbestimmung liefern die Definitionen 5.1.1, 5.1.24 und 5.1.25.

Satz 2.4.26 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, das von der stetigen, stückweise glatten einfach geschlossenen Kurve $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ im mathematisch positiven Sinne umrandet wird.

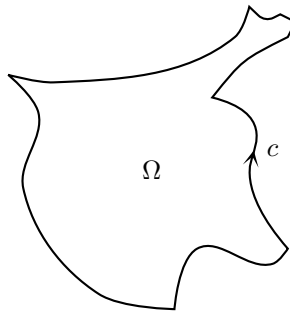


Abb. 113

Dann gilt:

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \int_a^b x(t)\dot{y}(t) dt = - \int_a^b \dot{x}(t)y(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt.$$

Beweis. Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ eine Unterteilung, so dass die $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$ glatt sind.

1. Zunächst zeigen wir die Gleichheit der Integrale. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)\dot{y}(t) dt &= \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\dot{y}(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^N \left(x(t)y(t) \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}(t)y(t) dt \right) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^N (x(t_j)y(t_j) - x(t_{j-1})y(t_{j-1}))}_{=0} - \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}(t)y(t) dt \\ &= - \int_a^b \dot{x}(t)y(t) dt. \end{aligned}$$

Die Gleichheit des Terms $\frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$ ergibt sich daraus sofort.

2. Um das Hausdorff-Maß von Ω zu bestimmen, zerschneiden wir das Gebiet durch senkrechte Geraden (d.h. mit konstantem y), und zwar sollen dies alle diejenigen derartigen Geraden sein, die durch die $c(t_j)$ verlaufen oder tangential an c sind. (Man kann zeigen, dass nach einer eventuellen Drehung nur endlich viele solcher Geraden auftreten.)

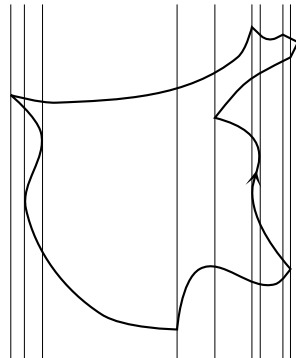


Abb. 114

Betrachte nun ein Teilgebiet

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [x_1, x_2], y(x) \in [y_{\text{unten}}(x), y_{\text{oben}}(x)] \right\},$$

wobei x_1 und x_2 die x -Koordinaten zweier benachbarter jener senkrechten Linien sind.

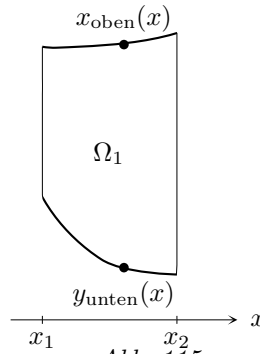


Abb. 115

Wir berechnen mit Cavalieri und der Funktion $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(\Omega_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^1(\Omega_1 \cap f^{-1}(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{H}^1([y_{\text{unten}}(x), y_{\text{oben}}(x)]) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (y_{\text{oben}}(x) - y_{\text{unten}}(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} y_{\text{oben}}(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} y_{\text{unten}}(x) dx. \end{aligned}$$

Sei nun $[\tau_1, \tau_2] \subset [a, b]$ das Teilintervall des Definitionsbereiches von c , auf welchem der untere Rand von Ω_1 parametrisiert wird, d.h.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y_{\text{unten}}(x(t)) \end{pmatrix} \quad \forall t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Da Ω im mathematisch positiven Sinne umrandet wird, läuft das untere Kurvenstück von links nach rechts, also ist

$$x_1 = x(\tau_1) \text{ und } x_2 = x(\tau_2).$$

Mittels Substitution $x = x(t)$ berechnen wir nun

$$\begin{aligned} - \int_{x_1}^{x_2} y_{\text{unten}}(x) dx &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} y_{\text{unten}}(x(t)) \dot{x}(t) dt \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} y(t) \dot{x}(t) dt. \end{aligned}$$

Außerdem sei $[\tau_3, \tau_4]$ das Intervall, welches den oberen Rand von Ω_1 parametrisiert, also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y_{\text{oben}}(x(t)) \end{pmatrix} \quad \forall t \in [\tau_3, \tau_4].$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, dass, da Ω im mathematisch positiven Sinne umlaufen wird, das obere Kurvenstück von rechts nach links läuft, d.h.

$$x_2 = x(\tau_3) \text{ und } x_1 = x(\tau_4).$$

Dann liefert die Substitution

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y_{\text{oben}}(x) dx &= \int_{\tau_4}^{\tau_3} y_{\text{oben}}(x(t)) \dot{x}(t) dt \\ &= - \int_{\tau_4}^{\tau_3} y(t) \dot{x}(t) dt. \end{aligned}$$

Summiert man nun über alle Kurvenstücke, so summiert man die Integrale über alle Teilintervalle von $[a, b]$. Nach Lemma 2.4.24 ergibt die Summation der Hausdorff-Maße aller Ω_1 das Hausdorff-Maß von ganz Ω , und die Summation der Integrale auf der anderen Seite liefert das Integral über das gesamte Intervall $[a, b]$, also

$$\mathcal{H}^2(\Omega) = - \int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt \quad \square$$

Beispiel 2.4.27 Wir bestimmen auf diese Weise den Flächeninhalt der Ellipse. O.B.d.A. sei

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A[G] &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos(t) \cdot b \cos(t) - a \sin(t) \cdot (-b \sin(t))) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi \\
&= ab\pi.
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.4.28 Dieses Beispiel verifiziert unser Ergebnis für die Kreisfläche, denn ein Kreis ist nichts anderes als eine Ellipse mit identischen Halbachsenlängen $a = b =: r$.

Satz 2.4.29 Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $A \subset X$. Dann gilt:

1. Ist $\mathcal{H}^m(A) < \infty$, dann ist $\mathcal{H}^{m'}(A) = 0$ für alle $m' > m$;
2. Ist $\mathcal{H}^m(A) > 0$, dann ist $\mathcal{H}^{m'}(A) = \infty$ für alle $m' < m$.

Beweis.

1. Sei $\mathcal{H}^m(A) < \infty$. Dann ist auch für jedes δ

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) \leq \mathcal{H}^m(A) < \infty.$$

Damit muss es eine Überdeckung $\{B_j\}_j$ mit $\text{diam}(B_j) \leq \delta$ geben, für die

$$\alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m < \infty$$

gilt, und es ergibt sich für $m' > m$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{m'} \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^{m'} \\
&= \frac{\alpha_{m'}}{\alpha_m} \cdot \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \underbrace{\left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^{m'-m}}_{\leq \frac{\delta}{2}} \\
&\leq \frac{\alpha_{m'}}{\alpha_m} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{m'-m} \cdot \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \\
&\stackrel{\text{inf}}{\implies} \mathcal{H}_\delta^{m'}(A) \leq \frac{\alpha_{m'}}{\alpha_m} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{m'-m} \mathcal{H}_\delta^m(A) \\
&\stackrel{\substack{\delta \searrow 0 \\ m'-m > 0}}{\implies} \mathcal{H}^{m'}(A) \leq \frac{\alpha_{m'}}{\alpha_m} \cdot 0 \cdot \underbrace{\mathcal{H}^m(A)}_{< \infty} = 0 \\
&\implies \mathcal{H}^{m'}(A) = 0.
\end{aligned}$$

2. Sei $\mathcal{H}^m(A) > 0$, sei $m' < m$. Wäre nun $\mathcal{H}^{m'}(A) < \infty$, so wäre nach 1. $\mathcal{H}^m(A) = 0$ ζ □

Definition 2.4.30 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt die Zahl

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{m \mid \mathcal{H}^m(A) = 0\} = \sup\{m \mid \mathcal{H}^m(A) = \infty\}$$

die *Hausdorff-Dimension von A in X*.

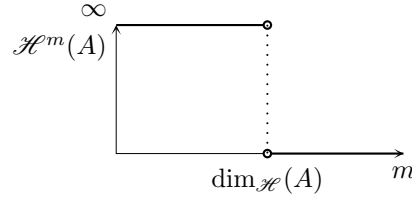


Abb. 116

Bemerkung 2.4.31 Ist $\mathcal{H}^m(A) \in (0, \infty)$, dann ist $m = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Beispiel 2.4.32 $\mathcal{H}^0(\{\text{Punkt}\}) = 1$, also ist $\dim_{\mathcal{H}}(\{\text{Punkt}\}) = 0$.

Beispiel 2.4.33 Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathcal{H}^1([a, b]) \in (0, \infty) \text{ und somit } \dim_{\mathcal{H}}([a, b]) = 1.$$

Bemerkung 2.4.34 Für $m = \dim_{\mathcal{H}}(A)$ kann das m -dimensionale Hausdorff-Maß auch die Werte 0 oder ∞ annehmen.

Beispiel 2.4.35 Sei $(X, d) = (\mathbb{R}, d_E)$. Sei $A = [0, \infty)$. Dann ist nach Bemerkung 2.4.3 $\mathcal{H}^1(A) \geq \mathcal{H}^1([0, L]) = L$ für alle $L > 0$ und somit

$$\mathcal{H}^1(A) = \infty.$$

Nun ist 1 jedoch die Hausdorff-Dimension der betrachteten Menge: Wir zeigen, dass für alle $m > 1$ das Hausdorff-Maß von A verschwindet. Betrachte dazu die folgende Überdeckung von A :

$$B_1 := [0, 1], B_2 := [1, 1 + \frac{1}{2}], B_3 := [1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}], \dots, B_n := \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right], \dots$$

Dies ist tatsächlich eine Überdeckung, da die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergiert. Um nun noch zu gewährleisten, dass wir für alle δ eine geeignete Überdeckung finden, setzen wir

$$B_j^\delta := \delta \cdot B_j,$$

und da für alle B_j der Durchmesser $\frac{1}{j}$ beträgt, ist $\text{diam}(B_j^\delta) = \frac{\delta}{j} \leq \delta$. Hieraus errechnet man nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^m(A) &\leq \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{2} \right)^m \\ &= \alpha_m \left(\frac{\delta}{2} \right)^m \sum_j \left(\frac{1}{j} \right)^m \\ &= c_m \delta^m, \end{aligned}$$

worin $c_m < \infty$ alle Konstanten inklusive der für $m > 1$ konvergenten Reihe zusammenfasst. Lässt man nun aber $\delta \searrow 0$ gehen, so ergibt sich

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) = 0,$$

und das ist, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 2.4.36 Ist $A' \subset A$, so wissen wir bereits, dass für alle m gilt:

$$\mathcal{H}^m(A') \leq \mathcal{H}^m(A),$$

woraus sich direkt ergibt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A') \leq \dim_{\mathcal{H}}(A),$$

denn für all diejenigen m , für die $\mathcal{H}^m(A) = 0$ ist, muss $\mathcal{H}^m(A')$ ebenfalls verschwinden; es könnte lediglich sein, dass $\mathcal{H}^m(A')$ für noch kleinere m ebenfalls den Wert 0 annimmt.

Bei unserer bisherigen Betrachtung des m -dimensionalen Hausdorff-Maßes war m immer ganzzahlig. Wir haben auch immer eine ganze Zahl als Hausdorff-Dimension erhalten, und so liegt die Vermutung nahe, dass alle Mengen nur ganzzahlige Hausdorff-Dimension besitzen können. Dies ist jedoch keineswegs der Fall:

Es gibt eine Klasse von Mengen – die sogenannten *Fraktale*, deren Hausdorff-Dimension sogar irrational sein kann. Da uns hier wieder maßtheoretische Grundlagen fehlen, begnügen wir uns mit einer hinreichenden Bedingung statt einer Definition:

Jede Menge A mit

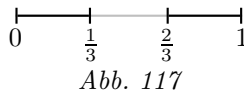
$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

ist ein Fraktal.

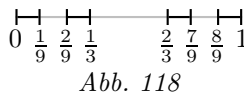
Man kann sogar zeigen, dass es zu jeder Zahl $m \geq 0$ eine Menge A mit $\dim_{\mathcal{H}}(A) = m$ gibt.

Beispiel 2.4.37 Wir betrachten die *Cantor-Menge*. Diese erhält man auf folgende Weise:

Wir beginnen mit dem Intervall $[0, 1]$ und entfernen das (offene) mittlere Drittel.



Nun entfernen wir von den noch verbliebenen Teilstücken wieder das mittlere Drittel.



Und wieder muss von den verbliebenen Teilstrecken das mittlere Drittel weg.



Dieser Prozess wird nun unendlich oft fortgesetzt. Das Ergebnis, die Cantor-Menge, lässt sich natürlich nicht mehr graphisch darstellen, und es ist auch nicht leicht, anzugeben, welche Elemente sie noch enthält; aber ein analytischer Ausdruck für die Menge sei hier angeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= [0, 1] - \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \right) \cup \dots \right) \\ &= [0, 1] - \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{3^n-1} \left(\frac{3j+1}{3^{n+1}}, \frac{3j+2}{3^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Wenn wir uns nun auf die Suche nach Überdeckungen von \mathcal{C} begeben, so sehen wir in Abbildung 117 eine Überdeckung, die aus 2 Intervallen der Länge $\frac{1}{3}$ besteht. In Abbildung 118 erkennen wir eine Überdeckung von \mathcal{C} aus 4 Intervallen der Länge $\frac{1}{9}$, und in Abbildung 119 zeigt sich eine Überdeckung aus 8 Intervallen der Länge $\frac{1}{27}$. Was wir also sehen, ist, dass zu jeder natürlichen Zahl k eine Überdeckung von \mathcal{C} aus 2^k Intervallen der Länge $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ existiert.

Sei nun $\delta > 0$. Wähle k so groß, dass $\left(\frac{1}{3}\right)^k < \delta$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^m(\mathcal{C}) &\leq \alpha_m \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{2} \right)^m \cdot 2^k \\ &= \frac{\alpha_m}{2^m} \cdot \left(\frac{2}{3^m} \right)^k. \end{aligned}$$

Sei nun m so gewählt, dass $\frac{2}{3^m} = 1$ ist, also $m = \log_3(2)$. Dann gilt

$$\mathcal{H}_\delta^m(\mathcal{C}) \leq \frac{\alpha_m}{2^m} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^m(\mathcal{C}) \leq \frac{\alpha_m}{2^m} < \infty$$

und somit $m \geq \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$. Nun kann man noch zeigen, dass für dieses m auch $\mathcal{H}^m(\mathcal{C}) > 0$ gilt, und damit ist

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \log_3(2) = 0,63092975 \dots$$

Beispiel 2.4.38 Nun betrachten wir den *Sierpinski-Teppich*. Dessen Konstruktionsweise ist ähnlich der für die Cantor-Menge verwendeten:

Wir beginnen mit einem Gitter von 3×3 Quadraten, aus dem wir das mittlere entfernen.

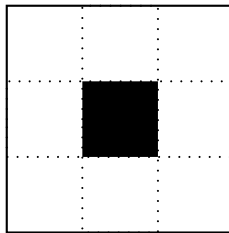


Abb. 120

Nun fassen wir die acht verbliebenen Quadrate wieder als 3×3 -Gitter auf und entfernen das mittlere Quadrat.

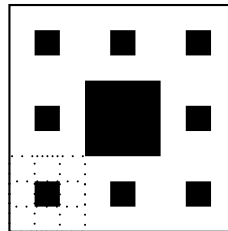


Abb. 121

Und wir wiederholen dies mit jedem der nun 64 verbliebenen Quadrate.

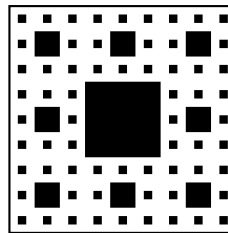


Abb. 122

Auch dies wird bis ins Unendliche fortgesetzt.

Analog zur Herleitung der Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge erhält man für den Sierpiski-Teppich \mathcal{S} :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{S}) = \log_3(8) = 1,892789\dots$$

Beispiel 2.4.39 Schließlich schauen wir uns noch die *Koch'sche Schneeflocke* \mathcal{F} an. Diese erhält man wie folgt:

Man beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck. Das mittlere Drittel jeder Dreiecksseite dient jetzt als Basis eines neuen gleichseitigen Dreiecks, welches aus dem ersten hinausragt. Wir entfernen das mittlere Drittel und ersetzen es durch die beiden anderen Seiten des hinzugefügten kleinen Dreiecks.

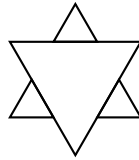


Abb. 123

Dadurch erhalten wir ein Zwölfeck. An jeder Seite dieses Zwölfecks wiederholen wir die Prozedur.

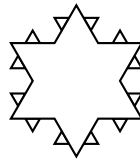


Abb. 124

Die Koch'sche Schneeflocke berandet ein Gebiet. Im nächsten Schritt – der mittlerweile nicht mehr besonders ausführlich beschrieben werden muss – stellen wir das Gebiet ausgefüllt dar.



Abb. 125

In dieser Darstellung erkennt man nun auch, warum diese Menge „Schneeflocke“ heißt. Den Prozess führt man auch hier bis ins Unendliche weiter, und man ermittelt

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}) = \log_3(4) = 1,2618595 \dots$$

Satz 2.4.40 (Banach-Tarski-Paradoxon) *Es gibt Mengen $X_1, \dots, X_6 \subset \mathbb{R}^3$ und $Y_1, \dots, Y_6 \subset \mathbb{R}^3$, so dass gilt:*

1. X_j ist kongruent zu Y_j für alle j ;
2. Die X_j sind disjunkt und $X_1 \cup \dots \cup X_6 = B_1(0)$;
3. Die Y_j sind disjunkt und $Y_1 \cup \dots \cup Y_6 = B_2(0)$.

Diesen Satz kann man (recht aufwändig) beweisen. Man kann jedoch die Mengen X_j und Y_j nicht angeben – auch dies lässt sich beweisen. Dennoch stellt sich uns die Frage: Wie kann es sein, dass sich die Kugel vom Radius 1 zerlegen lässt und,

nachdem die Teile verschoben, gedreht und gespiegelt worden sind, zur Kugel vom Radius 2 zusammengesetzt werden kann?

Das erscheint uns so unmöglich, dass wir einen Gegenbeweis suchen. Ein erster Versuch über das Lebesgue-Maß:

$$\mathcal{L}^3(B_1(0)) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{L}^3(X_j) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{L}^3(Y_j) = \mathcal{L}^3(B_2(0)) = 8\mathcal{L}^3(B_1(0))\frac{1}{7}$$

Aber die Mengen X_j, Y_j sind leider nicht Lebesgue-meßbar, und deshalb existieren die Zwischenschritte nicht.

Dann eben mit dem Hausdorff-Maß, das existiert schließlich für jede Menge:

$$\mathcal{H}^3(B_1(0)) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{H}^3(X_j) = \sum_{j=1}^6 \mathcal{H}^3(Y_j) = \mathcal{H}^3(B_2(0)) = 8\mathcal{H}^3(B_1(0))\frac{1}{7}$$

Doch hier funktioniert die Zerlegung in die Summen nicht: Die Gleichheit haben wir nur für disjunkte Vereinigungen *kompakter Mengen* gezeigt. Tatsächlich gilt sie für die disjunkte Vereinigung Lebesgue-meßbarer Mengen, aber die haben wir hier eben nicht.

Also müssen wir den Satz wohl hinnehmen und zu den Dingen zählen, die mit der Anschauung aus dem Alltag nicht zu begreifen sind.

Kapitel 3

Sphärische Geometrie

3.1 Sphärische Trigonometrie

Auch die sphärische Geometrie ist u.a. wegen ihrer Bedeutung für die Seefahrt sehr früh untersucht worden. Daher untersuchen wir nun die Geometrie der Kugeloberfläche

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

mit der Metrik

$$d_S(a, b) = \arccos(\langle a, b \rangle) \in [0, \pi]$$

(vgl. Beispiel 2.1.3).

Vorbereitung. Bereits in Beispiel 2.1.3 haben wir festgestellt, dass das Kreuzprodukt ein überaus nützliches Hilfsmittel bei der Betrachtung der Sphäre darstellt. Deshalb versuchen wir, eine geometrische Anschauung für dieses Produkt zu gewinnen.

Wir berechnen zunächst:

$$\langle x \times y, x \rangle = \det(x, y, x) = 0,$$

und ebenso

$$\langle x \times y, y \rangle = \det(x, y, y) = 0,$$

d.h. $x \times y$ steht sowohl auf x als auch auf y senkrecht.

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \|x \times y\|^2 &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \\
 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\
 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \cdot \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}\right) \\
 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\gamma)) \\
 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \cdot \sin^2(\gamma),
 \end{aligned}$$

also

$$\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin(\gamma),$$

wobei γ die Winkelgröße zwischen den Vektoren x und y ist. Die rechte Seite ist der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

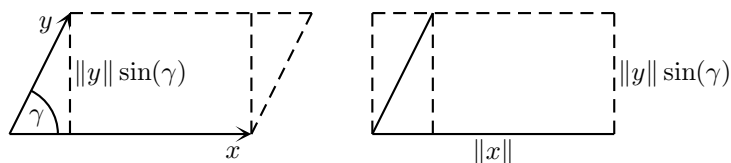


Abb. 126

Fazit: Der Vektor $x \times y$ steht senkrecht auf der von x und y aufgespannten Ebene und hat als Länge den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

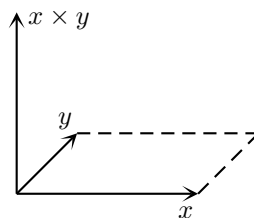


Abb. 127

Bemerkung 3.1.1 In Beispiel 2.1.3 wurde gezeigt, dass für d_S die Dreiecksungleichung gilt. Der Beweis zeigt auch, wann (unter der Voraussetzung $d_S(x, y) + d_S(y, z) \leq \pi$) die Gleichheit

$$d_S(x, z) = d_S(x, y) + d_S(y, z)$$

gilt: Das Ungleichheitszeichen entstand bei der Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|x \times y\| \cdot \|y \times z\| \leq \langle x \times y, y \times z \rangle.$$

Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \times y$ und $y \times z$ linear abhängig sind. $x \times y$ steht senkrecht auf der Ebene, in der x und y liegen; $y \times z$ hingegen auf der Ebene, in der y und z liegen. Die beiden Kreuzprodukte sind also

genau dann linear abhängig, wenn x , y und z in einer Ebene liegen, nämlich in der senkrecht auf $x \times y$ und $y \times z$.

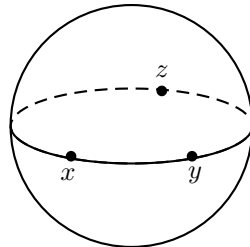


Abb. 128

Ist dagegen $d_S(x, y) + d_S(y, z) > \pi$, so kann $d_S(x, z) = d_S(x, y) + d_S(y, z)$ natürlich nicht gelten (auch nicht, wenn x , y und z in einer Ebene liegen), da der sphärische Abstand zweier Punkte niemals größer als π ist. Ein Beispiel hierfür wären drei Punkte auf dem Äquator, die diesen in drei gleich lange Stücke unterteilen.

Definition 3.1.2 Eine Abbildung $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ heißt *sphärische Isometrie*, falls für alle $x, y \in S^2$ gilt:

$$d_S(\varphi(x), \varphi(y)) = d_S(x, y).$$

(Vgl. Definition 2.1.7)

Bemerkung 3.1.3 In Satz 2.1.13 haben wir gezeigt, dass die Isometrien auf S^2 genau diejenigen Abbildungen sind, die durch die Einschränkung einer linearen Abbildung $A \in O(2)$ auf S^2 entstehen.

Frage: Was entspricht in der sphärischen Geometrie den Geraden der euklidischen Geometrie?

Definition 3.1.4 Ein *Großkreis* ist eine Teilmenge von S^2 der Form $S^2 \cap E$, wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum ist, d.h. eine Ebene, die 0 enthält.

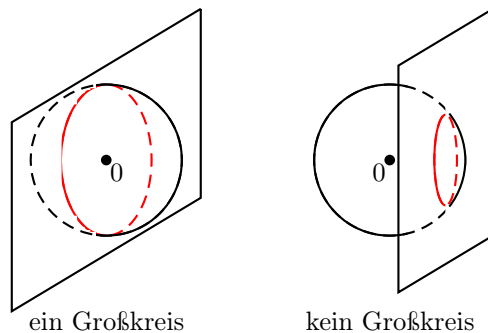


Abb. 129

Definition 3.1.5 Sei $K = S^2 \cap E$ ein Großkreis, sei $p \in K$. Dann heißen die Vektoren $X \in E$ mit $\langle X, p \rangle = 0$ *Tangentenvektoren* an K im Punkt p .

Lemma 3.1.6 Sei $K \subset S^2$ ein Großkreis, sei $p \in K$ und sei X ein Tangentenvektor an K in p mit $\|X\| = 1$. Dann gilt:

$$K = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $c(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X$.

Beweis. Da p und X eine Orthonormalbasis von E bilden, durchläuft $c(t)$ den Einheitskreis in E , denn

$$\begin{aligned} \|c(t)\|^2 &= \langle c(t), c(t) \rangle \\ &= \langle \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X, \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X \rangle \\ &= \cos^2(t) \langle p, p \rangle + 2 \cos(t) \sin(t) \langle p, X \rangle + \sin^2(t) \langle X, X \rangle \\ &= \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.7 Ein *Großkreisbogen* ist eine Teilmenge von S^2 der Form $\{c(t) \mid t \in [0, L]\}$, wobei $c(t) = \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X$ mit $p, X \in S^2$, $\langle p, X \rangle = 0$ und $0 < L < 2\pi$.

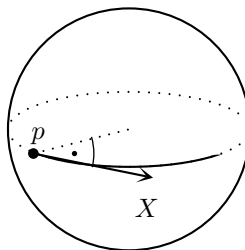


Abb. 130

Dabei heißt L die *Länge des Großkreisbogens*.

Bemerkung 3.1.8 Wegen $\cos(d_S(p, c(t))) = \langle p, \cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X \rangle = \cos(t)$ gilt für $t \in [0, \pi]$:

$$d_S(p, c(t)) = t.$$

Hat ein Großkreisbogen Länge $\leq \pi$, so ist die Länge gleich dem sphärischen Abstand seiner Endpunkte.

Satz 3.1.9 Seien $A, B \in S^2$, $A \neq B$. Falls $A \neq -B$, so gibt es genau zwei Großkreisbögen mit Endpunkten A und B . Einer (genannt der kurze) hat Länge $d_S(A, B)$, der andere (genannt der lange) hat Länge $2\pi - d_S(A, B)$.

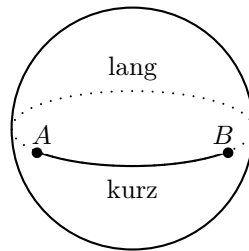


Abb. 131

Falls $A = -B$ (A und B heißen dann antipodal), so gibt es unendlich viele Großkreisbögen mit Endpunkten A und B . Alle haben Länge π .

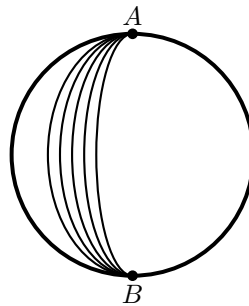


Abb. 132

Beweis. a) Sei $A \neq -B$. Dann sind A und B linear unabhängig und es gibt genau eine Ebene E , die 0 , A und B enthält. Also gibt es genau einen Großkreis, der A und B enthält. Dieser Großkreis wird von A und B in zwei Großkreisbögen zerlegt, einen mit Länge $< \pi$ und einen mit Länge $> \pi$. Die Länge des kurzen Großkreisbogens ist nach der vorangegangenen Bemerkung genau der sphärische Abstand der Endpunkte. Die Länge des langen muss sich mit der Länge des kurzen Großkreisbogens zu 2π aufaddieren.

b) Sei $A = -B$. Dann sind A und B linear abhängig und es gibt unendlich viele Ebenen, die 0 , A und B enthalten. Also gibt es unendlich viele Großkreise, die A und B enthalten. A und B zerlegen jeden dieser Großkreise in zwei Halbkreise. \square

Bemerkung 3.1.10 Beschreibt $c(t)$ den kurzen Großkreisbogen von A nach B , so lässt sich der Tangentenvektor X nach Bemerkung 3.1.8 aus

$$c(L) = B, L = d_S(A, B)$$

bestimmen.

Definition 3.1.11 Seien $K_1 = \{\cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot X \mid 0 \leq t \leq L_1\}$ und $K_2 = \{\cos(t) \cdot p + \sin(t) \cdot Y \mid 0 \leq t \leq L_2\}$ zwei Großkreisbögen, die vom Punkt p ausgehen. Dann ist die

Winkelgröße von K_1 und K_2 in p definiert als die Winkelgröße der Tangentenvektoren X und Y , d.h. die eindeutige Zahl $\sphericalangle(K_1, p, K_2) \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\sphericalangle(K_1, p, K_2)) = \langle X, Y \rangle.$$

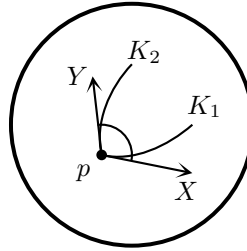


Abb. 133

Notation. Zu $A, B \in S^2, A \neq B, A \neq -B$, schreiben wir für den kurzen Großkreisbogen mit Endpunkten A und B auch \widehat{AB} .

Definition 3.1.12 Ein *sphärisches Dreieck* ist ein Tripel (A, B, C) von Punkten $A, B, C \in S^2$, die nicht auf einem Großkreis liegen. Insbesondere sind diese Punkte paarweise verschieden und paarweise nicht antipodal. A, B und C heißen *Ecken* des Dreiecks. Die kurzen Großkreisbögen, die die Ecken verbinden, heißen *Seiten* des Dreiecks. Die *Seitenlängen* sind gegeben durch $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(A, C)$ und $c = d_S(A, B)$. Die *Winkelgrößen* des Dreiecks sind gegeben durch $\alpha = \sphericalangle(\widehat{AB}, A, \widehat{AC})$, $\beta = \sphericalangle(\widehat{BA}, B, \widehat{BC})$ und $\gamma = \sphericalangle(\widehat{CA}, C, \widehat{CB})$.

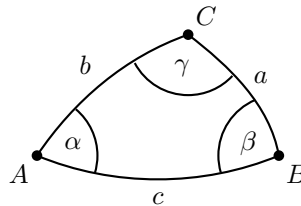


Abb. 134

Beispiel 3.1.13 Durch $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein sphärisches Dreieck mit den Seitenlängen $\frac{\pi}{2}$ und den Winkelgrößen $\frac{\pi}{2}$ gegeben.

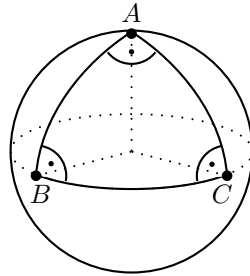


Abb. 135

Lemma 3.1.14 Sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck mit Winkelgrößen α, β, γ . Dann gilt:

$$\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C),$$

$$\beta = \sphericalangle(B \times A, B \times C),$$

$$\gamma = \sphericalangle(C \times A, C \times B).$$

Beweis. Es genügt, die erste Gleichung zu zeigen. Seien X bzw. Y die Tangentenvektoren der Länge 1 an \widehat{AB} bzw. \widehat{AC} im Punkt A . Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \cos(\sphericalangle(X, Y)) = \langle X, Y \rangle$$

und wir können schreiben

$$B = \cos(c)A + \sin(c)X,$$

$$C = \cos(b)A + \sin(b)Y.$$

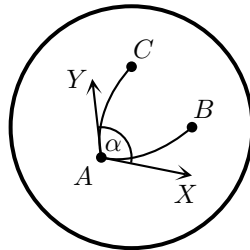


Abb. 136

Es folgt

$$A \times B = A \times (\cos(c)A + \sin(c)X) = \cos(c)A \times A + \sin(c)A \times X = \sin(c)A \times X$$

und analog

$$A \times B = \sin(b)A \times Y.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \cos(\sphericalangle(A \times B, A \times C)) &= \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|} \\
 &= \frac{\langle \underbrace{\sin(c)A \times X}_{=1}, \underbrace{\sin(b)A \times Y}_{=1} \rangle}{\sin(c) \cdot \|A \times X\| \cdot \sin(b) \cdot \|A \times Y\|} \\
 &= \langle A \times X, A \times Y \rangle \\
 &\stackrel{\text{Satz 2.1.3 (iv)}}{=} \det \begin{pmatrix} \overbrace{\langle A, A \rangle}^{=1} & \overbrace{\langle A, Y \rangle}^{=0} \\ \overbrace{\langle X, A \rangle}^{=0} & \overbrace{\langle X, Y \rangle} \end{pmatrix} \\
 &= \langle X, Y \rangle \\
 &= \cos(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Satz 3.1.15 (Winkelsumme im sphärischen Dreieck) Für die Winkelgrößen eines sphärischen Dreiecks gilt

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Beweis. Seien A, B, C die Ecken des sphärischen Dreiecks. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \det(A \times B, C \times B, C \times A) &\stackrel{\text{Satz 2.1.3. (ii)}}{=} \langle (A \times B) \times (C \times B), C \times A \rangle \\
 &\stackrel{\text{Satz 2.1.3. (iii)}}{=} \left\langle \langle A, C \times B \rangle B - \underbrace{\langle B, C \times B \rangle}_{=0} A, C \times A \right\rangle \\
 &= \langle A, C \times B \rangle \langle B, C \times A \rangle \\
 &\stackrel{\text{Satz 2.1.3. (ii)}}{=} \det(A, C, B) \cdot \det(B, C, A) \\
 &= -\det(A, B, C)^2 \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

da A, B, C nicht auf einem 2-dimensionalen Untervektorraum liegen und daher linear unabhängig sind. Somit sind auch $A \times B, C \times B$ und $C \times A$ linear unabhängig. Aus $\alpha = \sphericalangle(A \times B, A \times C)$ folgt

$$\begin{aligned}
\pi - \alpha &= \sphericalangle(A \times B, -A \times C) \\
&= \sphericalangle\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right) \\
&= d_S\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right) \\
\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{<} & d_S\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{C \times B}{\|C \times B\|}\right) + d_S\left(\frac{C \times B}{\|C \times B\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}\right) \\
&= \sphericalangle(A \times B, C \times B) + \sphericalangle(C \times B, C \times A) \\
&= \sphericalangle(B \times A, B \times C) + \sphericalangle(C \times A, C \times B) \\
&= \beta + \gamma.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.16 Nach oben ist die Winkelsumme trivialerweise durch 3π beschränkt, da jeder Winkel $< \pi$ sein muss. Diese Schranke lässt sich nicht weiter verbessern: Denn wählt man A und B auf dem Äquator und C ein wenig darüber, so erhält man ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel nur beliebig wenig kleiner als π sind, so dass die Winkelsumme beliebig nahe an 3π kommen kann.

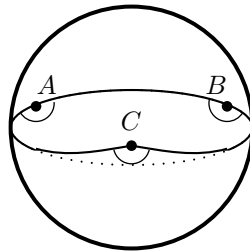


Abb. 137

Satz 3.1.17 (Sinussatz der sphärischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines sphärischen Dreiecks gilt

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Beweis. Seien A, B, C die Ecken des Dreiecks. Satz 2.1.3. (iii) liefert

$$\begin{aligned}
(A \times C) \times (A \times B) &= \underbrace{\langle A, A \times B \rangle}_{=0} C - \langle C, A \times B \rangle A \\
&= -\langle C, A \times B \rangle A.
\end{aligned}$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} \|(A \times C) \times (A \times B)\| &= \|A \times C\| \cdot \|A \times B\| \cdot \sin(\sphericalangle(A \times C, A \times B)) \\ &= \sin(\sphericalangle(A, C)) \cdot \sin(\sphericalangle(A, B)) \cdot \sin(\alpha) \\ &= \sin(b) \sin(c) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \|- \langle C, A \times B \rangle A\| &= |\langle C, A \times B \rangle| = |\det(C, A, B)| \\ &= |\det(A, B, C)|. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sin(b) \sin(c) \sin(\alpha) = |\det(A, B, C)|.$$

Ersetzt man A durch B , B durch C und C durch A , so ergibt sich

$$\sin(c) \sin(a) \sin(\beta) = |\det(B, C, A)| = |\det(A, B, C)|.$$

Nochmaliges zyklisches Vertauschen der Ecken liefert

$$\sin(a) \sin(b) \sin(\gamma) = |\det(A, B, C)|.$$

Es gilt also

$$\sin(b) \sin(c) \sin(\alpha) = \sin(c) \sin(a) \sin(\beta) = \sin(a) \sin(b) \sin(\gamma).$$

Division durch $\sin(a) \sin(b) \sin(c)$ liefert die Behauptung. \square

Satz 3.1.18 (Seitenkosinussatz der sphärischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines sphärischen Dreiecks gilt:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha), \\ \cos(b) &= \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(c) \cos(\beta), \\ \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Beweis. Es genügt, die dritte Gleichung zu zeigen. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \langle C \times A, C \times B \rangle &= \|C \times A\| \cdot \|C \times B\| \cdot \cos(\sphericalangle(C \times A, C \times B)) \\ &= \sin(\sphericalangle(C, A)) \cdot \sin(\sphericalangle(C, B)) \cdot \cos(\gamma) \\ &= \sin(b) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \langle C \times A, C \times B \rangle &\stackrel{\text{Satz 2.1.3. (iv)}}{=} \det \begin{pmatrix} \langle C, C \rangle & \langle C, B \rangle \\ \langle A, C \rangle & \langle A, B \rangle \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \langle A, B \rangle - \langle A, C \rangle \langle C, B \rangle \\ &= \cos(\sphericalangle(A, B)) - \cos(\sphericalangle(A, C)) \cos(\sphericalangle(C, B)) \\ &= \cos(c) - \cos(b) \cos(a) \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 3.1.19 Dieser Satz erlaubt es, aus den Seitenlängen a, b und c die Winkelgrößen α, β und γ zu berechnen.

Bemerkung 3.1.20 Sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck. Im Beweis von Satz 3.1.15 haben wir gesehen, dass dann auch $B \times C, C \times A$ und $A \times B$ linear unabhängig sind. Somit bildet auch (A', B', C') ein sphärisches Dreieck, wobei $A' := \varepsilon \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$, $B' := \varepsilon \cdot \frac{C \times A}{\|C \times A\|}$ und $C' := \varepsilon \cdot \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ mit $\varepsilon = \text{sign}(\det(A, B, C)) = \pm 1$.

Definition 3.1.21 (A', B', C') heißt das *Polardreieck* zu (A, B, C) .

Frage. Wie hängen die Seitenlängen und die Winkelgrößen von (A, B, C) mit denen von (A', B', C') zusammen?

$$\begin{aligned} a' &= \sphericalangle(B', C') = \sphericalangle(C \times A, A \times B) \\ &= \sphericalangle(-A \times C, A \times B) \\ &= \pi - \sphericalangle(A \times C, A \times B) \stackrel{\text{Lemma 1.3.6.}}{=} \pi - \alpha \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} b' &= \pi - \beta, \\ c' &= \pi - \gamma. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.22 Sei (A, B, C) ein sphärisches Dreieck, sei (A', B', C') das Polardreieck zu (A, B, C) . Dann ist (A, B, C) das Polardreieck zu (A', B', C') .

Beweis. Sei (A'', B'', C'') das Polardreieck zu (A', B', C') . Wir zeigen $C'' = C$. Die anderen beiden Identitäten $A'' = A$ und $B'' = B$ folgen analog. $C'' = \varepsilon' \cdot \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|}$ steht auf A' und B' senkrecht. C steht ebenfalls auf A' und B' senkrecht, also gilt

$$C = \delta \cdot C''$$

mit $\delta = \pm 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|A' \times B'\| \cdot \varepsilon' &= \langle A' \times B', C'' \rangle = \langle A' \times B', \delta C \rangle \\ &= \frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle (B \times C) \times (C \times A), C \rangle \\ &= \frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle \langle B, C \times A \rangle C - \langle C, C \times A \rangle B, C \rangle \\ &= \frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \langle B, C \times A \rangle \|C\|^2 \\ &= \frac{\delta}{\|B \times C\| \cdot \|C \times A\|} \cdot \det(A, B, C). \end{aligned}$$

Also ist $\varepsilon' = \delta \cdot \text{sign}(\det(A, B, C)) = \delta \cdot \varepsilon$.

Im Beweis von Satz 3.1.15 haben wir gezeigt, dass

$$\det(B \times C, C \times A, A \times B) = \det(A, B, C)^2 > 0$$

und somit

$$\varepsilon' = \text{sign}(\det(\varepsilon B \times C, \varepsilon C \times A, \varepsilon A \times B)) = \varepsilon^3 = \varepsilon.$$

Es folgt $\delta = 1$ und daher $C = C''$. □

Korollar 3.1.23 $a = a'' = \pi - \alpha'$, also

$$\alpha' = \pi - a.$$

Analog erhalten wir

$$\beta' = \pi - b,$$

$$\gamma' = \pi - c.$$

Satz 3.1.24 (Winkelkosinussatz der sphärischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines sphärischen Dreiecks gilt:

$$\cos(\alpha) = \cos(a) \sin(\gamma) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \cos(\beta),$$

$$\cos(\beta) = \cos(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma),$$

$$\cos(\gamma) = \cos(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta).$$

Beweis. Der Seitenkosinussatz angewandt auf das Polardreieck liefert

$$\cos(c') = \cos(a') \cos(b') + \sin(a') \sin(b') \cos(\gamma'),$$

also

$$\begin{aligned} -\cos(\gamma) &= \cos(\pi - \gamma) \\ &= \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \sin(\pi - \beta) \cos(\pi - c) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(c). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.25 Dieser Satz erlaubt es, aus den Winkelgrößen α, β und γ die Seitenlängen a, b und c zu berechnen. Man beachte, dass dies für euklidische Dreiecke nicht möglich ist.

Satz 3.1.26 (Höhenformel der sphärischen Geometrie) Analog zum euklidischen Fall definiert man die Höhen eines sphärischen Dreiecks als Großkreise, die durch eine Ecke verlaufen und die gegenüberliegende Seite senkrecht schneiden.

Bezeichnen wir nun mit h_C den sphärischen Abstand von C und dem Schnittpunkt der Höhe durch C mit \overline{AB} und vergeben analog die Bezeichnungen h_A und h_B , so gilt:

$$\sin(h_C) = \sin(b) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\beta),$$

$$\sin(h_B) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) = \sin(c) \cdot \sin(\alpha),$$

$$\sin(h_A) = \sin(c) \cdot \sin(\beta) = \sin(b) \cdot \sin(\gamma).$$

Der Beweis verläuft analog zu dem der euklidischen Höhenformel, Satz 1.3.13, und sei dem Leser als Übung zur persönlichen Erbauung überlassen.

Zur Axiomatik: Setzen wir $\mathcal{P} := S^2$ und $\mathcal{G} := \{\text{Großkreise}\}$ sowie $\mathcal{J} := \{(p, K) \in \mathcal{P} \times \mathcal{G} \mid p \in K\}$, dann sind die folgenden Inzidenzaxiome erfüllt: I_1, I_3, I_4 , nicht aber I_2 .

Die Anordnungsmenge \mathcal{A} , d.h. die „Zwischenrelation“, ist nicht befriedigend definierbar. Da sich je zwei Großkreise schneiden, gibt es keine Parallelen. Satz 1.1.17 gilt also keinesfalls, egal wie wir die Anordnungs- und die Kongruenzrelationen definieren. Daran sieht man, dass nicht alle Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome gelten können, denn diese haben ja Satz 1.1.17 impliziert.

Aber das Parallelenaxiom ist sehr wohl gültig, denn da es überhaupt keine Parallelen gibt, gibt es erst recht niemals mehr als eine!

3.2 $SO(3)$

Wir erinnern uns an die Menge der orthogonalen Matrizen

$$\begin{aligned} O(3) &= \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A^t A = \mathbb{1}_3\} \\ &= \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Iso}(S^2, d_S). \end{aligned}$$

Eine Untergruppe hiervon stellt die speziell orthogonale Gruppe $SO(3)$ dar:

$$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det(A) = 1\}.$$

Lemma 3.2.1 *Jede Matrix $A \in SO(3)$ besitzt den Eigenwert 1.*

Beweis.

- Wir zeigen zunächst, dass diese Matrizen überhaupt einen reellen Eigenwert besitzen. Dazu stellen wir fest, dass das charakteristische Polynom von A von der Form

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = -\lambda^3 + O(\lambda^2)$$

ist und damit für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$, für $\lambda \rightarrow -\infty$ wiederum gegen ∞ geht. Da Polynome stetig sind, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$P_A(\lambda_0) = 0,$$

d.h. ein reeller Eigenwert von A .

- Alle Eigenwerte von A besitzen den Betrag 1, denn sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , d.h. $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, so ist

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1,$$

also $|\lambda| = 1$.

- Nun können entweder alle Eigenwerte reell sein, also $\lambda_i = \pm 1$. Da die Determinante von A dem Produkt ihrer Eigenwerte entspricht, können wir leicht überprüfen, was geschähe, wenn alle Eigenwerte negativ wären, denn dann hätten wir

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1 \implies A \notin SO(3).$$

Diese Möglichkeit wäre also ausgeschlossen.

Nun gut, es kann ja auch nur ein Eigenwert reell sein und die anderen beiden aus $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. Dann aber ist $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, und wir erhalten

$$1 \stackrel{!}{=} \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2,$$

woraus sich weiter ergibt

$$\lambda_1 = \frac{1}{|\lambda_2|^2} > 0 \implies \lambda_1 = +1 \quad \square$$

Satz 3.2.2 Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit der darstellenden Matrix A bzgl. der Standardbasis. Dann ist $A \in \text{SO}(3)$ genau dann, wenn φ eine Drehung um eine Achse beschreibt.

Beweis.

„ \Leftarrow “ Ist A darstellende Matrix einer Drehung, so erhält A alle Längen und Winkel und somit auch das euklidische Skalarprodukt. Damit ist schon einmal $A \in \text{O}(3)$. Da Drehungen überdies die Orientierung erhalten, ist $\det(A) = 1$ und somit $A \in \text{SO}(3)$.

„ \Rightarrow “ Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1, also $Av = v$, $v \neq 0$. Dann ist $\mathbb{R} \cdot v$ eine invariante Achse, das wird also die Drehachse sein. Da A die Winkel erhält, werden die Vektoren, die senkrecht auf v stehen, auch auf solche abgebildet, also $Av^\perp \subset v^\perp$.

Somit beschreibt A eine Abbildung, die die Orientierung erhält (wegen $\det(A) = 1$) und einen zweidimensionalen Vektorraum in sich abbildet. Aus der linearen Algebra wissen wir bereits, dass $A|_{v^\perp}$ damit eine Drehung beschreiben muss, und deshalb stellt auch A eine Drehung um die $\mathbb{R} \cdot v$ -Achse dar.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$T_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } e_1\text{-Achse});$$

$$T_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } e_2\text{-Achse});$$

$$T_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } e_3\text{-Achse}).$$

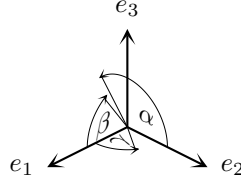


Abb. 138

Satz 3.2.3 Eine Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ ist genau dann aus $SO(3)$, wenn es Winkel $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$A = T_1(\alpha) \cdot T_2(\beta) \cdot T_3(\gamma).$$

Beweis. Die Richtung „ \Leftarrow “ ist klar; wir zeigen „ \Rightarrow “:

Für $q \in \mathbb{R}^2$ wissen wir aus der linearen Algebra, dass ein $\xi \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$T(\xi)q := \begin{pmatrix} \cos(\xi) & -\sin(\xi) \\ \sin(\xi) & \cos(\xi) \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad y > 0,$$

d.h. wir können q so drehen, dass es auf die positive y -Achse abgebildet wird.

Wir schreiben die Matrix A wie gewohnt als $A = (a_{ij})$. Dann wählen wir $q := \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, $\xi := -\alpha$ und erhalten

$$\begin{aligned} B := T_1(-\alpha) \cdot A &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & T(-\alpha) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline A^* & & q \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline T(-\alpha)A^* & & T(-\alpha)q \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $q := \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix}$ und $\xi := \gamma$ und bekommen

$$\begin{aligned} C := B \cdot T_3(-\gamma) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ q^t & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & y_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} T(\gamma)^t & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} (a_{11} \ a_{12})T(\gamma)^t & & a_{13} \\ \hline (b_{31} \ b_{32})T(\gamma)^t & & y_1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} (T(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} q)^t & & a_{13} \\ \hline c_{31} & c_{32} & y_1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{12} & y_2 \end{pmatrix}^t & & a_{13} \\ \hline c_{31} & c_{32} & y_1 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_{13} \\ 0 & y_2 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle interessiert uns die Gestalt von C etwas genauer: Da

$$C = \underbrace{T_1(-\alpha)}_{\in \text{SO}(3)} \cdot \underbrace{A}_{\in \text{SO}(3)} \cdot \underbrace{T_3(-\gamma)}_{\in \text{SO}(3)} \in \text{SO}(3),$$

bilden die Zeilen und Spalten von C ein Orthonormalsystem. Sehen wir uns insbesondere die zweite Zeile an, so stellen wir fest, dass $y_2 = \pm 1$ sein muss, und da $y_2 > 0$ gefordert wurde, ist

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & y_1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung ergibt sich weiter $c_{12} = c_{32} = 0$, und wir haben

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$1 = \det(C) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} c_{11} & a_{13} \\ c_{31} & y_1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_{11} & a_{13} \\ c_{31} & y_1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

Somit existiert ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c_{11} & a_{13} \\ c_{31} & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix},$$

also $C = T_2(\beta)$, und es ergibt sich

$$T_1(-\alpha)AT_3(-\gamma) = T_2(\beta) \iff A = T_1(-\alpha)^{-1}T_2(\beta)T_3(-\gamma)^{-1} = T_1(\alpha)T_2(\beta)T_3(\gamma). \quad \square$$

Bemerkung 3.2.4 Man kann zeigen, dass man sogar mit zwei Drehachsen auskommt, so dass

$$\forall A \in \text{SO}(3) \exists \varphi, \psi, \theta \in \mathbb{R} : A = T_3(\varphi) \cdot T_1(\psi) \cdot T_3(\theta).$$

Die Winkel φ, ψ, θ nennt man *Eulerwinkel* von A . Ist E_{12} die Ebene, die von e_1 und e_2 aufgespannt wird, so gilt

$$E_{12} \cap A(E_{12}) = \mathbb{R} \cdot (\cos(\psi)e_1 + \sin(\psi)e_2).$$

Ähnliche Gleichungen lassen sich für die durch e_1, e_3 bzw. durch e_2, e_3 festgelegten Ebenen aufstellen. Die jeweils entstehenden Schnittgeraden nennt man *Knotenlinien*.

Satz 3.2.5 Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Rotation um den Winkel x mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot v$. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Rotation um den Winkel y mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot w$. Dann erhält man die Drehachse und den Winkel der Rotation $\psi \circ \varphi$ nach folgendem Verfahren:

1. Wir wählen Q als einen der Schnittpunkte der Großkreise $g := S^2 \cap v^\perp$ und $h := S^2 \cap w^\perp$.
2. Drehen wir nun Q um $-\frac{x}{2}$ um die Achse $\mathbb{R}v$, so erhalten wir einen Punkt $P \in g$. Den gerichteten Großkreisbogen \overrightarrow{PQ} assoziieren wir mit der Drehung φ .
3. Analog finden wir ein $R \in h$, indem wir Q um den Winkel $+\frac{y}{2}$ um die Achse $\mathbb{R}w$ drehen. Den gerichteten Großkreisbogen \overrightarrow{QR} assoziieren wir mit ψ .

4. \overrightarrow{PR} beschreibt nun die Drehung $\psi \circ \varphi$ auf dieselbe Weise, d.h. der Winkel, um den gedreht wird, hat die Größe $2 \cdot d_S(P, R)$; die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene, die von P und R aufgespannt wird; und die Drehrichtung ist so festgelegt, dass sich P in Richtung R (und dann natürlich darüber hinaus) bewegt.

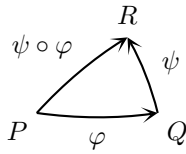


Abb. 139

Beweisidee. Wir „spiegeln“ das sphärische Dreieck (P, Q, R) an seinen Eckpunkten, d.h. wir folgen z.B. dem Großkreisbogen durch P und Q von P ausgehend in entgegengesetzter Richtung zu Q , bis wir den Abstand $d_S(P, Q)$ zurückgelegt haben. Dann ergibt sich folgende Situation:

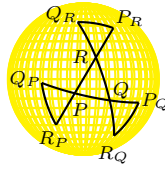


Abb. 140

Nun beobachten wir, dass die Drehung φ das Dreieck (P, Q_P, R_P) auf das Dreieck (P_Q, Q, R_Q) abbildet, denn wenn wir unser Augenmerk auf Q_P richten, so wird es durch φ auf dem Großkreis durch P und Q entlang bewegt, und zwar um $x = 2 \cdot d_S(P, Q) = d_S(Q_P, Q)$. Ebenso wird P auf P_Q abgebildet, und die Kongruenz der Dreiecke ergibt sich aus Kongruenzsatz SWS.

Analog sehen wir in ψ die Abbildung, die (P_Q, Q, R_Q) auf (P_R, Q_R, R) bewegt, und damit ist $\psi \circ \varphi$ tatsächlich diejenige Rotation, die als Bild von (P, Q_P, R_P) das Dreieck (P_R, Q_R, R) liefert. Diese dreht jedoch offensichtlich um die Drehachse senkrecht zur von P und R aufgespannten Ebene; und zwar um den Winkel $d_S(P, P_R) = 2 \cdot d_S(P, R)$. \square

3.3 Sphärischer Flächeninhalt

Bisher konnten wir auf der Sphäre nur Abstände von Punkten sowie Winkel zwischen Großkreisen berechnen. Ziel dieses Abschnitts soll es sein, auch Flächeninhalte von Gebieten auf der Sphäre zu berechnen, und zwar mittels einer Formel, welche beinahe ebenso handlich ist wie diejenige in der euklidischen Geometrie (vgl. Satz 2.4.26).

Vorab müssen wir jedoch noch ein Problem klären: In der Definition des Hausdorff-Maßes kommt der Durchmesser einer Menge vor, und dieser hängt von der gewählten

Metrik ab. Mit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ steht jedoch sowohl die sphärische als auch die euklidische Metrik für Flächen in S^2 zur Verfügung, und uns interessiert nun, welches der Hausdorff-Maße ein sinnvolles Konzept des sphärischen Flächeninhalts liefert.

Bevor wir uns hierüber aber noch lange Gedanken machen (wir kämen zu dem Schluss, dass wir, solange wir uns nur auf S^2 bewegen, auch die hierfür geschaffene Metrik d_S nehmen müssten), zeigen wir, dass die Hausdorff-Maße bezüglich d_E und d_S für Teilmengen von S^2 identisch sind.

Vorab vereinbaren wir noch, dass, wann immer die Metrik unklar ist, wir diese wie folgt angeben:

$$\mathcal{H}^m(A, d)$$

ist das m -dimensionale Hausdorff-Maß von $A \subset X$ im metrischen Raum (X, d) ; die „Zwischenergebnisse“ aus den δ -feinen Überdeckungen notieren wir analog als

$$\mathcal{H}_\delta^m(A, d)$$

und den Durchmesser der Menge A bezüglich d als

$$\text{diam}_d(A).$$

Lemma 3.3.1 *Seien d_1, d_2 Metriken auf X . Es gebe Konstanten $C, \delta_0 > 0$, so dass für alle $p, q \in X$ mit $d_2(p, q) < \delta_0$ gilt:*

$$d_1(p, q) \leq C \cdot d_2(p, q).$$

Dann ist für alle $A \subset X$ und $m \geq 0$

$$\mathcal{H}^m(A, d_1) \leq C^m \mathcal{H}^m(A, d_2).$$

Beweis. Sei $\delta \in (0, \delta_0]$. Sei $\{B_j\}_j$ eine höchstens abzählbare Überdeckung von A mit $\text{diam}_{d_2}(B_j) \leq \delta$. Dann gilt für alle $p, q \in B_j$

$$d_1(p, q) \leq C \cdot d_2(p, q) \leq C\delta,$$

und somit ist $\text{diam}_{d_1}(B_j) \leq C\delta$.

Wir bestimmen nun den Term

$$\alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}_{d_1}(B_j)}{2} \right)^m \leq \alpha_m \sum_j \left(\frac{C \cdot \text{diam}_{d_2}(B_j)}{2} \right)^m = C^m \alpha_m \sum_j \left(\frac{\text{diam}_{d_2}(B_j)}{2} \right)^m.$$

Bei der Infimumbildung müssen wir jetzt etwas achtgeben: Wir wissen ja nicht, ob es nicht noch weitere Überdeckungen von A gibt, die zwar bezüglich d_1 $C\delta$ -fein sind, jedoch bezüglich d_2 einen größeren Durchmesser als δ besitzen. Wenn wir allerdings die Menge, über der wir das Infimum bilden, vergrößern, kann das Infimum selbst nur kleiner werden, also ist

$$\mathcal{H}_{C\delta}^m(A, d_1) \leq C^m \mathcal{H}_\delta^m(A, d_2)$$

und mit $\delta \searrow 0$ auch

$$\mathcal{H}^m(A, d_1) \leq C^m \mathcal{H}^m(A, d_2). \quad \square$$

Satz 3.3.2 Für alle $A \subset S^2$ und $m \geq 0$ gilt:

$$\mathcal{H}^m(A, d_S) = \mathcal{H}^m(A, d_E).$$

Beweis.

1. Da ein Kreisbogen zwischen zwei Punkten länger ist als eine Strecke, gilt für alle $p, q \in S^2$

$$d_E(p, q) \leq d_S(p, q)$$

und mit Lemma 3.3.1 (δ_0 beliebig, $C = 1$, $d_1 = d_E$, $d_2 = d_S$) für alle $A \subset S^2$

$$\mathcal{H}^m(A, d_E) \leq \mathcal{H}^m(A, d_S).$$

Nun müssen wir uns nur noch um die umgekehrte Ungleichung kümmern.

- 2.

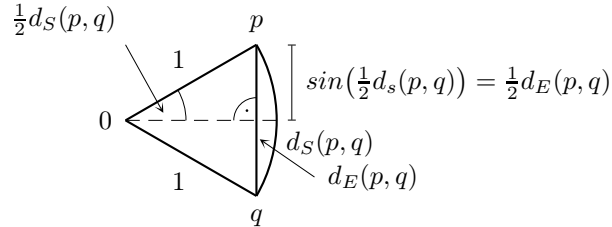


Abb. 141

Der Zeichnung entnehmen wir

$$\frac{1}{2}d_E(p, q) = \sin\left(\frac{1}{2}d_S(p, q)\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}d_S(p, q)\right)}{\frac{1}{2}d_S(p, q)} \cdot \frac{1}{2}d_S(p, q),$$

also mit $\frac{1}{2}d_S(p, q) =: x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

$$d_E(p, q) = \frac{\sin(x)}{x} \cdot d_S(p, q).$$

Selbst $x = 0$ bereitet keine Probleme, da wir die Funktion fortsetzen können zu einer stetigen, positiven Funktion $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \in (0, \frac{\pi}{2}]; \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Da der Definitionsbereich von f kompakt ist, nimmt die Funktion ihr Minimum an, und da der Wertebereich positiv ist, ist auch das Minimum größer als 0, d.h.

$$\exists a > 0 : f(x) \geq a \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

woraus wir erhalten

$$\begin{aligned} d_E(p, q) &\geq a d_S(p, q) \\ \Leftrightarrow d_S(p, q) &\leq \frac{1}{a} d_E(p, q) \quad \forall p, q \in S^2. \end{aligned}$$

3. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta_1 > 0$ derart, dass

$$\frac{\sin(x)}{x} \geq 1 - \varepsilon \quad \forall x \in [0, \delta_1].$$

(Das ist ja gerade der Grund, warum f in 0 stetig ist.)

Setze nun $\delta_0 := 2a\delta_1$. Dann gilt für alle $p, q \in S^2$ mit $d_S(p, q) \leq \delta_0$:

$$x = \frac{1}{2}d_S(p, q) \leq \frac{1}{2a}d_E(p, q) \leq \frac{\delta_0}{2a} = \delta_1,$$

und damit ist weiter

$$d_S(p, q) = \frac{x}{\sin(x)}d_E(p, q) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}d_E(p, q).$$

Das Lemma 3.3.1 liefert nun

$$\mathcal{H}^m(A, d_S) \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon}\right)^m \cdot \mathcal{H}^m(A, d_E),$$

und wenn ε gegen null geht, ergibt sich

$$\mathcal{H}^m(A, d_S) \leq \mathcal{H}^m(A, d_E),$$

was zusammen mit dem ersten Beweisteil die gewünschte Gleichheit zeigt. \square

Satz 3.3.3 Sei $c : [0, L] \rightarrow S^2$ eine stetige, stückweise glatte einfach geschlossene Kurve, welche das Gebiet $\Omega \subset S^2$ berandet (vgl. Definition 2.4.25). Es gelte $\{e_3, -e_3\} \cap \bar{\Omega} = \emptyset$ (Nord- und Südpol sind beide nicht in Ω und auch nicht auf dem Rand).

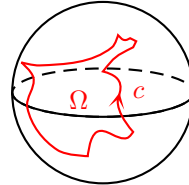


Abb. 142

Dann gilt mit $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \left| \int_0^L z(t) \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt \right|.$$

Der Satz soll an dieser Stelle unbewiesen bleiben.

Bemerkung 3.3.4 Wir können wegen $c(t) \in S^2 \Leftrightarrow x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$ auch schreiben:

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \left| \int_0^L z(t) \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{1 - z(t)^2} dt \right|.$$

Beispiel 3.3.5 Wir bestimmen den Flächeninhalt der Kugelkappe mit der Höhe h .

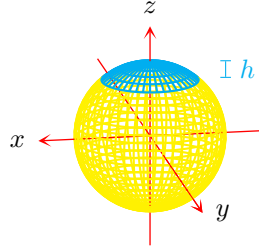


Abb. 143

Nun haben wir allerdings noch ein Problem: Der Nordpol liegt in der Kugelkappe! Da wir aber selbst bestimmen können, welche Achse wo liegt, benennen wir einfach die Achsen um und das Problem ist fort.

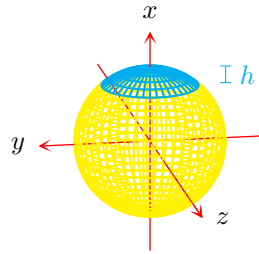


Abb. 144

Nun beschreiben wir die Randkurve: Die x -Koordinate ist konstant $(1-h)$. Die y - und die z -Koordinate beschreiben einen Kreis. Somit ergibt sich

$$c(t) = \begin{pmatrix} 1-h \\ r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

und da dies eine Kurve in S^2 sein soll, gilt

$$\|c(t)\|^2 = (1-h)^2 + r^2 \stackrel{!}{=} 1. \quad (3.1)$$

Nun können wir $\mathcal{H}^2(\bar{\Omega})$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) &= \left| \int_0^L z(t) \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} r \sin(t) \frac{0 \cdot r \cos(t) - (1-h) \cdot r(-\sin(t))}{(1-h)^2 + r^2 \cos^2(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{(1-h)r^2 \sin^2(t)}{(1-h)^2 + r^2 \cos^2(t)} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-h) \left| \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\frac{r}{1-h}\right)^2}_{=:b} \frac{\sin^2(t)}{1 + \left(\frac{r}{1-h}\right)^2 \cos^2(t)} dt \right| \\
&= (1-h) \left| \int_0^{2\pi} \frac{b \sin^2(t)}{1 + b \cos^2(t)} dt \right| \\
&= (1-h) \cdot 2(\sqrt{1+b} - 1) \pi \\
&= 2(1-h) \left(\sqrt{\frac{(1-h)^2 + r^2}{(1-h)^2}} - 1 \right) \pi \\
&\stackrel{(3.1)}{=} 2(1-h) \left(\frac{1}{1-h} - 1 \right) \pi \\
&= 2(1-h) \cdot \frac{1 - (1-h)}{1-h} \pi \\
&\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = 2\pi h.}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.3.6 Wir suchen eine Formel für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks. Nach Anwendung einer Isometrie können wir o.B.d.A. annehmen, dass (mit den üblichen Bezeichnungen der Seiten und Winkel)

1. c auf dem Äquator liegt (also z für diese Seite konstant gleich 0 ist);
2. der rechte Winkel bei B liegt, also $\beta = \frac{\pi}{2}$;
3. die Ecke $B = e_2$ ist.

Durch diese Bedingungen wird festgelegt, dass für die Dreiecksseite a die Bedingung $x \equiv 0$ gilt.

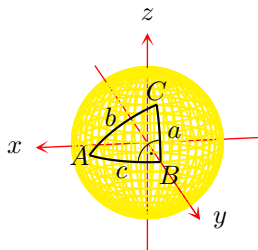


Abb. 145

Damit wir auch tatsächlich ausschließen, dass der Nordpol in $\bar{\Omega}$ enthalten ist, muss $a < \frac{\pi}{2}$ sein. Man kann sich überlegen, dass das Ergebnis, welches wir am Ende bekommen, auch für rechtwinklige sphärische Dreiecke mit längeren Seiten gilt.

Da für die Seite c die Bedingung $z \equiv 0$ erfüllt ist, trägt diese nicht zur Flächenberechnung bei (denn dort enthält der Integrand den Faktor z). Ebenso trägt a nicht zur Fläche bei, und wir müssen lediglich das Integral für die Hypotenuse bestimmen (was sich als schwierig genug erweisen wird).

Um die Seite b zu beschreiben, benötigen wir den Punkt A und den Tangentenvektor an A in Richtung C – dieser heiße X . Letzterer lässt sich jedoch nicht so leicht bestimmen, weshalb wir einen Umweg über Y , den Tangentenvektor an A in Richtung B , gehen. Dabei entnehmen wir sofort unseren Annahmen (oder gegebenenfalls der Grafik), dass

$$A = \begin{pmatrix} \sin(c) \\ \cos(c) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} -\cos(c) \\ \sin(c) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun X zu bestimmen, setzen wir erst einmal $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$ und untersuchen nun die Skalarprodukte mit den uns bekannten Vektoren:

$$\begin{aligned} 0 = \langle A, X \rangle &= \xi_1 \sin(c) + \xi_2 \cos(c), \\ \cos(\alpha) = \langle Y, X \rangle &= -\xi_1 \cos(c) + \xi_2 \sin(c) \\ \implies \xi_1 &= -\cos(c) \cos(\alpha), \quad \xi_2 = \sin(c) \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Außerdem ist $\|X\| = 1$, also

$$\xi_3 = \sqrt{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)} = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sin(\alpha),$$

und damit können wir auch X angeben:

$$X = \begin{pmatrix} -\cos(c) \cos(\alpha) \\ \sin(c) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Nun wird die Seite b parametrisiert durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \cos(t)A + \sin(t)X = \begin{pmatrix} \cos(t) \sin(c) & - & \sin(t) \cos(c) \cos(\alpha) \\ \cos(t) \cos(c) & + & \sin(t) \sin(c) \cos(\alpha) \\ 0 & + & \sin(t) \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir uns langsam ans Integral zur Flächenberechnung wagen: Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)y(t) &= (-\sin(t) \sin(c) - \cos(t) \cos(c) \cos(\alpha)) (\cos(t) \cos(c) + \sin(t) \sin(c) \cos(\alpha)); \\ x(t)\dot{y}(t) &= (\cos(t) \sin(c) - \sin(t) \cos(c) \cos(\alpha)) (-\sin(t) \sin(c) + \cos(t) \sin(c) \cos(\alpha)). \end{aligned}$$

Man erkennt bereits vor dem Ausmultiplizieren, dass die gemischten Terme (mit $\sin(t) \cos(t)$) in beiden Ausdrücken dasselbe Vorzeichen besitzen. Da jedoch die Differenz gebildet wird, fallen gleiche Terme mit gleichen Vorzeichen weg, und übrig bleibt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t) &= -\sin^2(t) \sin^2(c) \cos(\alpha) - \cos^2(t) \cos^2(c) \cos(\alpha) \\ &\quad - \cos^2(t) \sin^2(c) \cos(\alpha) - \sin^2(t) \cos^2(c) \cos(\alpha) \\ &= -(\sin^2(t) + \cos^2(t)) (\sin^2(c) + \cos^2(c)) \cos(\alpha) \\ &= -\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Nachher ist nur der Betrag des Integrals wichtig, und deshalb können wir im Zähler auch einfach $\cos(\alpha)$ schreiben. Es ist also

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \left| \int_0^L z(t) \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{1 - z(t)^2} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^b \sin(t) \sin(\alpha) \frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin^2(t) \sin^2(\alpha)} dt \right| \\
&= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left| \int_0^b \frac{\sin(t)}{1 - \sin^2(t) \sin^2(\alpha)} dt \right| \\
&= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot \frac{\alpha - \arctan(\cos(b) \tan(\alpha))}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)} \\
&= \alpha - \arctan(\cos(b) \tan(\alpha)).
\end{aligned}$$

Nun wollen wir diesen – zugegebenermaßen etwas unschönen – Ausdruck nur mit Hilfe von Winkeln umschreiben, und zu diesem Zwecke bemühen wir den Winkelkosinussatz der sphärischen Geometrie (Satz 3.1.24), welcher besagt:

$$\begin{aligned}
0 = \cos(\beta) &= \cos(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma) \\
\Leftrightarrow \cos(b) &= \frac{\cos(\alpha) \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\gamma)} = \cot(\alpha) \cot(\gamma).
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt dies

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \alpha - \arctan(\cancel{\cot(\alpha)} \cot(\gamma) \cancel{\tan(\alpha)}) = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}.}$$

Satz 3.3.7 Sei (A, B, C) ein nicht entartetes sphärisches Dreieck mit den Innenwinkeln α, β, γ . Dann hat das von (A, B, C) berandete Gebiet Ω den Flächeninhalt

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \quad (3.2)$$

Beweis. Zunächst überlegen wir, dass die nicht unseren Erkenntnissen aus Beispiel 3.3.6 widerspricht, denn dort war $\beta = \frac{\pi}{2}$, womit wir

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma - \pi = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$$

erhalten, was genau dem obigen Ergebnis entspricht.

Nun treten wir den allgemeinen Beweis an, indem wir das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. (Dies ist prinzipiell nur eine Beweisskizze, da man zeigen müsste, dass sich jedes sphärische Dreieck so zerlegen lässt.) Die dabei entstehenden Gebiete heißen Ω_1 bzw. Ω_2 .

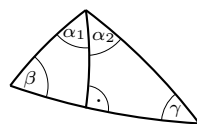


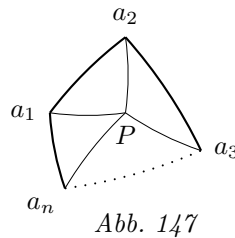
Abb. 146

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) &\stackrel{\text{Lem. 2.4.24}}{=} \mathcal{H}^2(\bar{\Omega}_1) + \mathcal{H}^2(\bar{\Omega}_2) \\
 &\stackrel{\text{Bsp. 3.3.6}}{=} (\alpha_1 + \beta - \frac{\pi}{2}) + (\alpha_2 + \gamma - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{=\alpha} + \beta + \gamma - \pi.
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.3.8 Wir bestimmen den Flächeninhalt eines konvexen sphärischen n -Ecks (a_1, \dots, a_n) . Wähle dazu einen Punkt P im Inneren des n -Ecks und zerlege es in die n sphärischen Dreiecke (a_j, P, a_{j+1}) (modulo n).



Um nun das vom n -Eck umrandete Gebiet zu erhalten, addiert man alle Dreiecksgebiete. Dabei muss man alle Winkel der Dreiecke addieren, was am Ende die Summe aller Winkel α_j des n -Ecks ergibt plus den Vollwinkel (2π) bei P ; und für jedes Dreieck – also n -mal – π subtrahieren. Damit erhält man

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j + 2\pi - n\pi = \sum_{j=1}^n \alpha_j - (n-2)\pi.$$

Wie wir nun sehen, können wir in diese Formel auch $n = 3$ einsetzen und erhalten genau (3.2).

3.4 Kartographie

Bei der Erstellung von Landkarten kommt es darauf an, ein bestimmtes Gebiet auf der Erdoberfläche (die der Einfachheit halber als Kugeloberfläche angenommen werden kann) möglichst maßstabsgetreu auf ein flaches Blatt Papier zu transformieren. Wir suchen also eine Ähnlichkeitstransformation f von S^2 (oder zumindest von einem Teil von S^2) in \mathbb{R}^2 .

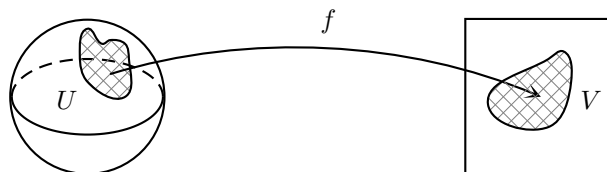


Abb. 148

Lemma 3.4.1 (Dieses Lemma beinhaltet zwar keine geometrische Aussage; wir brauchen es jedoch, um den folgenden Satz zu beweisen.)

In einer Umgebung von $t = 0$ gilt

$$f(t) := \frac{\cos(\sqrt{2}t)}{\cos^2(t)} < 1 \text{ für } t \neq 0,$$

d.h. in $t = 0$ besitzt f ein isoliertes Maximum.

Beweis. Zunächst erkennt man, dass $f(0) = 1$ ist. Wir bestimmen nun die erste Ableitung:

$$f'(t) = \frac{2 \cos(\sqrt{2}t) \sin(t) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \cos(t)}{\cos^3(t)}.$$

Wie leicht nachprüfbar ist, gilt $f'(0) = 0$, was schon mal die notwendige Bedingung für ein Maximum darstellt. Nun benötigen wir noch die zweite Ableitung:

$$f''(t) = \frac{2 \sin(t) (3 \cos(\sqrt{2}t) \sin(t) - 2\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \cos(t))}{\cos^4(t)}.$$

In der Nähe von $t = 0$ ist $\sin(t) = t + O(t^3)$ und $\cos(t) = 1 + O(t^2)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{(2t + O(t^3))((3 + O(t^2))(t + O(t^3)) - 2\sqrt{2}(\sqrt{2}t + O(t^3))(1 + O(t^2)))}{\cos^4(t)} \\ &= \frac{(2t + O(t^3))(3t + O(t^3) - (4t + O(t^3)))}{\cos^4(t)} \\ &= \frac{(2t + O(t^3))(-t + O(t^3))}{\cos^4(t)} \\ &= \frac{-2t^2 + O(t^4)}{\cos^4(t)} \\ &= t^2 \cdot \frac{-2 + O(t^2)}{\cos^4(t)}. \end{aligned}$$

Der Nenner $\cos^4(t)$ ist in einer Umgebung von $t = 0$ positiv, der Zähler $-2 + O(t^2)$ hingegen negativ. Da t^2 für $t \neq 0$ positiv ist, ist die zweite Ableitung von f also in einer Umgebung von $t = 0$ negativ, falls $t \neq 0$ ist. Damit ist f selbst rechtsgekrümmt, und wir haben tatsächlich ein isoliertes Maximum bei $t = 0$. \square

Satz 3.4.2 Sei $U \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von S^2 . Dann gibt es keine Ähnlichkeitstransformation f von U auf eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Beweis. Zunächst einmal stellen wir fest, dass sich zu einer Ähnlichkeitstransformation $f : U \rightarrow V$ mit dem Maßstab r immer auch eine Isometrie $\frac{1}{r}f : U \rightarrow \frac{1}{r}V$ finden lässt. Wir können unsere Betrachtungen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Isometrien einschränken.

Angenommen, es gäbe eine Isometrie, die $U \subset S^2$ auf $V \subset \mathbb{R}^2$ abbildet. Wähle nun $P \in U$ und setze zur besseren Übersicht $f(P) =: P' \in V$. Da U offen ist, lässt sich ein $\varrho \in \mathbb{R}$ so finden, dass alle $Q \in S^2$ mit $d_S(P, Q) < \varrho$ in U liegen.

Wähle nun zwei Großkreise durch P , die senkrecht aufeinander stehen, und auf diesen Großkreisen die vier paarweise verschiedenen Punkte A, B, C, D , die von P den Abstand $a < \varrho$ besitzen. An dieser Stelle sollten wir uns merken, dass wir a beliebig klein wählen können. Der Übersicht halber schreiben wir wieder $f(A) =: A'$ usw.

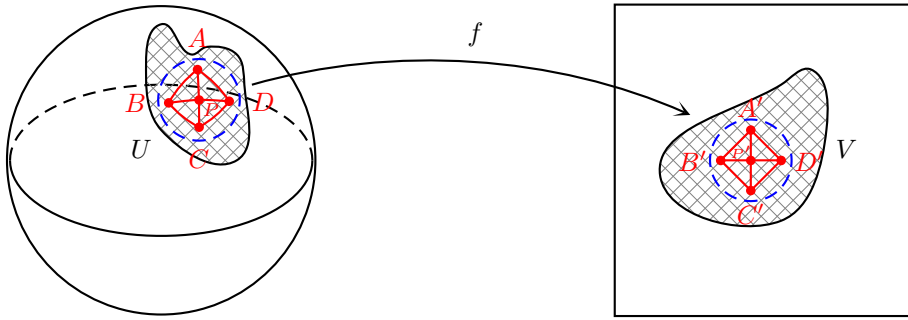


Abb. 149

Nun soll ja f eine Isometrie sein, d.h. $d_S(A, B) = d_E(A', B')$ und entsprechend für die anderen Seitenlängen der Vierecke (A, B, C, D) und (A', B', C', D') . Da weiterhin $d_S(A, B) = d_S(B, C) = d_S(C, D) = d_S(D, A)$, sind auch die Seitenlängen von (A', B', C', D') alle gleich, das Viereck ist also eine Raute.

Wir wissen aber, dass sich in einer Raute die Diagonalen senkrecht schneiden, und damit liefert der Satz des Pythagoras für (P', A', B') :

$$d_E(A', B') = \sqrt{d_E(P', A')^2 + d_E(P', B')^2} = \sqrt{2} \cdot a.$$

Der Seitenkosinussatz für (P, A, B) sagt hingegen:

$$\cos(d_S(A, B)) = \cos^2(a) + \sin^2(a) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(a).$$

Nun gilt aber immer noch $d_S(A, B) = d_E(A', B')$, also

$$\cos(\sqrt{2}a) = \cos^2(a) \Leftrightarrow \frac{\cos(\sqrt{2}a)}{\cos^2(a)} = 1.$$

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass a beliebig klein gewählt werden kann, und Lemma 3.4.1 sagt aus, dass der Bruchterm in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 für $a \neq 0$ immer kleiner als 1 ist. Wir haben also einen Widerspruch zu der

Annahme gefunden, dass die Abstände unter f erhalten bleiben können, und somit gibt es keine Isometrie und damit überhaupt keine Ähnlichkeitsabbildung von $U \subset S^2$ in $V \subset \mathbb{R}^2$. \square

Um nun verschiedene in der Kartographie übliche Projektionen kennenzulernen, ist es hilfreich, eine handliche Darstellung der Punkte auf der Sphäre zu besitzen.

Deshalb erinnern wir uns an die Darstellung der Punkte von S^2 in Polarkoordinaten. Dabei bestimmen wir einen Punkt $P \in S^2$ durch zwei Winkel:

$\theta \in [0, \pi]$ ist der Winkel zwischen der positiven e_1 -Achse und dem Vektor P ;

$\varphi \in [0, 2\pi)$ ist der Winkel, den die Projektion von P in die e_2 - e_3 -Ebene mit der positiven e_3 -Achse einschließt.

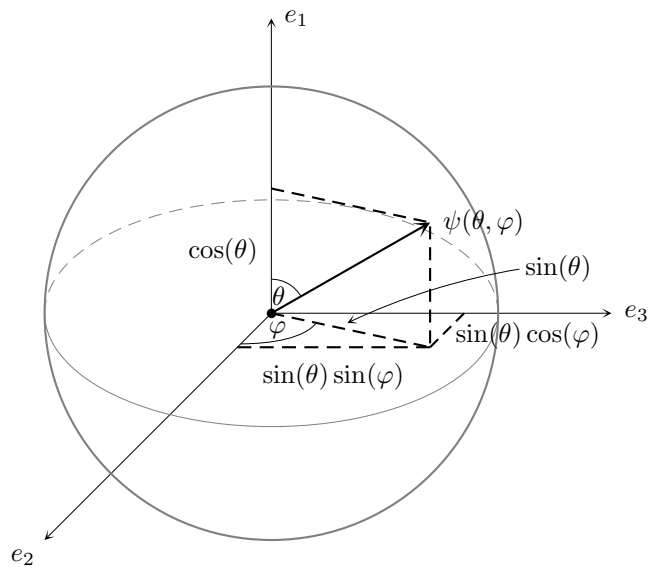


Abb. 150

In der Abbildung erkennt man:

$$\psi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Stereographische Projektion

Bei dieser Projektion werden alle Punkte der Sphäre bis auf einen ausgewählten Punkt N auf die Tangentialebene T an S^2 in $-N$ abgebildet, indem einem Punkt $P \in S^2$ der eindeutige Schnittpunkt von $G(N, P)$ mit T zugeordnet wird.

Wir können o.B.d.A. $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ setzen. Damit ist

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

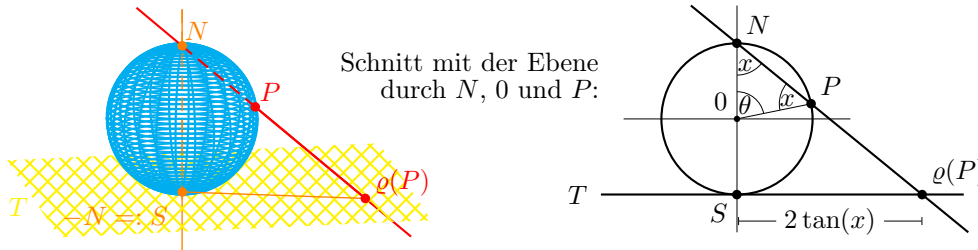


Abb. 151

Die Abbildung 151 hilft uns, eine explizite Abbildungsvorschrift für die stereographische Projektion ϱ zu finden.

Dazu erkennen wir zunächst, dass das Dreieck $(N, 0, P)$ gleichschenkelig ist, denn $d_E(N, 0) = d_E(P, 0) = 1$. Somit sind die im Querschnitt mit x gekennzeichneten Winkel tatsächlich gleich und es gilt

$$\theta + 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi - \theta}{2} \implies d_E(S, \varrho(P)) = 2 \tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right).$$

Diesen Querschnitt müssen wir jetzt nur um den richtigen Winkel φ drehen, aber der ist durch P bestimmt: Wenn wir P in Polarkoordinaten angeben, können wir φ und θ direkt ablesen.

Nun können wir noch die Ebene T mit \mathbb{R}^2 assoziieren, und wir erhalten

$$\varrho : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ vermöge } \varrho(\psi(\theta, \varphi)) = 2 \tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Eigenschaft der stereographischen Projektion ist die Winkeltreue, d.h. die Größe des Schnittwinkels zweier Großkreise in S^2 stimmt mit der Größe des Schnittwinkels von deren Bildern überein.

Bereits die Schwierigkeit, „Winkeltreue“ für diese Projektion genau zu erklären, legt nahe, dass ein formaler Beweis nicht ohne Methoden der Differentialgeometrie sowohl für Kurven in S^2 als auch für ebene Kurven auskommt. Einen entsprechenden Beweis werden wir zu Satz 3.4.12 führen. Hier soll ein anschaulicher Beweis den Vorzug bekommen, der allerdings eine Lücke beinhaltet: Wir müssen nämlich eine Hilfsabbildung $\hat{\varrho}$ definieren, bei der wir nicht wissen, wie sie sich zu ϱ selbst verhält.

Lemma 3.4.3 Sei $P \in S^2 - \{N\}$. Zu jeder Tangente g an S^2 , die durch P verläuft, definieren wir $\hat{\varrho}(g)$ als den Schnitt von T mit der eindeutigen Ebene, die g und N beinhaltet. $\hat{\varrho}(g)$ ist eine Gerade.

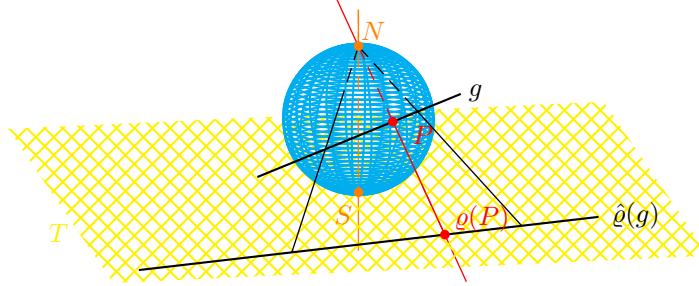


Abb. 152

Seien nun g und h zwei Tangenten, die S^2 in P berühren. Dann ist

$$\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(\hat{\varrho}(g), \hat{\varrho}(h)),$$

d.h. $\hat{\varrho}$ ist winkeltreu.

Beweis. Seien g und h zwei Geraden wie im Lemma gefordert, die jedoch nicht parallel zu T verlaufen. Der Schnittpunkt von g und T heiße A , h und T schneiden sich in B .

Betrachte zusätzlich die Tangente n , die von P in Richtung N verläuft. Diese schneide T in F .

Da g , h und n sämtlich in der Ebene T' liegen, die sich tangential zu S^2 ausbreitet und P beinhaltet, liegen A , B und F auch alle auf der Geraden $t := T' \cap T$.

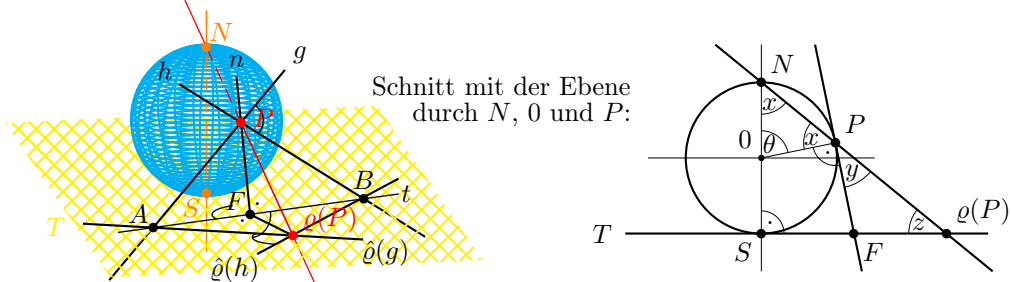


Abb. 153

In der linken Abbildung sind bereits zwei rechte Winkel eingezeichnet. Diese lassen sich wie folgt erklären:

$\sphericalangle(A, F, P) = \frac{\pi}{2}$: Die Gerade t liegt nach Definition ganz in T' . Alle Richtungsvektoren dieser Ebene stehen jedoch senkrecht auf P . Somit ist der Richtungsvektor v der Geraden t schon einmal senkrecht zu P . Weiterhin sind P, v, e_1 offensichtlich linear unabhängig, und $v \perp e_1$, da v in der e_2 - e_2 -Ebene liegt. Damit ist v senkrecht zu $\text{span}(P, e_1)$, aber $n \subset \text{span}(P, e_1)$ nach Definition von n , also $v \perp n$. Sonach ist $n = G(F, P)$ Höhe im Dreieck (A, B, P) .

$\sphericalangle(A, F, \varrho(P)) = \frac{\pi}{2}$: Da $F \in n \subset \text{span}(P, e_1)$ und $\varrho(P) \in \text{span}(P, e_1)$ nach Konstruktion, sehen wir wie eben $v \perp G(F, \varrho(P))$.

Nun wenden wir uns dem rechten Teil der Abbildung 153 zu. Wir wissen bereits, dass die mit x gekennzeichneten Winkel übereinstimmen.

Der gestreckte Winkel bei P setzt sich zusammen als

$$\pi = x + \frac{\pi}{2} + y \iff y = \frac{\pi}{2} - x,$$

während die Innenwinkelsumme im Dreieck $(N, S, \varrho(P))$ liefert:

$$\pi = x + \frac{\pi}{2} + z \iff z = \frac{\pi}{2} - x.$$

Das Dreieck $(F, P, \varrho(P))$ hat also identische Basiswinkel $y = z$ und ist somit gleichschenkelig:

$$d_E(F, P) = d_E(F, \varrho(P)).$$

Nun zurück zur Gesamtsituation: In den Dreiecken (A, B, P) und $(A, B, \varrho(P))$ ist eine Seite identisch, nämlich \overline{AB} . Des Weiteren sind die jeweiligen Höhen auf \overline{AB} gleich lang. Das genügt, um zu wissen, dass diese beiden Dreiecke kongruent sind. (Wer das nicht sofort einsieht, der betrachte zunächst die Teildreiecke (A, F, P) und $(A, F, \varrho(P))$.) Damit stimmen auch die Winkelgrößen $\sphericalangle(A, P, B) = \sphericalangle(g, h)$ und $\sphericalangle(A, \varrho(P), B) = \sphericalangle(\hat{\varrho}(g), \hat{\varrho}(h))$ überein. \square

Bemerkung 3.4.4 Der Beweis des Lemmas selbst beinhaltet in dieser Form noch drei Ungenauigkeiten:

Zunächst kann $P = S$ sein. Dann ist die Gerade t nicht eindeutig, sondern es gilt stattdessen $A = B = F = S$. In diesem Fall ist aber auch $\hat{\varrho}(g) = g$ und $\hat{\varrho}(h) = h$, und es bleibt nichts zu zeigen.

Als nächstes könnte $g \parallel T$ sein, dann gäbe es den Punkt A nicht. In diesem Fall lässt sich leicht zeigen, dass auch $\hat{\varrho}(g) \parallel t$ ist, und alles weitere kann man dann z.B. durch Konstruktion einer Hilfsgeraden, die nicht parallel zu t ist, beweisen.

Schließlich ist nicht in jedem Fall $\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(A, P, B)$, nämlich genau dann nicht, wenn der Winkel $\sphericalangle(A, P, B)$ stumpf ist. Da dasselbe dann jedoch auch für $\sphericalangle(A, \varrho(P), B)$ gilt, lassen sich alle diesbezüglichen Bedenken schnell aus dem Weg räumen.

Lemma 3.4.5 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung und es gebe ein $M \in \mathbb{R}^2$ derart, dass

$$\dot{\gamma}(t) \perp (\gamma(t) - M) \quad \forall t \in [a, b].$$

Dann beschreibt γ einen Kreisbogen um den Mittelpunkt M .

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\|\gamma(t) - M\|$ konstant ist. Dazu ist äquivalent, dass $\|\gamma(t) - M\|^2$ konstant ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Ableitung verschwindet. Wir berechnen also

$$\frac{d}{dt} \|\gamma(t) - M\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma(t) - M, \gamma(t) - M \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - M \rangle \\
 &= 0 \text{ nach Voraussetzung.}
 \end{aligned}$$

Da weiter eine differenzierbare Abbildung immer stetig ist, beschreibt γ auch nicht mehrere separate Kreisbögen. \square

Satz 3.4.6 Die stereographische Projektion ist kreistreu (wenn man Geraden als Kreise mit unendlichem Radius betrachtet). Im Einzelnen gilt:

1. Ist $K \subset S^2$ ein Kreis mit $N \in K$, so ist $\varrho(K) \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade;
2. Ist $K \subset S^2$ ein Kreis mit $N \notin K$, so ist $\varrho(K) \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis.

Beweis.

1. Sei $K \subset S^2$ ein Kreis, der N enthält. Sei E die Ebene, in der K liegt. Insbesondere ist damit $N \in E$.

Wenn wir die Punkte des Kreises nun in die Ebene abbilden wollen, so müssen wir gemäß der Konstruktionsvorschrift eine Gerade durch N und solch einen Punkt legen und deren Schnitt mit T bestimmen. Diese Gerade und damit auch der Bildpunkt liegen nun aber naturgemäß in E , und so erhalten wir

$$\varrho(K) = E \cap T.$$

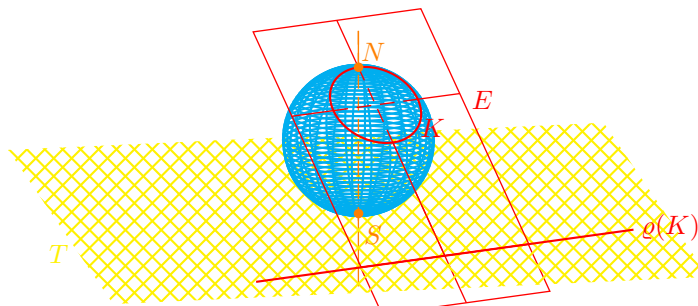


Abb. 154

(Dass es sich bei $\varrho(K)$ nicht nur um eine Strecke handelt, ist daran zu erkennen, dass $N \in K$ liegt, N selbst jedoch auf den unendlich fernen Punkt abgebildet wird. Dieser ist somit ein Bestandteil des Bildobjekts.)

2. Sei nun $N \notin K$, sei γ eine Funktion, die K beschreibt. Wir betrachten nun in jedem Punkt von K diejenige Tangente an S^2 , die außerdem senkrecht auf der Tangente an K in diesem Punkt steht. Um die Menge solcher Tangenten zu beschreiben, müssen wir leider noch einmal eine Fallunterscheidung machen:

- (a) K ist kein Großkreis.

Dann ist die oben beschriebene Menge der Berührkegel von K , und die Tangenten schneiden sich alle in der Spitze P des Berührkegels. Damit schneiden sich aber auch die Bilder all dieser Tangenten unter der Abbildung $\hat{\varrho}$ in $Q := \hat{\varrho}(P)$.

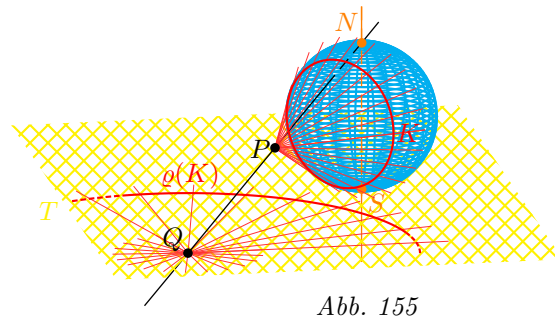


Abb. 155

In der Abbildung erkennt man, dass alle Geraden durch Q Bild einer Mantellinie des Berührkegels von K sind. Außerdem bildet $\hat{\varrho}$ die Tangenten an K auf Tangenten an $\varrho(K)$ ab, da $\hat{\varrho}(g) \cap \varrho(K)$ für alle Geraden g ebenso viele Punkte enthalten muss wie $g \cap K$.

Da nun $\hat{\varrho}$ nach Lemma 3.4.3 winkeltreu ist und K alle Mantellinien des Berührkegels senkrecht schneidet, muss auch $\varrho(K)$ alle Geraden durch Q senkrecht schneiden und ist somit gemäß dem Lemma 3.4.5 ein Kreis mit dem Mittelpunkt Q .

(b) K ist ein Großkreis.

In diesem Fall gibt es keinen Berührkegel; stattdessen formen die oben beschriebenen Tangenten einen Zylinder. Die Bilder dieser Tangenten unter $\hat{\varrho}$ erhält man als Schnitt von T mit der Ebene, die die jeweilige Gerade und N enthält. Da die Tangenten nun alle parallel sind, enthalten die Ebenen sämtlich die Gerade, die zum Zylinder parallel verläuft und N enthält. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit T liegt somit auf allen Bildgeraden der Mantellinien des Zylinders. Weiter argumentiert man dann wie in Beweisteil (a). \square

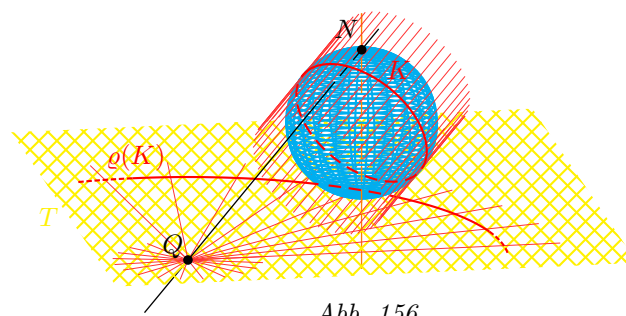


Abb. 156

Definition 3.4.7 Der Schnittwinkel zweier Kreise in \mathbb{R}^2 ist der Winkel zwischen den Tangentenvektoren.

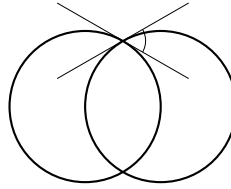


Abb. 157

Der Schnittwinkel eines Kreises mit einer Geraden in \mathbb{R}^2 ist der Winkel zwischen dem Tangentenvektor des Kreises und dem Richtungsvektor der Geraden.

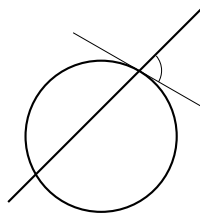


Abb. 158

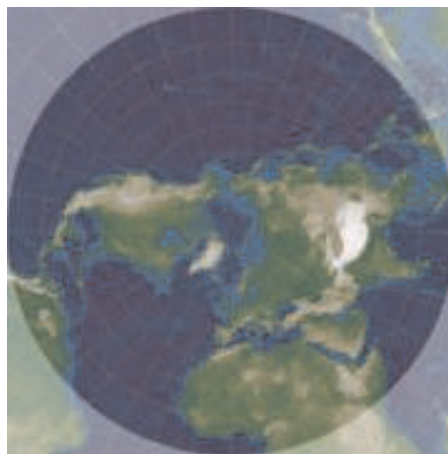
Satz 3.4.8 Die stereographische Projektion ϱ ist winkeltreu, d.h. für je zwei Großkreise $K_1, K_2 \in S^2$ gilt:

$$\sphericalangle(K_1, K_2) = \sphericalangle(\varrho(K_1), \varrho(K_2)).$$

Ein formal korrekter Beweis soll hier, wie oben erwähnt, nicht geführt werden; aber wir wissen nun immerhin, was Winkeltreue für die stereographische Projektion tatsächlich bedeutet.

Zum Schluss dieses Abschnitts folgen noch ein paar typische Karten von Gebieten der Erdoberfläche in stereographischer Projektion:

Zunächst eine Karte der Nordhalbkugel (hier war N der geographische Südpol):



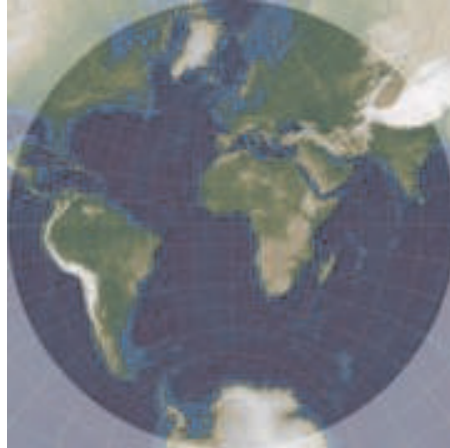
Quelle: www.wikipedia.de

Abb. 159

Auf dieser Karte erkennt man, dass alle Breitenkreise auch auf Kreise abgebildet wurden. Die Meridiane wurden bei der Abbildung zu Geraden, denn sie verlaufen durch den Südpol.

Für gewöhnlich wird die stereographische Projektion jedoch nur für die Polargebiete gebraucht, denn in der Nähe des Punktes S , der auf der Projektionsebene liegt, ist die Verzerrung noch gering.

In seltenen Fällen bekommt man auch einmal eine Karte zu Gesicht, bei der N keiner der Pole ist: In diesem Beispiel liegt N auf dem Äquator und dem 180. Längengrad.



Quelle: www.wikipedia.de

Abb. 160

Lambert-Entwurf

Diese Projektion geht zurück auf Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Dabei wird die Sphäre mit einem Zylinder umgeben, der diese in einem Großkreis (o.B.d.A. dem Äquator) berührt. Auf dessen Mantelfläche projiziert man nun in geeigneter Weise, dann wird sie abgerollt und man erhält eine rechteckige Landkarte, deren x -Koordinate praktischerweise mit dem Winkel φ der Polarkoordinaten übereinstimmt.

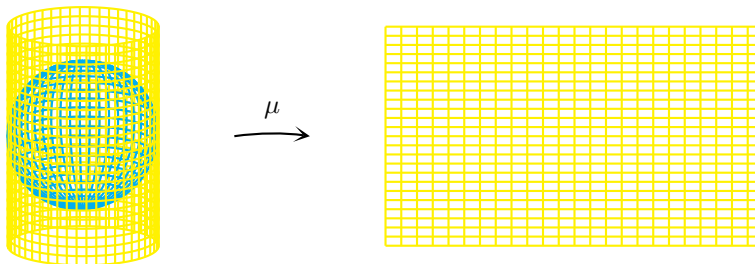


Abb. 161

Die einfachste Möglichkeit, die y -Koordinate zu definieren, ist, einfach die e_3 -Koordinate beizubehalten, wie im folgenden Querschnitt verdeutlicht wird:

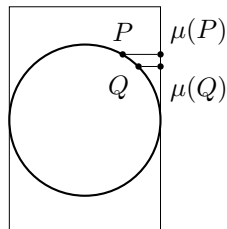


Abb. 162

Der auf diese Weise entstandene *Lambert-Entwurf* ist zwar nicht, wie die stereographische Projektion, kreis- oder winkeltreu, doch es stellt sich heraus, dass diese einfache Abbildung eine andere sehr nützliche Eigenschaft besitzt.

Zunächst aber wollen wir diese Projektion erst einmal exakt definieren – Sie lässt sich am leichtesten in Polarkoordinaten wie folgt ausdrücken:

$$\Psi_L : S^2 \rightarrow [0, 2\pi) \times [-1, 1] \text{ mit } \Psi_L(\psi(\theta, \varphi)) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

denn die erste Koordinate eines Bildpunktes ist genau der Längengrad (der Winkel φ), während die zweite Koordinate der e_3 -Koordinate des Urbildes entspricht, und das ist $\cos(\theta)$. (Achtung: In Abbildung 150 waren die Achsen abweichend bezeichnet!)

Ebenso einfach lässt sich die Umkehrabbildung bestimmen:

$$\Psi_L^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-y^2} \cos(x) \\ \sqrt{1-y^2} \sin(x) \\ y \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.4.9 Ψ_L ist flächentreu, d.h. ist $\Omega \subset S^2$ ein Gebiet, so ist $\mathcal{H}^2(\Omega) = \mathcal{H}^2(\Psi_L(\Omega))$.

Beweis. Der Bequemlichkeit halber beweisen wir nur einen Spezialfall des Lemmas: Das Gebiet Ω soll von einer einfach geschlossenen Kurve $c : [0, L] \rightarrow S^2$ (vgl. Definition 2.4.25) berandet werden, wobei alle Voraussetzungen zur Berechnung von $\mathcal{H}^2(\Omega)$ mittels der Integralformel (Satz 3.3.3) erfüllt seien. Außerdem sei $\Psi_L \circ c$ wieder einfach geschlossen, dann wird $\Psi_L(\Omega)$ von $\Psi_L \circ c$ berandet.

Nun ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(\Omega) &= \mathcal{H}^2(\Psi_L(\Omega)) = A_{\text{eukl}}[\Psi_L(\Omega)] \\ \int_0^L \frac{z(t)}{1-z(t)^2} (\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)) dt &= \int_0^L (-\dot{a}(t)b(t)) dt, \end{aligned}$$

wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Psi_L \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$ ist.

In diesem Fall gilt sogar Gleichheit für die Integranden und damit auch für die Integrale:

$$\begin{aligned} & \frac{z(t)}{1-z(t)^2} (\dot{x}(t)y(t) - \dot{y}(t)x(t)) \\ &= \frac{b(t)}{1-b(t)^2} \left(\left(-2b(t)\dot{b}(t) \frac{1}{2\sqrt{1-b(t)^2}} \cos(a(t)) - \sqrt{1-b(t)^2} \dot{a}(t) \sin(a(t)) \right) \sqrt{1-b(t)^2} \sin(a(t)) \right. \\ & \left. - \left(-2b(t)\dot{b}(t) \frac{1}{2\sqrt{1-b(t)^2}} \sin(a(t)) + \sqrt{1-b(t)^2} \dot{a}(t) \cos(a(t)) \right) \sqrt{1-b(t)^2} \cos(a(t)) \right) \\ &= \frac{b(t)}{1-b(t)^2} (-\dot{a}(t)(1-b(t)^2)(\sin^2(a(t)) + \cos^2(a(t))) \\ &= -\dot{a}(t)b(t). \end{aligned}$$

□

Mercator-Projektion

Diese Form der Projektion ist benannt nach Gerhard Kremer (1512–1594), der seinen Namen wie damals üblich latinisiert hatte.

Im 16. Jahrhundert waren zwar auch die Flächeninhalte interessant, da die eroberten Gebiete unter den Eroberern möglichst gleichmäßig aufgeteilt werden mussten; die Mathematik war jedoch auf diesem Bereich noch nicht weit genug fortgeschritten, um die Vorteile der Projektion, die heute als Lambert-Entwurf bekannt ist, zu erkennen. Dieser Projektion wurden also keine nützlichen Eigenschaften zugesprochen, und ihr ästhetischer Wert (ein nicht zu unterschätzender Faktor in der Kartographie) ist auch nicht besonders hoch, da gleiche sphärische Abstände in Richtung der Pole immer kleineren Absänden auf der Projektionsfläche entsprechen.

Also skalierte man einfach die y -Richtung noch mit einer geeigneten Funktion! Die Funktion, die uns die heute übliche Mercator-Projektion liefert, hat sich im Laufe der Jahrhunderte als die beste herausgestellt:

Definition 3.4.10 Die Abbildung

$$\mu : S^2 \rightarrow [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \text{ vermöge } \mu(\psi(\theta, \varphi)) = \left(\ln \left(\cot \left(\frac{\theta}{2} \right) \right), \varphi \right)$$

heißt *Mercator-Projektion*.

Diese Abbildung hat immer noch große Nachteile, denn sie lässt sich nicht elementar konstruieren, und die Verzerrung an den Polen lässt nun die Flächen dort viel größer erscheinen; aber es gibt einen entscheidenden Vorteil, der diese Karten für die Seefahrt und später auch für die Luftfahrt so interessant gemacht hat:

Satz 3.4.11 *Kurven konstanten Kurses werden unter μ auf Geraden abgebildet.*

Kurven konstanten Kurses sind solche, die zu allen Meridianen denselben Winkel haben. Diese lassen sich leicht unter Benutzung eines Kompasses ermitteln: Wenn die Nadel ihre Richtung nicht verändert, fährt man konstanten Kurs. Und der große Vorteil dabei ist, dass diese Kurven oft gute Näherungen an Großkreise darstellen.

Will man also auf konstantem Kurs von A nach B und hat eine Karte in Mercator-Projektion zur Hand, so zieht man einfach eine gerade Linie zwischen den Punkten und liest den Kurs ab, den man fahren muss.

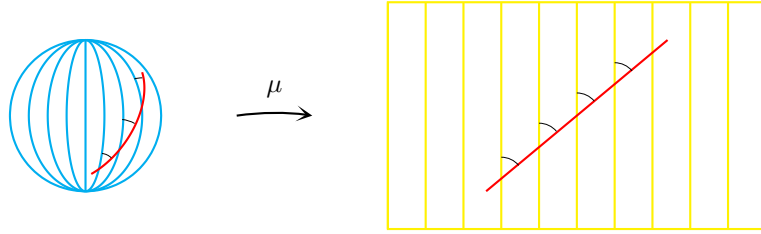


Abb. 163

Dieser Satz ist nichts weiter als ein Spezialfall des folgenden:

Satz 3.4.12 *Die Mercator-Projektion ist winkeltreu.*

Beweis. Da es keine elementare Konstruktion der Mercator-Projektion gibt, bleibt uns hier nichts anderes übrig, als einen mathematisch exakten, aber unanschaulichen Beweis zu führen:

Seien γ_1, γ_2 Kurven auf S^2 . Sei $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ ein Schnittpunkt dieser Kurven. Wir schreiben die Punkte, die die γ_i durchlaufen, in Polarkoordinaten:

$$\gamma_i(t) = \psi(\theta_i(t), \varphi_i(t)), \quad i = 1, 2.$$

Weiter schreiben wir

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_0 = \psi(\theta_0, \varphi_0).$$

Berechnen wir nun den Winkel zwischen den Tangenten an γ_1 und γ_2 in γ_0 :

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0))) &= \frac{\langle \dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0) \rangle}{\|\dot{\gamma}_1(0)\| \|\dot{\gamma}_2(0)\|} \\ &= \frac{\left\langle \dot{\theta}_1(0) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0) \\ \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_1(0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0) \end{pmatrix}, \dot{\theta}_2(0) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0) \\ \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0) \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \dot{\theta}_1(0) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0) \\ \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_1(0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0) \end{pmatrix} \right\| \left\| \dot{\theta}_2(0) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \cos(\varphi_0) \\ \cos(\theta_0) \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0) \end{pmatrix} \right\|} \end{aligned}$$

An dieser Stelle muss man eine Weile scharf hinschauen, um zu sehen, dass die Terme, in denen $\dot{\theta}$ und $\dot{\varphi}$ vorkommen, alle wegfallen, und übrig bleibt

$$\cos(\sphericalangle(\dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0))) = \frac{\dot{\theta}_1(0)\dot{\theta}_2(0) + \dot{\varphi}_1(0)\dot{\varphi}_2(0) \sin^2(\theta_0)}{\sqrt{\dot{\theta}_1^2(0) + \dot{\varphi}_1^2(0) \sin^2(\theta_0)} \sqrt{\dot{\theta}_2^2(0) + \dot{\varphi}_2^2(0) \sin^2(\theta_0)}}. \quad (3.3)$$

Nun müssen wir den Winkel zwischen $\mu \circ \gamma_1$ und $\mu \circ \gamma_2$ im Schnittpunkt bestimmen. Da wir eine Abbildungsvorschrift für μ besitzen, ist das auch nicht komplizierter:

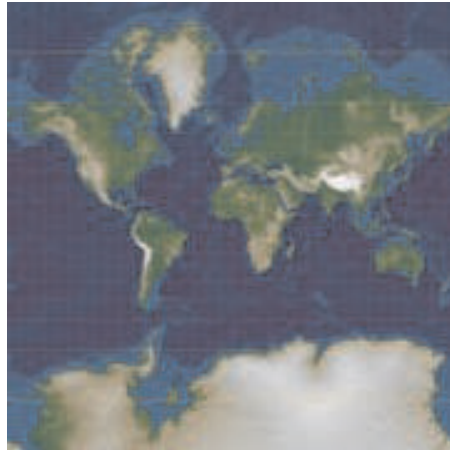
$$\begin{aligned} \cos(\sphericalangle(\frac{d}{dt}(\mu \circ \gamma_1)(0), \frac{d}{dt}(\mu \circ \gamma_2)(0))) &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(0) \\ -\frac{\dot{\theta}_1(0)}{\sin \theta_0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2(0) \\ -\frac{\dot{\theta}_2(0)}{\sin \theta_0} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(0) \\ -\frac{\dot{\theta}_1(0)}{\sin \theta_0} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2(0) \\ -\frac{\dot{\theta}_2(0)}{\sin \theta_0} \end{pmatrix} \right\|}} \\ &= \frac{\dot{\varphi}_1(0)\dot{\varphi}_2(0) + \frac{\dot{\theta}_1(0)\dot{\theta}_2(0)}{\sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(0) + \frac{\dot{\theta}_1^2(0)}{\sin^2(\theta_0)}} \sqrt{\dot{\varphi}_2^2(0) + \frac{\dot{\theta}_2^2(0)}{\sin^2(\theta_0)}}}. \end{aligned}$$

Erweitern wir nun diesen Ausdruck mit $\sin^2(\theta_0)$, so erhalten wir genau den Term aus (3.3). \square

Das Lemma 3.4.11 folgt hieraus insofern, als die Meridiane der Konstruktion nach auf parallele Geraden abgebildet werden und aufgrund der Winkeltreue die Kurve alle Parallelen in demselben Winkel schneiden muss. Eine Kurve jedoch, die alle Parallelen unter demselben Winkel schneidet, ist eine Gerade.

Wir haben also bei Karten der Erdoberfläche die Wahl, ob wir Winkel ablesen können möchten – dann wählen wir z.B. Mercator – oder lieber die Flächen im richtigen Maßstab sehen wollen – dann können wir den Lambert-Entwurf heranziehen.

Abschließend auch noch ein Kartenbeispiel für die Mercator-Projektion:



Quelle: www.wikipedia.de

Abb. 164

Hier erkennt man deutlich die charakteristische Verzerrung in Polnähe: Auf dieser Karte ist Grönland größer als Südamerika! Meist bricht man bei 70° südlicher sowie bei 75° nördlicher Breite die Darstellung ab.

3.5 Exkurs: Polytope

Definition 3.5.1 Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene, dann heißt die Menge der Punkte von \mathbb{R}^n , die auf einer Seite von H liegen, inklusive H *abgeschlossener Halbraum*.

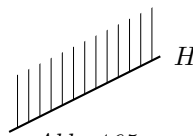


Abb. 165

Definition 3.5.2 Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt (*n-dimensional*) *Polytop*, falls gilt:

1. P ist Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume;
2. P ist kompakt;
3. Das Innere von P ist nicht leer, d.h. es existiert ein Punkt $p \in P$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$B_\varepsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_E(x, p) < \varepsilon\} \subset P.$$

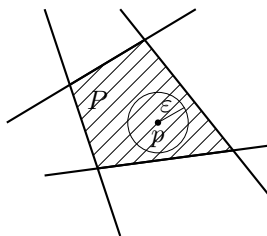


Abb. 166

Bemerkung 3.5.3 Da ein endlicher Durchschnitt abgeschlossener Mengen (was die abgeschlossenen Halbräume ja sind) wieder abgeschlossen ist, Mengen aber genau dann kompakt sind, wenn sie beschränkt und abgeschlossen sind, kann die Bedingung 2 in der Definition ersetzt werden durch

2. P ist beschränkt.

Bemerkung 3.5.4 Da abgeschlossene Halbräume konvex sind, sind auch Polytope konvex.

Hieran sieht man auch, dass nicht jedes n -Eck ein Polytop ist.



Abb. 167

Bemerkung 3.5.5 Ist das Polytop der Durchschnitt der abgeschlossenen Halbräume H_1, \dots, H_k , dann lässt sich der Rand des Polytops angeben als

$$\partial P = \bigcup_{j=1}^k (P \cap H_j).$$

Die einzelnen Segmente $(P \cap H_j)$ des Randes erfüllen die Eigenschaften 1 und 2 aus der Definition, jedoch 3 im Allgemeinen nicht.

Für dreidimensionale Polytope P besteht ∂P aus Ecken, Kanten und Flächen. Wir bezeichnen die Anzahl der Ecken mit $e(P)$, die der Kanten mit $k(P)$ und die der Flächen mit $f(P)$.

Beispiel 3.5.6 Einige Werte für $e(P)$, $k(P)$ und $f(P)$ bei bekannten Körpern:

Tetraeder: $e(P) = 4$, $k(P) = 6$, $f(P) = 4$

Diese und die folgenden Abbildungen können mit der Maus gedreht werden.

Abb. 168

Würfel: $e(P) = 8, k(P) = 12, f(P) = 6$

Abb. 169

Oktaeder: $e(P) = 6, k(P) = 12, f(P) = 8$

Abb. 170

Ikosaeder: $e(P) = 12, k(P) = 30, f(P) = 20$

Abb. 171

Dodekaeder $e(P) = 20$, $k(P) = 30$, $f(P) = 12$

Abb. 172

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen diesen Zahlen für Polyeder finden. Diesen liefert uns der folgende

Satz 3.5.7 (Euler'scher Polyedersatz) *Ist $P \subset \mathbb{R}^3$ ein Polytop, so gilt:*

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

Um diesen Satz zu beweisen, formulieren wir zunächst einen allgemeineren Satz, der aber einfacher zu beweisen ist. Vorher benötigen wir dazu noch eine Definition.

Definition 3.5.8 Ein *sphärischer Graph* ist ein Paar $\Gamma = (\mathcal{E}, \mathcal{K})$, wobei $\mathcal{E} \subset S^2$ endlich und nicht leer ist (Der Graph besitzt mindestens eine, aber nicht unendlich viele Ecken) und $\mathcal{K} = \{c_1, \dots, c_k\}$ eine Menge stetig differenzierbarer Kurven $c_j : [0, 1] \rightarrow S^2$ mit den Eigenschaften

1. $c_j(0), c_j(1) \in \mathcal{E}$ (Anfangs- und Endpunkt von c_j sind Ecken);
2. $c_j(t) \notin \mathcal{E} \forall t \in (0, 1)$ (sonst enthält c_j keine Ecken);
3. $c_j|_{(0,1)}$ ist injektiv;
4. $c_1((0,1)), \dots, c_k((0,1))$ sind paarweise disjunkt.

Γ heißt *zusammenhängend*, falls

$$|\Gamma| := \bigcup_{j=1}^k c_j((0,1)) \cup \mathcal{E} \subset S^2$$

eine zusammenhängende Teilmenge der Sphäre ist, d.h. wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in |\Gamma|$ eine stetige Kurve $f : [0, 1] \rightarrow |\Gamma|$ gibt mit $f(0) = x$, $f(1) = y$.



Abb. 173

Wir führen die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned}
 e(\Gamma) &:= \#\mathcal{E}, \\
 k(\Gamma) &:= k = \#\mathcal{K}, \\
 f(\Gamma) &:= \#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } S^2 - |\Gamma|\}.
 \end{aligned}$$

Für den zusammenhängenden Graphen Γ_1 aus Abbildung 173 ist

$$e(\Gamma_1) = 4, k(\Gamma_1) = 6, f(\Gamma_1) = 4.$$

Für den nicht zusammenhängenden Graphen Γ_2 aus der Abbildung ist

$$e(\Gamma_2) = 4, k(\Gamma_2) = 4, f(\Gamma_2) = 3.$$

Satz 3.5.9 (Eulerformel für sphärische Graphen) Für jeden zusammenhängenden sphärischen Graphen Γ gilt:

$$e(\Gamma) - k(\Gamma) + f(\Gamma) = 2.$$

Beweis. Wir führen die vollständige Induktion nach $k(\Gamma)$.

I.A. $k(\Gamma) = 0$. Dann ist $e(\Gamma) = 1$, denn Γ muss mindestens einen Eckpunkt besitzen, und hätte er zwei, so wäre der Graph nicht zusammenhängend. $|\Gamma|$ besteht also nur aus einem Punkt, und damit ist $f(\Gamma) = 1$. Wir überprüfen die Gültigkeit der Gleichung:

$$e(\Gamma) - k(\Gamma) + f(\Gamma) = 1 - 0 + 1 = 2 \quad \checkmark$$

I.S. Wir nehmen die Gültigkeit der Aussage für $k(\Gamma) - 1$ an. Nun entfernen wir eine Kante von Γ und erhalten den sphärischen Graphen Γ' . Die Menge \mathcal{E} bleibt dabei unverändert.

1. Fall: Γ' ist zusammenhängend. Dann gilt:

$$e(\Gamma') = e(\Gamma)$$

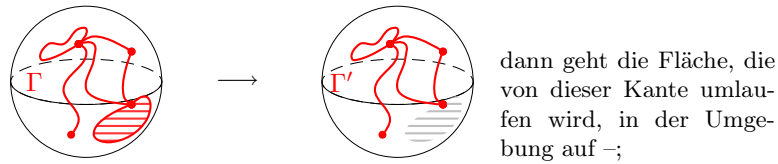
(denn \mathcal{E} haben wir nicht modifiziert),

$$k(\Gamma') = k(\Gamma) - 1$$

(denn wir haben schließlich eine Kante entfernt) und

$$f(\Gamma') = f(\Gamma) - 1,$$

denn entweder haben wir eine Kante entfernt, die eine Ecke mit sich selbst verbindet –



dann geht die Fläche, die von dieser Kante umlaufen wird, in der Umgebung auf –;

Abb. 174

oder wir haben eine Kante entfernt, die zwei verschiedene Ecken miteinander verbindet – aber da auch Γ' zusammenhängend ist, muss es noch einen anderen Weg geben, der diese Ecken miteinander verbindet, und dieser schließt zusammen mit der entfernten Kante ein Gebiet ein, was auch in diesem Fall in der Umgebung aufgeht und somit entfällt.

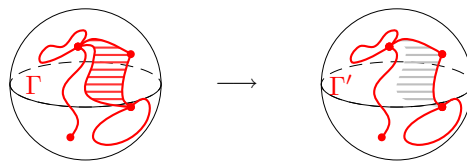


Abb. 175

Also gilt

$$e(\Gamma) - k(\Gamma) + f(\Gamma) = e(\Gamma') - (k(\Gamma') + \chi) + (f(\Gamma') + \chi) \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2.$$

2. Fall: Γ' ist nicht zusammenhängend. Dann besteht dieser Graph aber aus zwei zusammenhängenden Teilstücken, da Γ zusammenhängend war.

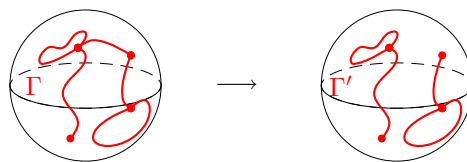


Abb. 176

In diesem Fall entfernen wir zusätzlich noch eine der Ecken, die die eben entfernte Kante miteinander verband, und führen alle darin einlaufenden Kanten in die andere Ecke. Man kann zeigen, dass dies so möglich ist, dass das entstandene Gebilde alle Bedingungen an einen sphärischen Graphen erfüllt, und nach Konstruktion ist dieser zusammenhängend. Nennen wir ihn Γ'' .

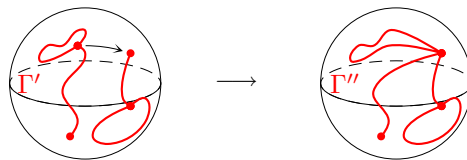


Abb. 177

Nun gilt

$$e(\Gamma'') = e(\Gamma) - 1$$

(wir haben eine Ecke entfernt),

$$k(\Gamma'') = k(\Gamma) - 1$$

(auch eine Kante haben wir entfernt) und

$$f(\Gamma'') = f(\Gamma),$$

denn dadurch, dass wir eine Ecke – wir können uns vorstellen: entlang der entfernten Kante – auf eine andere Ecke verschieben, bekommen wir weder zusätzliche Zusammenhangskomponenten in $S^2 - |\Gamma''|$ noch gehen uns solche aus $S^2 - |\Gamma|$ verloren. Wir erhalten also

$$e(\Gamma) - k(\Gamma) + f(\Gamma) = (e(\Gamma'') + \mathcal{I}) - (k(\Gamma'') + \mathcal{I}) + f(\Gamma'') \stackrel{1.V.}{=} 2. \quad \square$$

Nun können wir auch den Euler'schen Polyedersatz beweisen:

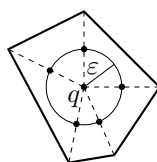


Abb. 178

Wir wählen einen Punkt q im Inneren des Polytops (was laut der Definition von Polytopen möglich sein muss) und eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(q) \subset P$ ist. Nun wird ∂P auf $\partial B_\varepsilon(q)$ projiziert – diese Abbildung ist bijektiv – und dann durch eine Ähnlichkeitstransformation in S^2 überführt. Durch diese Hintereinanderausführung zweier Abbildungen werden die Ecken und Kanten des Polytops auf einen sphärischen Graphen abgebildet.

Sofort klar ist hierbei $e(P) = e(\Gamma)$ und $k(P) = k(\Gamma)$, es stellt sich nur noch die Frage, ob auch $f(P) = f(\Gamma)$ gilt. Die Flächen des Polytops werden von seinen Kanten umlaufen, und da die Projektion stetig und bijektiv ist, sind auch die Bilder der Flächen die Gebiete, die von den Bildern der Kanten umlaufen werden. Aber die Anzahl der von den Kanten eines sphärischen Graphen Γ umlaufenen Gebiete ist ja genau $f(\Gamma)$, also gilt auch diese Gleichheit, und aus Satz 3.5.9 folgt direkt Satz 3.5.7. \square

Definition 3.5.10 Eine Menge $X \subset S^2$ heißt *sphärisch konvex*, falls die Menge

$$\{t \cdot x \mid x \in X, t \geq 0\}$$

im herkömmlichen Sinne konvex ist.

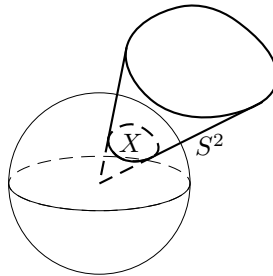


Abb. 179

Definition 3.5.11 Ein Tupel (A_1, \dots, A_N) mit $A_j \in S^2$ heißt *nicht entartetes sphärisches N -Eck*, falls $d_S(A_j, A_{j+1}) < \pi$ (j ist immer modulo N zu betrachten), das von den verbindenden Großkreisbögen umschlossene Gebiet sphärisch konvex ist und die Innenwinkel alle kleiner als π sind.

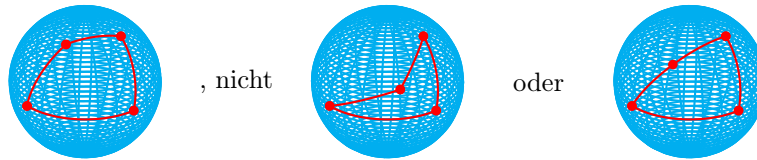


Abb. 180

Proposition 3.5.12 Sei (A_1, \dots, A_N) ein (konvexes) nicht entartetes sphärisches N -Eck. Seien a_1, \dots, a_N die sphärischen Seitenlängen; $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ die Winkel im N -Eck. Dann gilt:

$$a_1 + \dots + a_N < 2\pi, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_N > (N - 2)\pi.$$

Beweis. Zunächst beweisen wir die Aussage über die Winkelsumme mittels vollständiger Induktion nach N :

$N = 3$: Das ist genau Satz 3.1.15.

$N - 1 \rightarrow N$: Zerlege das sphärische N -Eck $(A_1, A_2, \dots, A_{N-1}, A_N)$ in das Dreieck (A_1, A_2, A_N) und das $N - 1$ -Eck $(A_2, \dots, A_{N-1}, A_N)$.

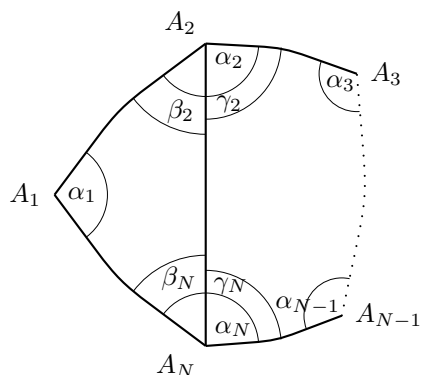


Abb. 181

Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir einerseits über das Dreieck:

$$\alpha_1 + \beta_2 + \beta_N > \pi;$$

andererseits jedoch auch für das $N - 1$ -Eck:

$$\gamma_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{N-1} + \gamma_N > ((N - 2) - 1)\pi.$$

Addiert man nun die Gleichungen, so erhält man sofort:

$$\alpha_1 + \underbrace{\beta_2 + \gamma_2}_{=\alpha_2} + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{N-1} + \underbrace{\beta_N + \gamma_N}_{=\alpha_N} > (N - 3)\pi + \pi = (N - 2)\pi \checkmark$$

Für die Seitenlängensumme sei hier lediglich ein Beweis skizziert: Sei (A'_1, \dots, A'_N) das zugehörige *Polar- N -Eck* zu (A_1, \dots, A_N) , d.h. es gelte (modulo N):

$$A'_j := \frac{A_j \times A_{j+1}}{\|A_j \times A_{j+1}\|}.$$

Das Polar- N -Eck ist ebenfalls ein (konvexes) nicht entartetes sphärisches N -Eck. Wie bei Dreiecken (vgl. Korollar 3.1.23) sieht man

$$\alpha'_i = \pi - a_i,$$

also

$$\begin{aligned} (N - 2)\pi &< \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_N \\ &= (\pi - a_1) + \cdots + (\pi - a_N) \\ &= N\pi - (a_1 + \cdots + a_N) \\ \Leftrightarrow a_1 + \cdots + a_N &< 2\pi. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.5.13 Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein Polytop, sei $q \in \partial P$ eine Ecke. Der Punkt q sei Eckpunkt der Flächen S_1, \dots, S_N des Polytops, und der Winkel bei q in der Fläche S_j heiße α_j . Dann gilt:

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_N < 2\pi.$$

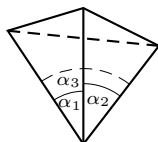


Abb. 182

Beweis. O.B.d.A. sei $q = 0$. Seien A_1, \dots, A_N die Schnittpunkte der von q ausgehenden Kanten mit S^2 (mit anderen Worten, die Endpunkte der von q ausgehenden Kanten, auf Einheitslänge normiert). Dann ist (A_1, \dots, A_N) ein (konvexes) nicht entartetes sphärisches N -Eck mit den Seitenlängen $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, da die sphärischen Seitenlängen gerade als die Winkel im Koordinatenursprung definiert sind. Die Aussage des Lemmas entspricht dann genau derjenigen der Proposition 3.5.12.

Definition 3.5.14 Wir nennen ein gleichseitiges n -Eck in der euklidischen Ebene *regelmäßig*, falls alle Winkel gleich sind.

Definition 3.5.15 Ein Polytop $P \subset \mathbb{R}^3$ heißt *platonischer Körper*, falls alle Randflächen kongruente regelmäßige gleichseitige n -Ecke sind und in jeder Ecke dieselbe Anzahl g von Kanten anliegt. Man nennt g den *Grad* des Polytops.

Definition 3.5.16 Ein *Tetraeder* ist ein platonischer Körper mit $n = 3$, $g = 3$ und $f = 4$. Ein *Hexaeder* ist ein platonischer Körper mit $n = 4$, $g = 3$ und $f = 6$. Ein *Oktaeder* ist ein platonischer Körper mit $n = 3$, $g = 4$ und $f = 8$. Ein *Dodekaeder* ist ein platonischer Körper mit $n = 5$, $g = 3$ und $f = 12$. Schließlich nennen wir einen platonischen Körper mit $n = 3$, $g = 5$ und $f = 20$ ein *Ikosaeder*.

Bemerkung 3.5.17 Je zwei Tetraeder sind zueinander ähnlich.

Äquivalent dazu lässt sich formulieren: Besitzen zwei Tetraeder dieselbe Kantenlänge, so sind sie kongruent.

Beweisskizze. Sei T ein Tetraeder. Wir wenden eine euklidische Bewegung so an, dass eine Seitenfläche in die x - y -Ebene abgebildet wird. Einen Punkt legen wir in den Koordinatenursprung, eine Kante an die positive x -Achse. An jede Kante dieser Seitenfläche (welche der Definition zufolge ein gleichseitiges Dreieck ist) schließt eine weitere Seitenfläche an.

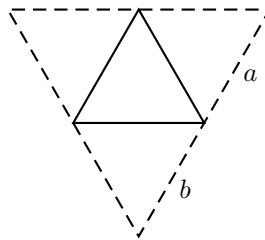


Abb. 183

Da von einer Ecke aber nach Definition nur drei Kanten ausgehen, fallen die Kanten a und b zusammen und müssen miteinander verklebt werden. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten, die Flächen zu falten, nämlich entweder nach oben oder nach unten. Die dritte Fläche muss dann in dieselbe Richtung gefaltet werden. Die beiden Möglichkeiten gehen durch Spiegelung ineinander über, sind also kongruent. \square

Bemerkung 3.5.18 Analoge Aussagen lassen sich ebenso für die anderen platonischen Körper zeigen. Dabei erkennt man auch, dass die Begriffe Hexaeder und Würfel dieselbe Klasse von Polytopen bezeichnen.

Satz 3.5.19 (Klassifikation der platonischen Körper) *Jeder platonische Körper P ist entweder ein Tetraeder, ein Hexaeder, ein Oktaeder, ein Dodekaeder oder ein Ikosaeder.*

Beweis.

- Wir überlegen zunächst, dass die Winkelsumme im konvexen euklidischen n -Eck genau $(n-2)\pi$ beträgt: Aus Satz 1.3.6 wissen wir bereits, dass die Winkelsumme im euklidischen Dreieck genau π ist, also gilt die Aussage für $n=3$. Der Induktionsschluss erfolgt analog zum Beweis von Proposition 3.5.12.

Damit wissen wir, dass im regelmäßigen gleichseitigen n -Eck jeder Innenwinkel die Größe $\frac{(n-2)\pi}{n}$ besitzt.

- Ist g der Grad des Polytops, so stoßen in einer Ecke g Seiten und somit auch g n -Ecke aneinander. Auf die Innenwinkel der n -Ecke, deren Scheitel diese Ecke ist, lässt sich Lemma 3.5.13 anwenden, woraus man die Relation

$$\begin{aligned} 2\pi &> g \cdot \frac{n-2}{n}\pi \\ \Leftrightarrow g &< \frac{2n}{n-2} \end{aligned}$$

erhält. Wäre nun $n \geq 6$, so wäre $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{6}$ und damit

$$\frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow g < \frac{2n}{n-2} \leq 3,$$

aber weniger als drei Kanten in einer Ecke spannten kein räumliches Gebilde auf. Es können also nur die Fälle $n=3, 4, 5$ auftreten.

3. Als nächstes suchen wir eine Beziehung zwischen der Zahl der Flächen und dem Grad eines platonischen Körpers. Dabei erkennen wir zunächst den Zusammenhang zwischen Ecken- und Kantenzahl: Von jeder der $e(P)$ Ecken gehen g Kanten aus, so kommen wir auf $g \cdot e(P)$; aber dabei haben wir jede Kante doppelt gezählt (nämlich für beide Ecken, die die Kante verbindet), also ist

$$k(P) = \frac{1}{2}g \cdot e(P).$$

Analog argumentieren wir für

$$k(P) = \frac{1}{2}n \cdot f(P),$$

und der Euler'sche Polyedersatz liefert noch

$$e(P) - k(P) + f(P) = 2.$$

In der letzten Gleichung lassen sich nun leicht $e(P)$ und $k(P)$ eliminieren:

$$\begin{aligned} \frac{2}{g}k(P) - k(P) + f(P) &= 2 \\ (2-g)k(P) + gf(P) &= 2g \\ (2-g) \cdot \frac{1}{2}nf(P) + gf(P) &= 2g \\ (2n-gn+2g)f(P) &= 4g \\ f(P) &= \frac{4g}{2n-gn+2g}. \end{aligned}$$

4. Mit all diesen Beziehungen ergeben sich nun die folgenden Möglichkeiten:

n	$\frac{2n}{n-2}$	g	$f(P)$	P
3	6	3	4	Tetraeder
		4	8	Oktaeder
		5	20	Ikosaeder
4	4	3	6	Hexaeder
5	$\frac{10}{3}$	3	12	Dodekaeder

□

Kapitel 4

Hyperbolische Geometrie

4.1 Minkowski-Geometrie

Wir führen das *Minkowski-Produkt* auf \mathbb{R}^3 ein. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ setze

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle := -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Das Minkowski-Produkt ist eine nicht ausgeartete, indefinite, symmetrische Bilinearform. Wir setzen

$$\begin{aligned} C &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}, \\ C_+ &:= \{x \in C \mid x_1 \geq 0\}, \\ C_- &:= \{x \in C \mid x_1 \leq 0\}, \\ I &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle < 0\}, \\ I_+ &:= \{x \in I \mid x_1 > 0\}, \\ I_- &:= \{x \in I \mid x_1 < 0\}, \\ J &:= C \cup I = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle \leq 0\}, \\ J_+ &:= C_+ \cup I_+, \\ J_- &:= C_- \cup I_-. \end{aligned}$$

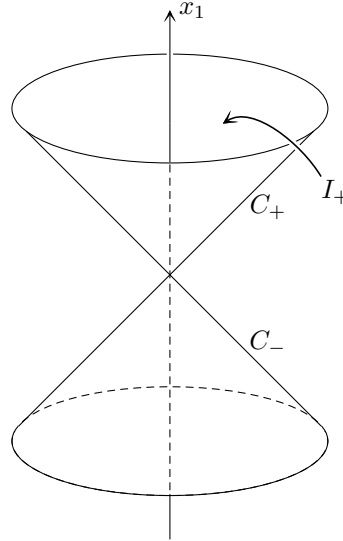


Abb. 184

Die Menge C bildet einen Doppelkegel, ihre Elemente $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißen *lichtartige Vektoren*, diejenigen von C_+ bzw. C_- heißen *zukunftsgerichtete* bzw. *vergangenheitsgerichtete lichtartige Vektoren*. Elemente aus I heißen *zeitartig*, diejenigen aus I_+ bzw. I_- heißen *zukunftsgerichtet zeitartig* bzw. *vergangenheitsgerichtet zeitartig*. Elemente $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus J heißen *kausal*. Elemente aus $(\mathbb{R}^3 - J) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ heißen *raumartig*.

Satz 4.1.1 Seien $x, y \in I_+$, sei $t > 0$. Dann ist

- (i) $t \cdot x \in I_+$,
- (ii) $x + y \in I_+$.

Aussage (i) gilt auch mit $I, I_-, C, C_+, C_-, J, J_+, J_-$ oder $\mathbb{R}^3 - J$ statt I_+ . Aussage (ii) gilt auch mit I_-, J_+ oder J_- statt I_+ .

Beweis.

- (i) Wegen $x \in I_+$ ist $\langle x, x \rangle < 0$, also $\langle tx, tx \rangle = t^2 \cdot \langle x, x \rangle < 0$, somit $tx \in I$. Mit $x_1 > 0$ ist auch $t \cdot x_1 > 0$, also $tx \in I_+$.
- (ii) Die Bedingung $x \in I_+$ bedeutet $x_1 > 0$ und $x_2^2 + x_3^2 < x_1^2$. Sind $x, y \in I_+$, so gilt $x_1 + y_1 > 0$ und ferner

$$\begin{aligned}
 (x_1 + y_1)^2 &= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 \\
 &> x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_2^2 + y_3^2} + y_2^2 + y_3^2 \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot (x_2y_2 + x_3y_3) + y_2^2 + y_3^2 \\
 &= (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2.
 \end{aligned}$$

Also ist auch $x + y \in I_+$. □

Korollar 4.1.2 I_+, I_-, J_+ und J_- sind konvex.

Beweis. Seien $x, y \in I_+$, sei $t \in (0, 1)$. Dann sind $t > 0$ und $1 - t > 0$ und daher $t \cdot x \in I_+$ und $(1 - t) \cdot y \in I_+$ und somit $t \cdot x + (1 - t) \cdot y \in I_+$. \square

Bemerkung 4.1.3 Das Korollar gilt nicht für I statt I_+ ,

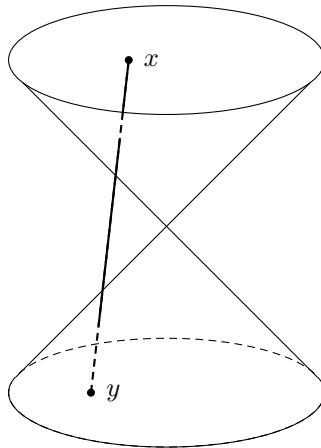


Abb. 185

nicht für C_+ statt I_+ ,

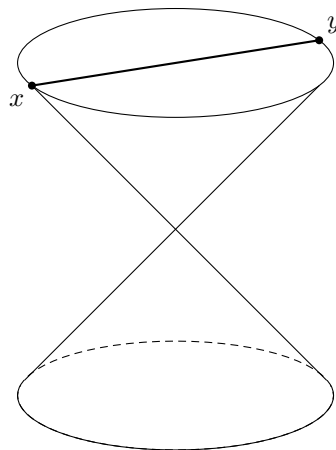


Abb. 186

und auch nicht für $\mathbb{R}^3 - J$ statt I_+ .

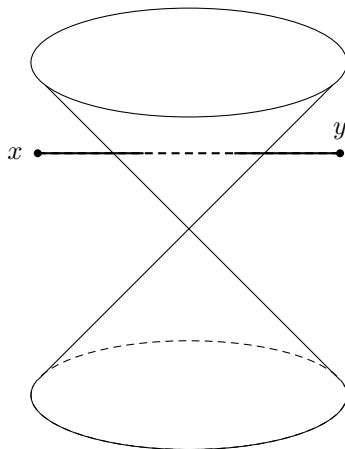


Abb. 187

Definition 4.1.4 Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Lorentz-Transformation*, falls

$$\langle\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Definition 4.1.5 Eine Basis $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ heißt *Lorentz-orthonormal*, falls

$$\langle\langle b_1, b_1 \rangle\rangle = -1, \langle\langle b_2, b_2 \rangle\rangle = \langle\langle b_3, b_3 \rangle\rangle = 1 \text{ und } \langle\langle b_i, b_j \rangle\rangle = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Wir schreiben hierfür auch

$$\langle\langle b_i, b_j \rangle\rangle = \delta_{ij}^*, \text{ wobei } \delta_{ij}^* = \begin{cases} -1, & \text{falls } i = j = 1; \\ 1, & \text{falls } i = j \neq 1; \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beispiel 4.1.6 Die Standardbasis $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ ist Lorentz-orthonormal.

Satz 4.1.7 Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Lorentz-Transformation, wenn Φ linear ist und $\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3) \in \mathbb{R}^3$ eine Lorentz-orthonormale Basis bilden.

Beweis.

- a) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Lorentz-Transformation. Wegen $\langle\langle \Phi(e_i), \Phi(e_j) \rangle\rangle = \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle$ ist $\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3) \in \mathbb{R}^3$ eine Lorentz-orthonormale Basis. Für $x \in \mathbb{R}^3$ schreibe

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^3 c_i \Phi(e_i).$$

Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Phi(x), \Phi(e_1) \rangle\rangle &= \left\langle\left\langle \sum_{i=1}^3 c_i \Phi(e_i), \Phi(e_1) \right\rangle\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^3 c_i \langle\langle \Phi(e_i), \Phi(e_1) \rangle\rangle \\
&= \sum_{i=1}^3 c_i \langle\langle e_i, e_1 \rangle\rangle \\
&= -c_1
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\langle\langle \Phi(x), \Phi(e_1) \rangle\rangle = \langle\langle x, e_1 \rangle\rangle = -x_1$$

und somit $c_1 = x_1$. Analog sehen wir $c_2 = x_2$ und $c_3 = x_3$. Es folgt

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^3 x_i \Phi(e_i),$$

d.h. Φ ist linear.

- b) Sei Φ linear und sei $\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3) \in \mathbb{R}^3$ eine Lorentz-orthonormale Basis. Dann folgt für $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle\rangle &= \left\langle\left\langle \Phi\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i\right), \Phi\left(\sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) \right\rangle\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j \langle\langle \Phi(e_i), \Phi(e_j) \rangle\rangle \\
&= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\
&= \langle\langle x, y \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.8 Setzen wir $\mathbb{J} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle x, \mathbb{J}y \rangle = \langle \mathbb{J}x, y \rangle$$

und

$$\langle x, y \rangle = \langle\langle x, \mathbb{J}y \rangle\rangle = \langle\langle \mathbb{J}x, y \rangle\rangle.$$

Somit ist die durch eine 3×3 -Matrix A vermöge $\Phi_A(x) := Ax$ gegebene lineare Abbildung Φ_A genau dann eine Lorentz-Transformation, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\langle x, A^t \mathbb{J}Ay \rangle = \langle Ax, \mathbb{J}Ay \rangle = \langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle x, \mathbb{J}y \rangle,$$

d.h. wenn

$$A^t \mathbb{J}A = \mathbb{J}.$$

gilt.

Wir fassen zusammen:

Satz 4.1.9 Sei A eine reelle 3×3 -Matrix. Dann sind äquivalent:

- (1) Die durch $\Phi_A(x) = Ax$ gegebene lineare Abbildung Φ_A ist eine Lorentz-Transformation.
- (2) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Lorentz-orthonormale Basis von \mathbb{R}^3 .
- (3) Es gilt: $A^t \mathbb{J} A = \mathbb{J}$. □

Ferner haben Lorentz-Transformationen folgende Eigenschaften:

Satz 4.1.10 (i) Sind $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Lorentz-Transformationen, so ist auch $\Phi_1 \circ \Phi_2$ eine Lorentz-Transformation.

(ii) Ist $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Lorentz-Transformation, so ist Φ invertierbar und Φ^{-1} ist ebenfalls eine Lorentz-Transformation.

(iii) Die Matrix A einer Lorentz-Transformation erfüllt

$$\det A = \pm 1.$$

Beweis.

- (i) $\langle\langle \Phi_1(\Phi_2(x)), \Phi_1(\Phi_2(y)) \rangle\rangle = \langle\langle \Phi_2(x), \Phi_2(y) \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle$.
- (iii) Aus $-1 = \det \mathbb{J} = \det(A^t \mathbb{J} A) = \det(A^t) \det(\mathbb{J}) \det A = -\det(A)^2$ folgt $\det(A)^2 = 1$, also $\det(A) = \pm 1$.
- (ii) Wegen (iii) ist Φ invertierbar und es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle\langle x, y \rangle\rangle &= \langle\langle \Phi(\Phi^{-1}(x)), \Phi(\Phi^{-1}(y)) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y) \rangle\rangle. \end{aligned}$$

□

Dem Satz 4.1.10 entnehmen wir, dass die Lorentz-Transformationen eine Abbildungsgruppe bilden.

Definition 4.1.11 Die Menge $\mathcal{L}(3) := \{A \mid A \text{ ist reelle } 3 \times 3\text{-Matrix mit } A^t \mathbb{J} A = \mathbb{J}\}$ heißt *Lorentz-Gruppe*.

Bemerkung 4.1.12 Mitunter schreibt man auch $O(2, 1)$ statt $\mathcal{L}(3)$.

Beispiel 4.1.13 Ist $B \in O(2)$, also von der Form $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ oder

$B = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$, so ist

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & B \\ 0 & & \end{array} \right)$$

eine Lorentz-Transformation, denn

$$\begin{aligned}
 A^t \cdot \mathbb{J} \cdot A &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B^t & \\ 0 & & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1}_2 & \\ 0 & & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & \\ 0 & & \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B^t \cdot B & \\ 0 & & \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1}_2 & \\ 0 & & \end{array} \right) \\
 &= \mathbb{J}.
 \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.14 Für $\eta \in \mathbb{R}$ ist

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Lorentz-Transformation und wird *Lorentz-Boost* genannt. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
 A^t \mathbb{J} A &= \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \\
 &= \begin{pmatrix} -\cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ -\sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\cosh(\eta)^2 + \sinh(\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh(\eta)^2 + \cosh(\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \stackrel{(1.28)}{=} &\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{J}.
 \end{aligned}$$

Analog ist auch eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & 0 & \sinh(\eta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\eta) & 0 & \cosh(\eta) \end{pmatrix}$$

in $\mathcal{L}(3)$ und wird ebenfalls Lorentz-Boost genannt.

Satz 4.1.15 Seien $x, y \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)^\top\}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle y, y \rangle\rangle$

(ii) Es gibt ein $A \in \mathcal{L}(3)$ mit $y = Ax$.

Beweis. (ii) \Rightarrow (i) ist klar. Wir zeigen (i) \Rightarrow (ii).

- a) Betrachten wir den Fall, dass x , und damit auch y , zeitartig ist. Wir setzen $c := \sqrt{|\langle x, x \rangle|} = \sqrt{|\langle y, y \rangle|}$. Dann ist auch $z := c \cdot e_1$ ein zeitartiger Vektor mit $\langle z, z \rangle = -c^2 = \langle x, x \rangle$. Es genügt zu zeigen, dass man zu beliebigen x ein $A \in \mathcal{L}(3)$ finden kann, so dass $Ax = z$, denn dann findet man zu x ein solches $A_1 \in \mathcal{L}(3)$ mit $A_1x = z$ und zu y ein solches $A_2 \in \mathcal{L}(3)$ mit $A_2y = z$. Dann gilt $y = A_2^{-1}z = A_2^{-1}A_1x$ und $A := A_2^{-1}A_1 \in \mathcal{L}(3)$.

Sei also o. B. d. A. $y = z = c \cdot e_1$. Falls $x \in I_-$, so betrachte $\tilde{x} := A_3 \cdot x \in I_+$, wobei $A_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3)$. Falls $x \in I_+$, so setze $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3)$, d.h. $\tilde{x} = x$. Wir drehen \tilde{x} um die e_1 -Achse in die e_1 - e_2 -Ebene. In anderen Worten, für geeigneten Winkel θ erreichen wir, dass

$$\tilde{\tilde{x}} := A_4 \cdot \tilde{x}$$

verschwindende e_3 -Komponente hat, wobei

$$A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3).$$

Der Punkt $\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}_1 / c \\ \tilde{\tilde{x}}_2 / c \end{pmatrix}$ liegt auf der Hyperbel

$$\left(\frac{\tilde{\tilde{x}}_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{\tilde{x}}_2}{c}\right)^2 = -\frac{1}{c^2} \langle \tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{x}} \rangle = -\frac{1}{c^2} \langle x, x \rangle = 1$$

und $\tilde{\tilde{x}}_1/c \geq 1$. Somit gibt es nach Korollar 1.7.21 ein $\eta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}_1}{c} = \cosh(\eta) \text{ und } \frac{\tilde{\tilde{x}}_2}{c} = \sinh(\eta).$$

Für den Lorentz-Boost $A_5 := \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3)$ gilt also

$$A_5(c e_1) = \begin{pmatrix} c \cdot \cosh(\eta) \\ c \cdot \sinh(\eta) \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{x}}.$$

Also ist für $A := A_5^{-1} \cdot A_4 \cdot A_3 \in \mathcal{L}(3)$

$$Ax = A_5^{-1} A_4 \tilde{x} = A_5^{-1} \tilde{\tilde{x}} = c e_1 = y.$$

- b) Ist x raumartig, so können wir o. B. d. A. annehmen, dass $y = c \cdot e_2$ mit $c = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Drehe x zunächst um die e_1 -Achse in die e_1 - e_2 -Ebene, und zwar auf dieselbe Seite wie e_2 . In anderen Worten, wir finden ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass für

$$A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3)$$

und $\hat{x} := A_6 \cdot x$ gilt $\hat{x}_3 = 0$ und $\hat{x}_2 > 0$. Dieses Mal gilt

$$\left(\frac{\hat{x}_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{\hat{x}_1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}(-\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) = \frac{1}{c^2} \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle x, x \rangle = 1$$

sowie $\frac{\hat{x}_2}{c} \geq 1$. Daher können wir ein $\eta \in \mathbb{R}$ finden, so dass

$$\left(\frac{\hat{x}_2}{c}, \frac{\hat{x}_1}{c}\right) = (\cosh(\eta), \sinh(\eta)).$$

Dann gilt für

$$A_7 := \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dass $A_7 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} \sinh(\eta) \\ \cosh(\eta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1/c \\ \hat{x}_2/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \hat{x}$ und somit

$$y = ce_2 = A_7^{-1} \hat{x} = A_7^{-1} \cdot A_6 \cdot x.$$

- c) Sei schließlich x , und damit auch y , lichtartig. O. B. d. A. sei $y = e_1 + e_2$. Ist x vergangenheitsgerichtet, so spiegeln wir wie im zeitartigen Fall an der e_2 - e_3 -Ebene. Sei also o. B. d. A. x zukunftsgerichtet. Durch eine Drehung um die e_1 -Achse können wir x auf ein positives Vielfaches von $e_1 + e_2$ abbilden, $y = \alpha \cdot (e_1 + e_2)$, $\alpha > 0$. Wir setzen $\eta := -\ln(\alpha)$. Dann gilt für

$$A := \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3):$$

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\eta) + \sinh(\eta) \\ \sinh(\eta) + \cosh(\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} e^\eta \\ e^\eta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y. \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.16 (Inverse Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Seien $x, y \in I$. Dann gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \geq \sqrt{|\langle x, x \rangle|} \cdot \sqrt{|\langle y, y \rangle|}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Nach Satz 4.1.15 können wir o. B. d. A. annehmen, dass $y = c \cdot e_1$ mit $c \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |\langle x, y \rangle|^2 - (\sqrt{|\langle x, x \rangle|} \cdot \sqrt{|\langle y, y \rangle|})^2 \\ &= \langle x, y \rangle^2 - (-\langle x, x \rangle)(-\langle y, y \rangle) \\ &= (-cx_1)^2 - (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \cdot c^2 \\ &= c^2 \cdot (x_2^2 + x_3^2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_2 = x_3 = 0$, d.h. wenn x Vielfaches von y ist. \square

Satz 4.1.17 Sei $z \in \mathbb{R}^3$ zeitartig, seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle = 0$. Dann gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{|\langle x, x \rangle|} \cdot \sqrt{|\langle y, y \rangle|}$$

mit „ \leq “ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Wir können wieder o. B. d. A. annehmen, dass $z = c \cdot e_1$ mit $c > 0$. Die Bedingung $\langle x, z \rangle = 0$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ bedeutet dann einfach $x_1 = 0$. Analog haben wir $y_1 = 0$. Dann ist

$$\langle x, y \rangle = \underbrace{-x_1 y_1}_{=0} + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und analog $\langle x, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ sowie $\langle y, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Die Behauptung folgt nun aus der üblichen Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{R}^2 . \square

Satz 4.1.18 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $a_{11} > 0$
- (ii) $A \cdot e_1 \in I_+$
- (iii) $A(I_+) \subset I_+$

Beweis. Da e_1 zeitartig ist und A eine Lorentz-Transformation, muss auch $A \cdot e_1$ zeitartig sein, d.h. $A \cdot e_1 \in I$. Daher ist $A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \in I_+$ äquivalent zu $a_{11} > 0$. Dies zeigt die Äquivalenz von (i) und (ii). Wegen $e_1 \in I_+$ ist die Implikation (iii) \Rightarrow (ii) trivial.

Es bleibt (ii) \Rightarrow (iii) zu zeigen. Sei also $A \cdot e_1 \in I_+$ und $x \in I_+$. Wir zeigen $Ax \in I_+$. Da I_+ konvex ist, ist $t \cdot x + (1-t) \cdot e_1 \in I_+$ für alle $t \in [0, 1]$. Setze $A(t \cdot x + (1-t) \cdot e_1) =$

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$. Wegen $y(0) = A \cdot e_1$ ist $y_1(0) = a_{11} > 0$. Da $y(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ zeitartig ist, ist $y_1(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Also muss $y_1(t) > 0$ für alle $t \in [0, 1]$ gelten. Damit ist insbesondere $y(1) = A \cdot x$ zukunftsgerichtet. \square

Definition 4.1.19 Die Elemente von $\mathcal{L}^\uparrow(3) := \{A \in \mathcal{L}(3) \mid a_{11} > 0\}$ heißen *zeitorientierungserhaltende Lorentz-Transformationen*.

Wir stellen fest, dass $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ eine Untergruppe von $\mathcal{L}(3)$ ist, denn:

Korollar 4.1.20 Seien $A, B \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$. Dann sind auch $A \cdot B, A^{-1} \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ und es gilt $A(I_+) = I_+$ sowie $A(I_-) = I_-$.

Beweis. Wir benutzen Kriterium (iii) aus Satz 4.1.18. Mit $A, B \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ gilt $A(\underbrace{B(I_+)}_{\subset I_+}) \subset A(I_+) \subset I_+$. Also ist $A \cdot B \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$.

Wäre $A^{-1} \cdot e_1 \in I_-$, so wäre $-A^{-1}e_1 \in I_+$. Dann würde folgen

$$I_+ \ni A(-A^{-1}e_1) = -AA^{-1}e_1 = -e_1 \in I_-,$$

Widerspruch. Somit ist $A^{-1} \cdot e_1 \in I_+$ und daher $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ nach Kriterium (ii) aus Satz 4.1.18. Nun gilt $A(I_+) \subset I_+$ sowieso. Da $A^{-1} \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$, gilt aber auch

$$I_+ = A \underbrace{A^{-1}(I_+)}_{\subset I_+} \subset A(I_+).$$

Also gilt $A(I_+) = I_+$. Schließlich ist

$$A(I_-) = A(-I_+) = -A(I_+) = -I_+ = I_-. \quad \square$$

Beispiel 4.1.21 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(3) - \mathcal{L}^\uparrow(3)$,

$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & B \\ 0 & & \end{array} \right) \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ für alle $B \in \text{O}(2)$, alle Lorentz-Boosts sind zeitorientierungserhaltend.

Korollar 4.1.22 Sind $x \in I_+$ und $y \in J_+$, $y \neq 0$, so gilt $\langle\langle x, y \rangle\rangle < 0$.

Beweis. Für $A \in \mathcal{L}(3)$ mit $Ax = c \cdot e_1$, $c > 0$ gilt $A^{-1}e_1 = \frac{1}{c}x \in I_+$. Also ist $A^{-1} \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ und damit auch $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$. Dann ist auch $\tilde{y} := Ay \in J_+ \setminus \{0\}$, d. h. $\tilde{y}_1 > 0$, und wir sehen

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle = \langle\langle ce_1, \tilde{y} \rangle\rangle = -c\tilde{y}_1 < 0. \quad \square$$

Korollar 4.1.23 Ist $x \in \mathbb{R}^3$ zeitartig und gilt für $y \in \mathbb{R}^3$, dass $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$, so ist y raumartig.

Beweis. Wäre y nicht raumartig, so wäre y kausal, d. h. zeit- oder lichtartig. Indem wir x bzw. y notfalls durch $-x$ bzw. $-y$ ersetzen, können wir o. B. d. A. annehmen, dass x und y zukunftsgerichtet sind. Dann aber folgt aus Korollar 4.1.22 $\langle\langle x, y \rangle\rangle < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\langle\langle x, y \rangle\rangle = 0$. \square

4.2 Hyperbolische Trigonometrie

Definition 4.2.1 Die Menge

$$H^2 := \{x \in I_+ \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1, x_1 > 0\}$$

heißt *hyperbolische Ebene*.

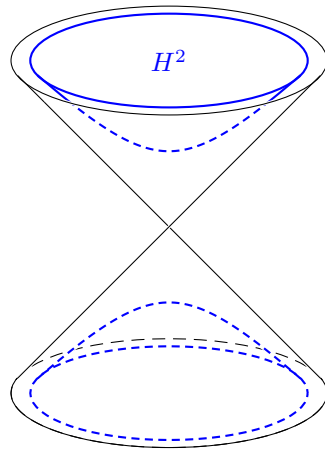


Abb. 188

Bemerkung 4.2.2 Nach der inversen Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für $x, y \in H^2$:

$$|\langle\langle x, y \rangle\rangle| \geq \sqrt{|\langle\langle x, x \rangle\rangle|} \cdot \sqrt{|\langle\langle y, y \rangle\rangle|} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Mit dem Korollar 4.1.22 ist also $\langle\langle x, y \rangle\rangle \leq -1$ für alle $x, y \in I_+$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind, d.h. $y = t \cdot x$. Wegen

$$-1 = \langle\langle y, y \rangle\rangle = \langle\langle tx, tx \rangle\rangle = t^2 \langle\langle x, x \rangle\rangle = -t^2$$

ist $t = \pm 1$. Da sowohl x als auch y zukunftsgerichtet sind, muss $t = +1$ gelten. Wir haben für $x, y \in H^2$ gesehen:

$$|\langle\langle x, y \rangle\rangle| = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Wir beobachten ferner, dass \cosh die Menge $[0, \infty)$ bijektiv auf $[1, \infty)$ abbildet, denn $\cosh(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \cosh(t) = \infty$ und wegen $\cosh'(t) = \sinh(t) > 0$ für $t \in (0, \infty)$ ist \cosh streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Daher können wir folgende Definition machen:

Definition 4.2.3 Für $x, y \in H^2$ sei der *hyperbolische Abstand* definiert als die eindeutige Zahl $d_H(x, y) \in [0, \infty)$ mit

$$\cosh(d_H(x, y)) = |\langle x, y \rangle| = -\langle x, y \rangle$$

Lemma 4.2.4 Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathbb{J}(x \times y) = -(\mathbb{J}x) \times (\mathbb{J}y).$$

Beweis. Wir rechnen einfach nach:

$$\begin{aligned} (\mathbb{J}x) \times (\mathbb{J}y) &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_3y_1 + x_1y_3 \\ -x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= -\mathbb{J} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= -\mathbb{J}(x \times y). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.2.5 Für alle $x, y \in H^2$ gilt

$$\sinh(d_H(x, y))^2 = \langle x \times y, x \times y \rangle.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x \times y \rangle &= \langle x \times y, \mathbb{J}(x \times y) \rangle \\ &= -\langle x \times y, (\mathbb{J}x) \times (\mathbb{J}y) \rangle \\ &= -\det \begin{pmatrix} \langle x, \mathbb{J}x \rangle & \langle x, \mathbb{J}y \rangle \\ \langle y, \mathbb{J}x \rangle & \langle y, \mathbb{J}y \rangle \end{pmatrix} \\ &= -\underbrace{\langle x, x \rangle}_{=-1} \underbrace{\langle y, y \rangle}_{=-1} + \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle \\ &= -1 + \cosh^2(d_H(x, y)) \\ &= \sinh^2(d_H(x, y)). \end{aligned}$$

□

Satz 4.2.6 Die hyperbolische Ebene H^2 bildet zusammen mit d_H einen metrischen Raum, d.h. für alle $x, y \in H^2$ gilt:

$$(i) \quad d_H(x, y) \geq 0 \text{ und} \\ d_H(x, y) = 0 \iff x = y.$$

- (ii) $d_H(x, y) = d_H(y, x)$
 (iii) $d_H(x, z) \leq d_H(x, y) + d_H(y, z)$.

Beweis.

- (i) $d_H(x, y) \geq 0$ ist klar nach Definition von d_H .

$$\begin{aligned} d_H(x, y) = 0 &\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| = \cosh(d_H(x, y)) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

- (ii) ist klar wegen $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(iii)

$$\begin{aligned} &\cosh(d_H(x, y) + d_H(y, z)) \\ &= \cosh(d_H(x, y)) \cdot \cosh(d_H(y, z)) + \sinh(d_H(x, y)) \cdot \sinh(d_H(y, z)) \\ &= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + \sqrt{|\langle x \times y, x \times y \rangle|} \cdot \sqrt{|\langle y \times z, y \times z \rangle|}. \end{aligned}$$

Nun ist $0 = \langle y, x \times y \rangle = \langle \mathbb{J}y, x \times y \rangle$. Mit y ist auch $\mathbb{J}y$ zeitartig, denn \mathbb{J} ist eine Lorentz-Transformation. Also steht $x \times y$ Lorentz-senkrecht auf dem zeitartigen Vektor $\mathbb{J}y$. Genauso steht auch $y \times z$ Lorentz-senkrecht auf $\mathbb{J}y$. Wir können also Satz 4.1.17 anwenden und erhalten

$$|\langle x \times y, y \times z \rangle| \leq \sqrt{|\langle x \times y, x \times y \rangle|} \cdot \sqrt{|\langle y \times z, y \times z \rangle|}.$$

Es folgt

$$\cosh(d_H(x, y) + d_H(y, z)) \geq \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + |\langle x \times y, y \times z \rangle| \quad (4.1)$$

$$\geq \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + \langle x \times y, y \times z \rangle \quad (4.2)$$

$$= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle x \times y, (\mathbb{J}y) \times (\mathbb{J}z) \rangle$$

$$= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \det \begin{pmatrix} \langle x, \mathbb{J}y \rangle & \langle x, \mathbb{J}z \rangle \\ \langle y, \mathbb{J}y \rangle & \langle y, \mathbb{J}z \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + \langle y, y \rangle \langle x, z \rangle$$

$$= -\langle x, z \rangle$$

$$= \cosh(d_H(x, z)).$$

Da \cosh streng monoton wächst auf $[0, \infty)$, folgt

$$d_H(x, y) + d_H(y, z) \geq d_H(x, z). \quad \square$$

Bemerkung 4.2.7 Gilt $d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$, so muss in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (4.1) für $x \times y$ und $y \times z$ Gleichheit gelten. Also müssen $x \times y$ und $y \times z$ linear abhängig sein und somit x, y und z in einem 2-dimensionalen Untervektorraum liegen.

Ferner muss in (4.2) Gleichheit gelten, d. h. $\langle x \times y, y \times z \rangle \geq 0$ oder, anders ausgedrückt, $\langle y, y \rangle \langle x, z \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle \geq 0$. Wegen $\langle y, y \rangle = -1$ ist dies gleichbedeutend mit $\langle x, z \rangle + \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle \leq 0$. Diese Bedingung werden wir in Bemerkung 4.2.21 noch geometrisch interpretieren.

Zusammengefasst sehen wir, dass $d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$ genau dann gilt, wenn x, y und z in einem 2-dimensionalen Untervektorraum liegen und $\langle\langle x, z \rangle\rangle + \langle\langle x, y \rangle\rangle \langle\langle y, z \rangle\rangle \leq 0$.

Bemerkung 4.2.8 Wir können leicht überprüfen, dass (H^2, d_H) nicht nur ein anderes Modell der sphärischen Geometrie darstellt, denn d_H kann beliebig groß werden: Setze z.B.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} \cosh(4) \\ \sinh(4) \\ 0 \end{pmatrix} \in H^2 \Rightarrow d_H(x, y) = 4;$$

aber $d_S(a, b) \leq \pi < 4$ für alle $a, b \in S^2$.

Die Frage, ob (H^2, d_H) ein Modell der euklidischen Geometrie darstellt, ist nicht so einfach zu beantworten. Wir verschieben dies auf das Ende dieses Abschnitts, Satz 4.2.32.

Definition 4.2.9 Eine Abbildung $\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ heißt *hyperbolische Isometrie*, falls für alle $x, y \in H^2$ gilt:

$$d_H(\varphi(x), \varphi(y)) = d_H(x, y).$$

(Vgl. Definition 2.1.7)

Beispiel 4.2.10 Sei $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$. Mit $x \in H^2$ ist dann auch $Ax \in H^2$, denn $\langle\langle Ax, Ax \rangle\rangle = \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1$ und Ax ist ebenfalls zukunftsgerichtet. Für $\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ mit $\varphi(x) = A \cdot x$ und $x, y \in H^2$ gilt dann

$$\begin{aligned} \cosh(d_H(\varphi(x), \varphi(y))) &= -\langle\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle x, y \rangle\rangle \\ &= \cosh(d_H(x, y)) \end{aligned}$$

und somit $d_H(\varphi(x), \varphi(y)) = d_H(x, y)$. Also ist $\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ eine hyperbolische Isometrie.

Bemerkung 4.2.11 Man kann zeigen, dass alle hyperbolischen Isometrien von diesem Typ sind. Der Beweis verläuft analog zum sphärischen Fall, Satz 2.1.13.

Bemerkung 4.2.12 Zu $x, y \in H^2$ gibt es ein $A \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ mit $Ax = y$, denn wegen $\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle y, y \rangle\rangle = -1$ gibt es nach Satz 4.1.15 ein $A \in \mathcal{L}(3)$ mit $Ax = y$. Wäre $A \notin \mathcal{L}^\uparrow(3)$, so könnten x und y nicht beide zukunftsgerichtet sein.

Definition 4.2.13 Eine *Großhyperbel* ist eine Teilmenge von H^2 der Form $H^2 \cap E$, wobei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum ist.

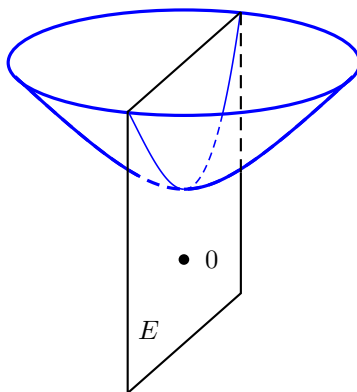


Abb. 189

Definition 4.2.14 Sei $G = H^2 \cap E$ eine Großhyperbel, sei $p \in G$. Dann heißen Vektoren $X \in E$ mit $\langle\langle X, p \rangle\rangle = 0$ *Tangentenvektoren* an G im Punkt p .

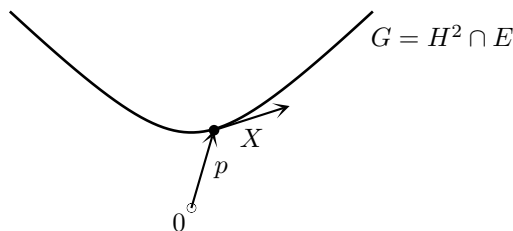


Abb. 190

Bemerkung 4.2.15 Wegen Korollar 4.1.23 sind Tangentenvektoren an H^2 stets raumartig.

Lemma 4.2.16 Sei $G \subset H^2$ eine Großhyperbel, sei $p \in G$ und sei X ein Tangentenvektor an G in p mit $\langle\langle X, X \rangle\rangle = 1$. Dann gilt:

$$G = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

wobei $c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot X$.

Beweis. Schreibe $G = H^2 \cap E$ mit 2-dimensionalem Untervektorraum $E \subset \mathbb{R}^3$. Alle Punkte der Form $c(t)$ liegen einerseits in E , da sie Linearkombinationen von p und X sind. Andererseits liegen sie alle auf H^2 , da

$$\begin{aligned} \langle\langle c(t), c(t) \rangle\rangle &= \langle\langle \cosh(t)p + \sinh(t)X, \cosh(t)p + \sinh(t)X \rangle\rangle \\ &= \cosh(t)^2 \underbrace{\langle\langle p, p \rangle\rangle}_{=-1} + 2 \cosh(t) \sinh(t) \underbrace{\langle\langle p, X \rangle\rangle}_{=0} + \sinh(t)^2 \underbrace{\langle\langle X, X \rangle\rangle}_{=1} \\ &= -\cosh(t)^2 + \sinh(t)^2 = -1. \end{aligned}$$

Außerdem ist $c(0) = p$ zukunftsgerichtet und damit sind alle $c(t)$ zukunftsgerichtet, da es sonst ein $t_0 \in \mathbb{R}$ geben müsste, für das die erste Komponente von $c(t_0)$ verschwindet, im Widerspruch dazu, dass auch $c(t_0)$ zeitartig ist. Wir haben gesehen:

$$\{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset H^2 \cap E = G.$$

Sei nun $y \in H^2 \cap E$. Schreibe $y = a \cdot p + b \cdot X$. Dann ist

$$\begin{aligned} -1 &= \langle y, y \rangle = \langle ap + bX, ap + bX \rangle \\ &= -a^2 + b^2 \end{aligned}$$

und außerdem ist $0 > \langle p, y \rangle = -a$, d.h. $a > 0$. Also liegt der Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf der Hyperbel $a^2 - b^2 = 1$ mit $a > 0$ und kann daher in der Form $a = \cosh(t_0), b = \sinh(t_0)$ geschrieben werden. Somit ist $y = c(t_0)$ und wir haben auch $H^2 \cap E \subset \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ gezeigt. \square

Definition 4.2.17 Ein *Großhyperbelbogen* ist eine Teilmenge von H^2 der Form $\{c(t) \mid t \in [0, L]\}$, wobei $c(t) = \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot X$ mit $p \in H^2, \langle p, X \rangle = 0, \langle X, X \rangle = 1$ und $L > 0$ ist.

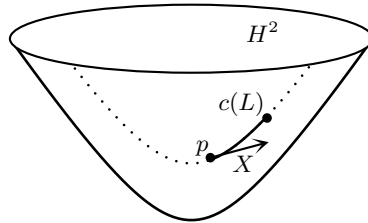


Abb. 191

Dann heißt L die *Länge des Großhyperbelbogens*.

Bemerkung 4.2.18 Wegen $\cosh(d_H(p, c(t))) = -\langle p, \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot X \rangle = -\cosh(t) \cdot \underbrace{\langle p, p \rangle}_{=-1} - \sinh(t) \cdot \underbrace{\langle p, X \rangle}_{=0} = \cosh(t)$ gilt für alle $t \geq 0$:

$$d_H(p, c(t)) = t.$$

Satz 4.2.19 Sind $A, B \in H^2$ und $A \neq B$, dann gibt es genau einen Großhyperbelbogen mit den Endpunkten A und B . Er hat die Länge $d_H(A, B)$.

Beweis. Wegen $A \neq B$ und $A, B \in H^2$ sind A und B linear unabhängig und spannen daher einen eindeutigen 2-dimensionalen Untervektorraum E von \mathbb{R}^2 auf. Also ist $G := H^2 \cap E$ die eindeutige Großhyperbel, die A und B enthält. Das Teilstück, das zwischen A und B liegt, ist der gesuchte Großhyperbelbogen.

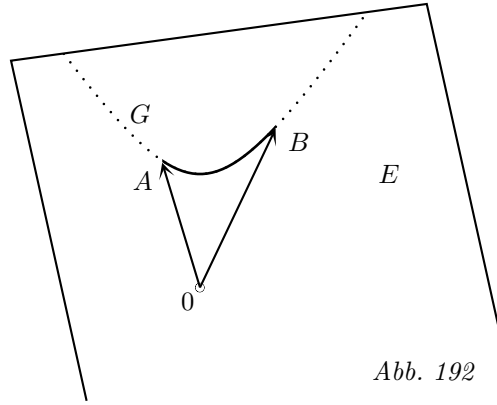


Abb. 192

□

Bemerkung 4.2.20 Beschreibt $c(t)$ den Großhyperbelbogen von A nach B , so lässt sich der Tangentenvektor X nach Bemerkung 4.2.18 aus

$$c(L) = B, L = d_H(A, B)$$

bestimmen.

Setzen wir nun $\mathcal{P} := H^2$, $\mathcal{G} := \{\text{Großhyperbeln}\}$ und $p < G \Leftrightarrow p \in G$, dann sagt uns Satz 4.2.19, dass die Inzidenzaxiome I_1 und I_2 gelten. Axiom I_3 ist klar, da auf jeder Großhyperbel sogar unendlich viele verschiedene Punkte liegen. Axiom I_4 gilt ebenfalls, da je drei Punkte x, y und $z \in H^2$, die als Vektoren im \mathbb{R}^3 linear unabhängig sind, nicht auf einer Großhyperbel liegen.

Um auch die Anordnungsaxiome zu diskutieren, müssen wir festlegen, wann ein Punkt y der hyperbolischen Ebene zwischen zwei anderen Punkten x und z liegt.

In Anbetracht von Axiom A_1 sollten die drei Punkte paarweise verschieden sein und auf einer Großhyperbel G liegen. Schreiben wir dann G in der Form $G = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $c(t) = \cosh(t) \cdot y + \sinh(t) \cdot T$ wie in Lemma 4.2.16, d. h. $\langle\langle y, T \rangle\rangle = 0$ und $\langle\langle T, T \rangle\rangle = 1$, so gibt es eindeutige $t_x, t_z \in \mathbb{R}$ mit $c(t_x) = x$ und $c(t_z) = z$. Außerdem gilt natürlich $c(0) = y$. Wir sagen dann, dass y zwischen x und z liegt, falls 0 zwischen t_x und t_z liegt, d. h. falls entweder $t_x < 0$ und $t_z > 0$ oder umgekehrt. Wir können dies kurz in der Bedingung $t_x t_z < 0$ zusammenfassen.

Bemerkung 4.2.21 In Bemerkung 4.2.7 hatten wir festgestellt, dass für drei Punkte $x, y, z \in H^2$ genau dann $d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$ gilt, wenn x, y und z auf einer Großhyperbel liegen und zusätzlich

$$\langle\langle x, z \rangle\rangle + \langle\langle x, y \rangle\rangle \langle\langle y, z \rangle\rangle \leq 0 \quad (4.3)$$

gilt. Schreiben wir die Großhyperbel in der Form $G = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $c(t) = \cosh(t) \cdot y + \sinh(t) \cdot T$, wobei $\langle\langle y, T \rangle\rangle = 0$ und $\langle\langle T, T \rangle\rangle = 1$, sowie $x = c(t_x)$ und $z = c(t_z)$, so berechnen wir

$$\begin{aligned} & \langle\langle x, z \rangle\rangle + \langle\langle x, y \rangle\rangle \langle\langle y, z \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \cosh(t_x) \cdot y + \sinh(t_x) \cdot T, \cosh(t_z) \cdot y + \sinh(t_z) \cdot T \rangle\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \langle \cosh(t_x) \cdot y + \sinh(t_x) \cdot T, y \rangle \rangle \cdot \langle \langle y, \cosh(t_z) \cdot y + \sinh(t_z) \cdot T \rangle \rangle \\
= & - \cosh(t_x) \cosh(t_z) + \sinh(t_x) \sinh(t_z) + \cosh(t_x) \cosh(t_z) \\
= & \sinh(t_x) \sinh(t_z).
\end{aligned}$$

Daher ist (4.3) äquivalent zu $\sinh(t_x) \sinh(t_z) \leq 0$ und somit zu $t_x \cdot t_z \leq 0$. Zusammengefasst sehen wird, dass $d_H(x, y) + d_H(y, z) = d_H(x, z)$ genau dann gilt, wenn x , y und z auf einer Großhyperbel liegen und y zwischen x und z liegt oder $y = x$ oder $y = z$.

Nun aber zu den Anordnungsaxiomen. Axiome A_1 und A_2 sind nun offensichtlich. Auch Axiom A_3 ist leicht zu sehen. Axiome A_4 und A_5 gelten ebenfalls. Wir könnten dies direkt mit unseren Definitionen nachprüfen, allerdings ist es schlauer, einen Trick zu verwenden, mit dem man es mühelos auf die Gültigkeit der entsprechenden Axiome in der kartesischen Ebene zurückführt.

Dazu betrachten wir die Zentralprojektion $Z : H^2 \rightarrow D$, wobei D die Scheibe $D = \{(1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2^2 + y_3^2 < 1\}$ ist und $Z(x) = \frac{x}{x_1}$.

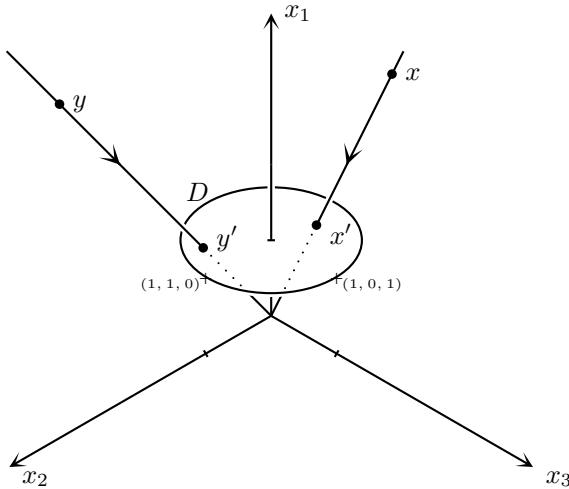


Abb. 193

Z ist bijektiv mit Umkehrabbildung $Z^{-1} : D \rightarrow H^2, Z^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}}$. Die Großhyperbeln in H^2 sind die Durchschnitte von H^2 mit 2-dimensionalen Untervektorräumen E . Mit $x \in E$ ist auch $Z(x) \in E$ und umgekehrt. Also bildet Z die Großhyperbel $H^2 \cap E$ auf $D \cap E$, ein euklidisches Geradensegment, ab.

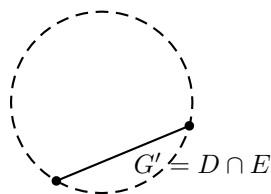


Abb. 194

Wir sehen auch, dass für $x, y, z \in H^2$ der Punkt y genau dann zwischen x und z liegt, wenn $Z(y)$ zwischen $Z(x)$ und $Z(z)$ liegt. Wenn nun von drei Punkten x, y und $z \in H^2$ mehr als einer zwischen den beiden anderen läge, so müsste auch mehr als einer der drei Bildpunkte $Z(x), Z(y)$ und $Z(z) \in D$ zwischen den beiden anderen liegen, im Widerspruch zu Axiom A_4 im kartesischen Modell der euklidischen Geometrie. Ähnlich folgt aus der Gültigkeit von Axiom A_5 für das kartesische Modell die Gültigkeit für die hyperbolische Ebene.

Definition 4.2.22 Seien $G_1 = \{\cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot X \mid 0 \leq t \leq L_1\}$ und $G_2 = \{\cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot Y \mid 0 \leq t \leq L_2\}$ zwei Großhyperbelbögen, die vom Punkt p ausgehen. Dann ist die *Winkelgröße* von G_1 und G_2 in p definiert als die eindeutige Zahl $\sphericalangle(G_1, p, G_2) \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\sphericalangle(G_1, p, G_2)) = \langle\langle X, Y \rangle\rangle$$

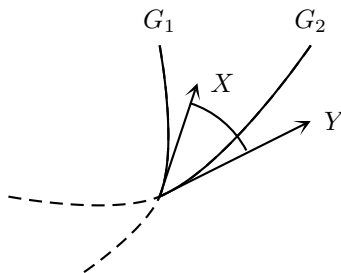


Abb. 195

Bemerkung 4.2.23 Hier ist zu beachten, dass sowohl X als auch Y auf p Lorentzsenkrecht stehen und p ist zeitartig. Also gilt nach Satz 4.1.17 die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle\langle X, Y \rangle\rangle| \leq \sqrt{|\langle\langle X, X \rangle\rangle|} \cdot \sqrt{|\langle\langle Y, Y \rangle\rangle|} = 1.$$

Daher kann $\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ tatsächlich als Kosinus einer Zahl in $[0, \pi]$ geschrieben werden.

Notation. Zu $A, B \in H^2, A \neq B$, schreiben wir für den Großhyperbelbogen mit Eckpunkten A und B auch \overline{AB} .

Definition 4.2.24 Ein *hyperbolisches Dreieck* ist ein Tripel (A, B, C) von Punkten $A, B, C \in H^2$, die linear unabhängig sind. Insbesondere sind diese Punkte paarweise verschieden. A, B , und C heißen *Ecken* des Dreiecks. Die Großhyperbelbögen, die die Ecken verbinden, heißen *Seiten* des Dreiecks. Die *Seitenlängen* sind gegeben durch $a = d_H(B, C)$, $b = d_H(A, C)$ und $c = d_H(A, B)$. Die *Winkelgrößen* des Dreiecks sind gegeben durch $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, A, \overrightarrow{AC})$, $\beta = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, B, \overrightarrow{BC})$ und $\gamma = \sphericalangle(\overrightarrow{CA}, C, \overrightarrow{CB})$.

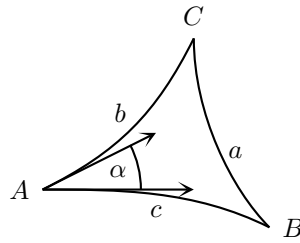


Abb. 196

Die folgenden drei Illustrationen zeigen dasselbe hyperbolische Dreieck aus verschiedenen Perspektiven. Insbesondere sieht man, wie die Seiten, also die entsprechenden Großkreisbögen, durch Schnitt mit den entsprechenden Ebenen durch den Nullpunkt entstehen und woraus sich die beiden Endpunkte der Seite ergeben.

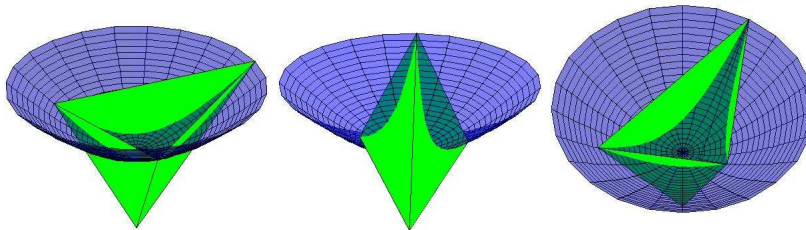


Abb. 197

Die euklidischen Dreiecke, die sich durch Zentralprojektion auf die Scheibe D ergeben, sehen wir hier:

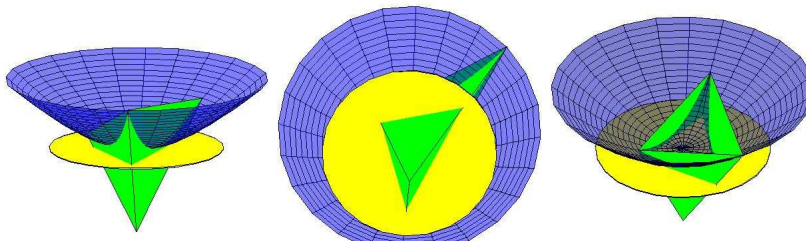


Abb. 198

Wir untersuchen nun die Trigonometrie hyperbolischer Dreiecke. Sei (A, B, C) ein hyperbolisches Dreieck. Wir können eine Lorentz-Transformation $L_1 \in \mathcal{L}^\dagger(3)$ finden, so dass $L_1(A) = e_1$. Durch eine geeignete Drehung L_2 um die e_1 -Achse können wir zusätzlich erreichen, dass $L_2(L_1(B))$ in der e_1 - e_2 -Ebene liegt, d.h. $L_2(L_1(A)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{und } L_2(L_1(B)) = \begin{pmatrix} \cosh(c) \\ \sinh(c) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeitorientierungserhaltende Lorentz-Transformationen $L \in \mathcal{L}^\dagger(3)$ ergeben nach Einschränkung auf H^2 hyperbolische Isometrien und erhalten daher den hyperbolischen Abstand. Sie erhalten aber auch die Winkelgrößen, denn ist der Großhyperbelbogen von A nach B gegeben durch $\{\cosh(t) \cdot A + \sinh(t) \cdot X \mid 0 \leq t \leq c\}$, so ist der Großhyperbelbogen von $L(A)$ nach $L(B)$ gegeben durch $\{\cosh(t) \cdot L(A) + \sinh(t) \cdot L(X) \mid 0 \leq t \leq c\}$ und analog für den Großhyperbelbogen von A nach C . Also gilt für den Winkel α' des hyperbolischen Dreiecks $(L(A), L(B), L(C))$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha') &= \langle\langle L(X), L(Y) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle X, Y \rangle\rangle \\ &= \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen: Durch Anwendung einer geeigneten Lorentz-Transformation auf (A, B, C) erhalten wir ein hyperbolisches Dreieck (A', B', C') mit denselben Seitenlängen und Winkelgrößen wie (A, B, C) . Ferner ist $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B' = \begin{pmatrix} \cosh(c) \\ \sinh(c) \\ 0 \end{pmatrix}$.

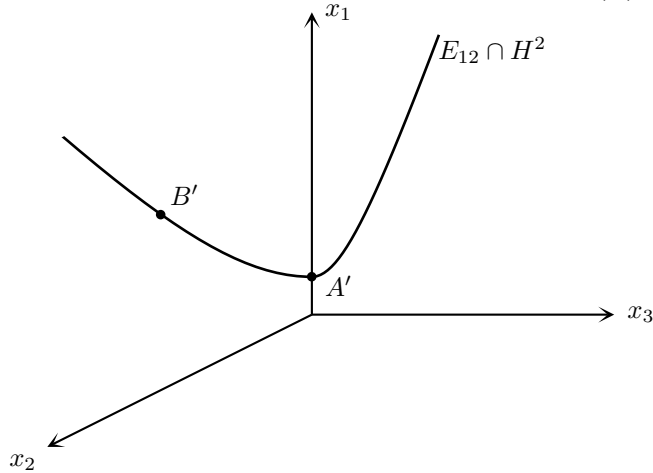


Abb. 199

Wir berechnen C' . Es gilt

$$\begin{aligned} \cosh(b) &= \cosh(d_H(A', C')) \\ &= -\langle\langle A', C' \rangle\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left\langle\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle \\
&= C'_1.
\end{aligned}$$

Wegen $C' \in H^2$ ist

$$\begin{aligned}
-1 &= -(C'_1)^2 + (C'_2)^2 + (C'_3)^2 \\
&= -\cosh(b)^2 + (C'_2)^2 + (C'_3)^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\left\|\begin{pmatrix} C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix}\right\|^2 = -1 + \cosh(b)^2 = \sinh(b)^2.$$

Also können wir ein $\delta \in [-\pi, \pi]$ finden, so dass

$$\begin{pmatrix} C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix} = \sinh(b) \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}.$$

Der Einheitstangentenvektor X an $\overline{A'B'}$ in A' ist gegeben durch $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Y an

$\overline{A'C'}$ in A' durch $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\sphericalangle(\overline{A'B'}, A', \overline{A'C'})) \\
&= \langle\langle X, Y \rangle\rangle \\
&= \cos(\delta).
\end{aligned}$$

Deshalb ist $\delta = \pm\alpha$, d.h.

$$C' = \begin{pmatrix} \cosh(b) \\ \sinh(b) \cdot \cos(\pm\alpha) \\ \sinh(b) \cdot \sin(\pm\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(b) \\ \sinh(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \pm \sinh(b) \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir

$$L := \begin{pmatrix} \cosh(c) & -\sinh(c) & 0 \\ \sinh(c) & -\cosh(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\uparrow(3).$$

Wir berechnen

$$LA' = \begin{pmatrix} \cosh(c) \\ \sinh(c) \\ 0 \end{pmatrix} = B'$$

und

$$\begin{aligned}
LB' &= \begin{pmatrix} \cosh(c) & -\sinh(c) & 0 \\ \sinh(c) & -\cosh(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(c) \\ \sinh(c) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh(c)^2 - \sinh(c)^2 \\ \sinh(c) \cosh(c) - \cosh(c) \sinh(c) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A'.
\end{aligned}$$

Die Lorentz-Transformation L vertauscht somit die Punkte A' und B' . Wir erhalten ein neues hyperbolisches Dreieck:

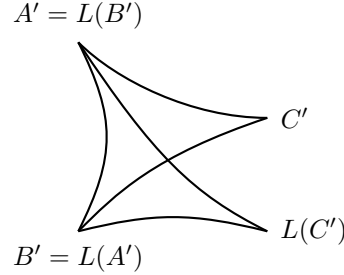


Abb. 200

Die Berechnung von C' , angewandt auf dieses neue Dreieck, liefert dann

$$LC' = \begin{pmatrix} \cosh(a) \\ \sinh(a) \cdot \cos(\beta) \\ \pm \sinh(a) \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} LC' &= \begin{pmatrix} \cosh(c) & -\sinh(c) & 0 \\ \sinh(c) & -\cosh(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(b) \\ \sinh(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \pm \sinh(b) \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(c) \cosh(b) - \sinh(c) \sinh(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \sinh(c) \cosh(b) - \cosh(c) \sinh(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \pm \sinh(b) \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir vergleichen und erhalten

$$\cosh(a) = \cosh(c) \cdot \cosh(b) - \sinh(c) \cdot \sinh(b) \cdot \cos(\alpha), \quad (4.4)$$

$$\sinh(a) \cdot \cos(\beta) = \sinh(c) \cdot \cosh(b) - \cosh(c) \cdot \sinh(b) \cdot \cos(\alpha), \quad (4.5)$$

$$\pm \sinh(a) \cdot \sin(\beta) = \pm \sinh(b) \cdot \sin(\alpha). \quad (4.6)$$

Wir haben bewiesen

Satz 4.2.25 (Seitenkosinussatz der hyperbolischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines hyperbolischen Dreiecks gilt:

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha),$$

$$\cosh(b) = \cosh(a) \cdot \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta),$$

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma).$$

□

Aus (4.6) folgt, dass $\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)}$ und $\frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)}$ bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Da jedoch beide Terme positiv sind, folgt direkt der

Satz 4.2.26 (Sinussatz der hyperbolischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines hyperbolischen Dreiecks gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)}. \quad \square$$

Wenn wir in (4.5) die Rollen von B' und C' vertauschen, erhalten wir

$$\sinh(a) \cos(\gamma) = \sinh(b) \cosh(c) - \cosh(b) \sinh(c) \cdot \cos(\alpha). \quad (4.7)$$

Gleichung (4.5) multipliziert mit $\cos(\alpha)$ sowie der Sinussatz liefern

$$\begin{aligned} \sinh(a) \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \sinh(c) \cosh(b) \cos(\alpha) - \cosh(c) \sinh(b) \cos(\alpha)^2 \\ &\stackrel{(4.7)}{=} \sinh(b) \cosh(c) - \sinh(a) \cos(\gamma) \\ &\quad - \cosh(c) \sinh(b) \cos(\alpha)^2 \\ &= \sinh(b) \cosh(c) (1 - \cos(\alpha)^2) - \sinh(a) \cos(\gamma) \\ &= \sinh(b) \cosh(c) \sin(\alpha)^2 - \sinh(a) \cos(\gamma) \\ &\stackrel{\text{Sinussatz}}{=} \sinh(a) \cosh(c) \sin(\beta) \sin(\alpha) - \sinh(a) \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \cosh(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma).$$

Wir haben gezeigt:

Satz 4.2.27 (Winkelkosinussatz der hyperbolischen Geometrie) Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkelgrößen α, β, γ eines hyperbolischen Dreiecks gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cosh(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma), \\ \cos(\beta) &= \cosh(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma), \\ \cos(\gamma) &= \cosh(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta). \end{aligned}$$

□

Satz 4.2.28 (Höhenformel der hyperbolischen Geometrie) Analog zum euklidischen Fall definiert man die Höhen eines sphärischen Dreiecks als Großhyperbeln, die durch eine Ecke verlaufen und die gegenüberliegende Seite senkrecht schneiden.

Bezeichnen wir nun mit h_C den sphärischen Abstand von C und dem Schnittpunkt der Höhe durch C mit \overline{AB} und vergeben analog die Bezeichnungen h_A und h_B , so gilt:

$$\begin{aligned} \sinh(h_C) &= \sinh(b) \cdot \sin(\alpha) = \sinh(a) \cdot \sin(\beta), \\ \sinh(h_B) &= \sinh(a) \cdot \sin(\gamma) = \sinh(c) \cdot \sin(\alpha), \\ \sinh(h_A) &= \sinh(c) \cdot \sin(\beta) = \sinh(b) \cdot \sin(\gamma). \end{aligned}$$

Der Beweis verläuft wieder analog zu dem der anderen Höhenformeln, siehe Satz 1.3.13.

Korollar 4.2.29 (Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck) Für die Winkelgrößen eines hyperbolischen Dreiecks gilt

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Beweis. Sei o. B. d. A. $\alpha \geq \beta$. Nach dem Winkelkosinussatz gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \underbrace{\cosh(a) \sin(\beta) \sin(\gamma)}_{>1} - \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ &> \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ &= -\cos(\beta + \gamma) \\ &= \cos(\pi - (\beta + \gamma)) \\ &= \cos(|\pi - (\beta + \gamma)|). \end{aligned}$$

Nun liegen α und $|\pi - (\beta + \gamma)|$ beide im Intervall $[0, \pi)$, auf dem der Kosinus streng monoton fällt. Also folgt

$$\alpha < |\pi - (\beta + \gamma)|.$$

Wäre nun $\pi - (\beta + \gamma) < 0$, so würde folgen

$$\alpha < |\pi - (\beta + \gamma)| = -\pi + \underbrace{\beta}_{\leq \alpha} + \underbrace{\gamma}_{< \pi} < -\pi + \alpha + \pi = \alpha,$$

Widerspruch. Also ist $\pi - (\beta + \gamma) \geq 0$ und wir erhalten

$$\alpha < \pi - (\beta + \gamma),$$

d.h.

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi. \quad \square$$

Zur Axiomatik. Wir definieren zwei Strecken \overline{pq} und $\overline{p'q'}$ als kongruent, falls $d_H(p, q) = d_H(p', q')$. Zwei Winkel werden als kongruent definiert, wenn die entsprechenden Winkelgrößen übereinstimmen:

$$\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r') : \Leftrightarrow \sphericalangle(\overline{qp}, q, \overline{qr}) = \sphericalangle(\overline{q'p'}, q', \overline{q'r'}).$$

Wir weisen die Kongruenzaxiome K_1 bis K_6 nach. Leider ist die Zentralprojektion hier keine Hilfe, da hyperbolische Abstände und Winkel nicht mit den entsprechenden euklidischen Abständen und Winkeln der projizierten Punkte übereinstimmen (vgl. Beispiel 4.4.2 und Seite 210). Das kann man schon daran sehen, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte auf H^2 beliebig groß sein kann, während der euklidische Abstand zweier Punkte in D dagegen kleiner als 2 sein muss.

Zu Axiom K_1 . Seien p, q, p' und $r' \in H^2$, $p \neq q$ und $p' \neq r'$. Sei L die Großhyperbel, die p' und r' enthält. Wir schreiben $L = \{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $c(t) = \cosh(t) \cdot p' + \sinh(t) \cdot X$, wobei X ein Tangentenvektor an H^2 im Punkt p' mit $\langle\langle X, X \rangle\rangle = 1$ ist. Es gilt dann $r' = c(\pm d_H(p', r'))$. Indem wir notfalls X durch $-X$ ersetzen, können wir erreichen, dass $r' = c(d_H(p', r'))$. Setze nun $q' := c(d_H(p, q))$. Dann liegt q' auf L , und zwar auf derselben Seite von p' wie r' ; und nach Bemerkung 4.2.18 gilt $d_H(p', q') = d_H(p, q)$. Also sind die Strecken \overline{pq} und $\overline{p'q'}$ kongruent.

Axiom K_2 ist klar.

Axiom K_3 ergibt sich aus folgender Beobachtung: Ist L eine Großhyperbel und sind p, q und r drei paarweise verschiedene Punkte auf L , so dass die Strecken \overline{pq} und \overline{qr} keine gemeinsamen (inneren) Punkte haben, so liegt q zwischen p und r . Dann gilt nach Bemerkung 4.2.21, dass $d_H(p, r) = d_H(p, q) + d_H(q, r)$.

Axiom K_4 ist klar.

Axiom K_5 lassen wir als Übungsaufgabe.

Zu Axiom K_6 . Seien (p, q, r) und (p', q', r') zwei Tripel von Punkten in H^2 , die jeweils nicht auf einer Großhyperbel liegen. Es gelte $\overline{pq} \equiv \overline{p'q'}$, $\overline{pr} \equiv \overline{p'r'}$ und $\angle(q, p, r) \equiv \angle(q', p', r')$. Dies bedeutet $d_H(p, q) = d_H(p', q')$, $d_H(p, r) = d_H(p', r')$ und $\sphericalangle(\overline{qp}, p, \overline{rp}) = \sphericalangle(\overline{q'p'}, p', \overline{r'p'})$. Aus dem Seitenkosinussatz der hyperbolischen Geometrie folgt nun $\overline{qr} \equiv \overline{q'r'}$ und dann aus dem Sinussatz der hyperbolischen Geometrie $\sphericalangle(\overline{pq}, q, \overline{rq}) = \sphericalangle(\overline{p'q'}, q', \overline{r'q'})$. Also gilt $\angle(p, q, r) \equiv \angle(p', q', r')$.

Das Parallelenaxiom P diskutieren wir wieder mit der Zentralprojektion. Zu Geraden-segment L in D und $p \in D, p \notin L$, gibt es unendlich viele Geraden-segmente L' in D mit $p \in L'$ und $L \cap L' = \emptyset$. Axiom P gilt also nicht!

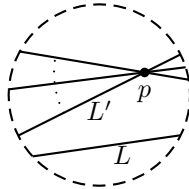


Abb. 201

Damit erfüllt die hyperbolische Geometrie alle Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome der euklidischen Geometrie, nicht jedoch das Parallelenaxiom. Insbesondere lässt sich das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie herleiten! Alle Versuche, eine derartige Herleitung zu finden, waren somit zum Scheitern verurteilt.

(Axiom V_1 ist ebenfalls erfüllt, da man nur

$$n > \frac{d_H(p, q)}{d_H(r, s)}$$

wählen muss; und die Gültigkeit eines modifizierten Axioms V_2 , bei dem man lediglich die Forderung des Parallelenaxioms auslässt, zeigt man wie im kartesischen Fall. Somit lässt sich nicht einmal argumentieren, man könne mit V_1 und V_2 die Gültigkeit des Parallelenaxioms herleiten.)

Nun, da wir wissen, was die hyperbolische von der euklidischen Geometrie unterscheidet, wollen wir zeigen, dass (H^2, d_H) tatsächlich kein Modell der euklidischen Geometrie ist. Gemäß der Definition auf Seite 14 wissen wir dies schon; für die allgemeinere Definition in Bemerkung 2.1.16 müssen wir es noch beweisen.

Die Idee dabei ist, zu zeigen, dass die Gültigkeit des Parallelenaxioms bei einer Isometrie erhalten bleibt.

In Vorbereitung darauf müssen wir Geraden ausschließlich mithilfe der Metrik charakterisieren.

Lemma 4.2.30 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$. Dann sind äquivalent:

1. G ist eine Gerade;

2. G ist eine maximale Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit der Eigenschaft, dass für alle $p_1, p_2, p_3 \in G$ nach eventueller Umnummerierung gilt:

$$d_E(p_1, p_3) = d_E(p_1, p_2) + d_E(p_2, p_3). \quad (4.8)$$

Beweis.

- „1 \Rightarrow 2“: Sei G eine Gerade. Nummeriere so, dass p_2 zwischen p_1 und p_3 liegt:

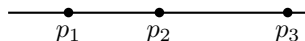


Abb. 202

Dann gilt (4.8).

Hinzunahme eines weiteren Punktes zu G zerstört die Eigenschaft (4.8):

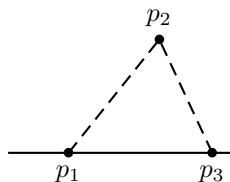


Abb. 203

Also ist G maximal.

- „2 \Rightarrow 1“: Sei G maximale Teilmenge, die (4.8) erfüllt.
 G hat mehr als ein Element p , da jede Gerade durch p Bedingung (4.8) erfüllt und somit $\{p\}$ nicht maximal wäre (und \emptyset erst recht nicht).
 Wähle nun $p, q \in G$, $p \neq q$. Sei G' die eindeutig bestimmte Gerade mit $p, q \in G'$.
 Gäbe es ein $r \notin G'$, $r \in G$, so gälte laut Abbildung 203 die Eigenschaft (4.8) nicht; somit ist $G \subset G'$. Da G aber maximal mit der Eigenschaft (4.8) ist und ganz G' diese Eigenschaft besitzt, muss $G = G'$ sein, also ist G eine Gerade. \square

Analog zeigt man das

Lemma 4.2.31 Sei $G \subset H^2$. Dann sind äquivalent:

1. G ist eine Großhyperbel;
2. G ist eine maximale Teilmenge von H^2 mit der Eigenschaft, dass für alle $p_1, p_2, p_3 \in G$ nach eventueller Umnummerierung gilt:

$$d_H(p_1, p_3) = d_H(p_1, p_2) + d_H(p_2, p_3). \quad (4.9)$$

Nun können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2.32 (\mathbb{R}^2, d_E) und (H^2, d_H) sind zueinander nicht isometrisch.

Beweis. Angenommen, sie wären isometrisch. Sei dann $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow H^2$ eine Isometrie.

Für jede Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^2$, die (4.8) erfüllt, erfüllt $f(G) \subset H^2$ die Bedingung (4.9), denn $d_E(x, y) = d_H(f(x), f(y))$ ist ja gerade das, was eine Isometrie ausmacht; und wenn $f(G)$ nicht maximal wäre, also mit $p \in H^2, p \notin f(G)$ auch $f(G) \cup \{p\}$ die Eigenschaft (4.9) erfüllte, dann müsste $G \cup \{f^{-1}(p)\}$ auch (4.8) erfüllen, was nicht geht, da G maximal in \mathbb{R}^2 sein soll.

Mit anderen Worten, f bildet Geraden auf Großhyperbeln ab. Analog bildet f^{-1} Großhyperbeln auf Geraden ab.

Wir wissen: (\mathbb{R}^2, d_E) erfüllt das Parallelenaxiom, d.h. zu jeder Geraden $G \subset \mathbb{R}^2$ und jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^2, p \notin G$ gibt es genau eine Gerade G' mit $p \in G'$, die G nicht schneidet.

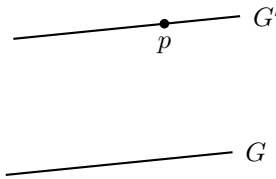


Abb. 204

In H^2 können wir jedoch zu jeder Großhyperbel $G \subset H^2$ und jedem Punkt $p \in H^2, p \notin G$ unendlich viele verschiedene Geraden finden, die p enthalten, aber G nicht schneiden.

Diese haben bezüglich f auch verschiedene Urbilder, die aufgrund der Bijektivität von f sämtlich G nicht schneiden, und dies widerspricht dem Parallelenaxiom. \square

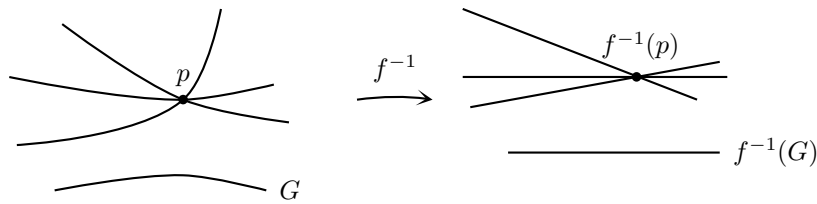


Abb. 205

4.3 Hyperbolischer Flächeninhalt

In diesem Abschnitt bezeichnen wir vernünftigerweise mit $\mathcal{H}^m(A)$ immer das Hausdorff-Maß, welches die hyperbolische Metrik verwendet. Entgegen dem sphärischen Fall ist dieses nicht mit dem euklidischen Hausdorff-Maß identisch. Des Weiteren sei nun die e_3 -Achse die ausgezeichnete, d.h. $e_3 \in H^2$.

Satz 4.3.1 Sei $c : [0, L] \rightarrow H^2$ eine stückweise glatte einfach geschlossene Kurve, die das Gebiet $\Omega \subset H^2$ berandet (vgl. Definition 2.4.25). Sei $e_3 \notin \bar{\Omega}$. Dann gilt mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}:$$

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \left| \int_0^L z(t) \frac{x(t)y'(t) - \dot{x}(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt \right|.$$

Dieser Satz bleibt an dieser Stelle unbewiesen. Erstaunlicherweise stimmt diese Formel mit derjenigen für den sphärischen Flächeninhalt überein.

Beispiel 4.3.2 Wir wollen den Flächeninhalt einer Hyperbelkappe berechnen.

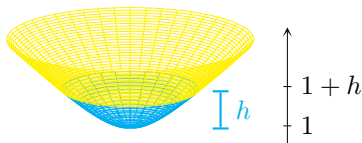


Abb. 206

Hierbei ist allerdings Vorsicht geboten, denn e_3 liegt in Ω . Die Lösung ist, nur die halbe Hyperbelkappe Ω' ausmessen zu wollen.

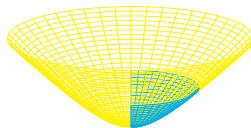


Abb. 207

Die Randkurve besteht nun aus zwei Teilen: c_1 , wo $z =: \cosh(\psi_0)$ konstant ist, und c_2 , wo $x \equiv 0$ ist. Aber da ist ja immer noch e_3 enthalten, zwar nicht im Inneren von Ω' , doch immerhin auf dem Rand! Hier hilft uns die bewährte Epsilontik weiter: Wir schneiden eine kleine Kappe (der Höhe $1 + \varepsilon$ heraus) und erhalten so ein drittes Randkurvenstück c_3 , wo $z = 1 + \varepsilon$ ist.

Hierbei stellen wir allerdings fest, dass das Kurvenstück c_2 überhaupt nichts zum Integral beiträgt; es sind also lediglich c_1 und c_3 zu parametrisieren. Beginnen wir mit

c_1 :

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} \sinh(\psi_0) \cdot \cos(t) \\ \sinh(\psi_0) \cdot \sin(t) \\ \cosh(\psi_0) \end{pmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nun können wir rechnen:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cosh(\psi_0) \cdot \frac{\sinh^2(\psi_0) (\cos^2(t) + \sin^2(t))}{\sinh^2(\psi_0) (\cos^2(t) + \sin^2(t))} dt &= \cosh(\psi_0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \\ &= z \cdot \pi. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für c_3 (mit ψ_1 so, dass $\cosh(\psi_1) = 1 + \varepsilon$):

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \varepsilon) \cdot \frac{\sinh^2(\psi_1) (\cos^2(t) + \sin^2(t))}{\sinh^2(\psi_1) (\cos^2(t) + \sin^2(t))} dt = (1 + \varepsilon)\pi.$$

Damit ergibt sich für die Halbkappe ohne die ε -Kappe das Hausdorff-Maß $(z - (1 + \varepsilon))\pi = (h - \varepsilon)\pi$. Der Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ liefert

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}') = h\pi$$

und somit

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = 2\pi h.$$

Ähnlich wie im sphärischen Fall zeigt man den

Satz 4.3.3 Sei $\Omega \subset H^2$ das von einem nicht entarteten hyperbolischen Dreieck mit den Winkeln α, β, γ berandete Gebiet. Dann ist

$$\mathcal{H}^2(\bar{\Omega}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Bemerkung 4.3.4 Insbesondere ist $\mathcal{H}^2(\bar{\Omega})$ nach oben durch π beschränkt, obschon die Seiten des Dreiecks beliebig lang werden können. Für Dreiecke haben wir in unseren drei Standardgeometrien die folgenden Beschränkungen:

Geometrie	Metrik	Seitenlängen	Flächeninhalt
euklidisch	d_E	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
sphärisch	d_S	$(0, \pi)$	$(0, 2\pi)$
hyperbolisch	d_H	$(0, \infty)$	$(0, \pi)$

4.4 Modelle der hyperbolischen Geometrie

In Abschnitt 4.2 haben wir zunächst einmal ein Modell der hyperbolischen Geometrie kennengelernt: das sogenannte Hyperboloidmodell.

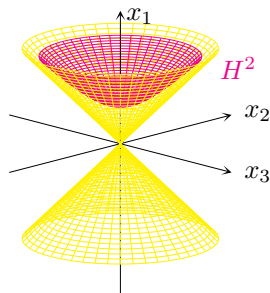


Abb. 208

Eigentlich kennen wir auch noch ein zweites Modell, nämlich das, welches durch die Zentralprojektion auf die Kreisscheibe entsteht (vgl. S. 195). Aber ist das wirklich ein Modell gemäß Bemerkung 2.1.16? Dazu fehlt uns noch eine Metrik (die euklidische kann's ja nicht sein, da hyperbolische Abstände beliebig groß werden); und haben wir die Metrik, so fehlt uns immer noch die zugehörige Isometrie.

Aber für die Isometrie haben wir immerhin einen Verdächtigen – eben die Zentralprojektion, und die hilft uns, auch eine Metrik auf D zu finden.

Bemerkung 4.4.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum, Y eine Menge, $f : X \rightarrow Y$ bijektiv.

Dann existiert genau eine Metrik d_Y auf Y , so dass f eine Isometrie ist, nämlich

$$d_Y(y, y') = d_X(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) \quad \forall y, y' \in Y.$$

Beispiel 4.4.2 Wir wollen nun also die Metrik in dem uns bereits bekannten Scheibenmodell bestimmen. Dazu betrachten wir den metrischen Raum $(X, d) = (H^2, d_H)$, die Menge $Y = D$ und die bijektive Abbildung

$$f(x) = Z(x) = \frac{x}{x_1}.$$

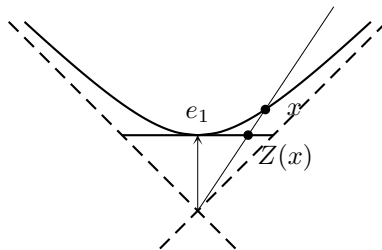


Abb. 209

Die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Nun wird diese Abbildung zu einer Isometrie, wenn wir für die Kreisscheibe die Metrik

$$\begin{aligned} d_D \left(\begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \right) &:= d_H \left(\frac{1}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1 - y'^2_2 - y'^2_3}} \begin{pmatrix} 1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{Acosh} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2} \sqrt{1 - y'^2_2 - y'^2_3}} \cdot \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle \right) \\ &= \operatorname{Acosh} \left(\frac{1 - y_2 y'_2 - y_3 y'_3}{\sqrt{1 - y_2^2 - y_3^2} \sqrt{1 - y'^2_2 - y'^2_3}} \right) \end{aligned}$$

definieren.

Wenn wir in der Darstellung der Kreisscheibe die erste Koordinate weglassen, da diese sowieso immer 1 ist, und die Koordinaten dann zweckmäßigerweise nicht y_2, y_3 , sondern y_1, y_2 nennen, so können wir auch die Metrik kompakter schreiben und erhalten einen metrischen Raum

$$(K\ell, d_{K\ell}) \text{ mit } K\ell = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| < 1\} \text{ und } d_{K\ell}(y, y') = \operatorname{Acosh} \left(\frac{1 - \langle y, y' \rangle}{\sqrt{1 - \|y\|^2} \sqrt{1 - \|y'\|^2}} \right),$$

der isometrisch zu (H, d_H) ist.

Nach Felix Klein (1849–1925) heißt $(K\ell, d_{K\ell})$ *Klein'sches Modell der hyperbolischen Geometrie*. Es wird auch *projektives Scheibenmodell* oder *Beltrami-Klein-Modell* genannt.

Dieses Modell haben wir auf Seite 203 genutzt, um die Ungültigkeit des Parallelenaxioms in der hyperbolischen Geometrie zu zeigen (ohne es konkret zu benennen). Leider sind die Isometrien in $(K\ell, d_{K\ell})$ sehr kompliziert zu beschreiben, weshalb wir z.B. die trigonometrischen Lehrsätze für die hyperbolische Geometrie im Hyperboloidmodell hergeleitet haben. Dieses hat den Vorteil, dass sich die Isometrien leicht beschreiben und die hyperbolischen Längen und Winkel einfach bestimmen lassen; die genaue Vorstellung der Großhyperbeln ist jedoch beim Laien nicht immer klar, weshalb wir zur Begründung der Ungültigkeit des Parallelenaxioms in der hyperbolischen Geometrie wiederum das Klein'sche Modell herangezogen haben. Dieses bietet nämlich den Vorteil, dass die Großhyperbeln einfach die Form von Geradensegmenten – also Sehnen der Kreisscheibe – besitzen.

Wir benutzen also verschiedene Modelle derselben Geometrie, um unterschiedliche Sachverhalte möglichst einfach zu erkennen.

Dadurch, dass die Großhyperbeln im Hyperboloidmodell den Sehnen im Klein'schen Modell entsprechen, sehen auch die hyperbolischen Dreiecke wie euklidische aus; jedoch sieht man daran einen zweiten großen Nachteil des Modells:

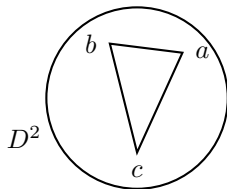


Abb. 210

Obschon man versucht ist, auch die Winkel direkt mit dem Winkelmesser abzulesen, sollte man dies unterlassen, denn die Winkel in (D^2, d_{Kl}) stimmen nicht mit den euklidischen Winkeln überein. Dies erkennt man am einfachsten an der Winkelsumme: Wären die Winkel gleich, so müsste die Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck wie im euklidischen gleich π sein; wir wissen jedoch, dass sie um genau den hyperbolischen Flächeninhalt kleiner ist.

Wir wollen jetzt ein weiteres Modell der hyperbolischen Geometrie kennenlernen, in welchem wir sowohl die Isometrien einfach beschreiben als auch die Winkel mit dem Winkelmesser ablesen können. Dazu betrachten wir erneut eine Zentralprojektion von H^2 ; nur ist dieses Mal das Projektionszentrum der Punkt $-e_1$ und die Ebene, in welche projiziert wird, $\{0\} \times \mathbb{R}^2$.

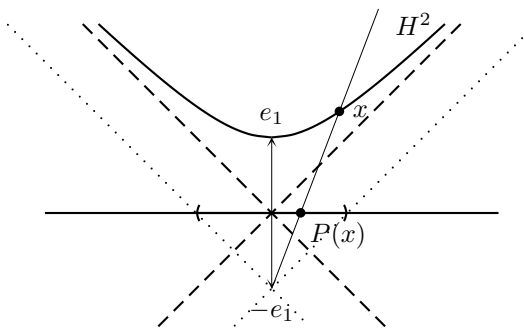


Abb. 211

In der Abbildung ist der Lichtkegel gestrichelt dargestellt, die punktierten Linien stellen den um $-e_1$ verschobenen Lichtkegel dar. Hieran kann man das Bild dieser Projektion P erkennen, denn alle Geraden durch $-e_1$, die steiler als der Lichtkegel verlaufen, schneiden H^2 , der verschobene Lichtkegel selbst stellt den Grenzfall dar. Somit ist $P(H^2) = \{0\} \times D^2$.

Weiterhin erkennen wir, dass P injektiv ist, denn jede Gerade durch $-e_1$ schneidet das Hyperboloid nur einmal. Insgesamt ist also $P : H^2 \rightarrow \{0\} \times D^2$ bijektiv.

Nun bestimmen wir eine Abbildungsvorschrift für P . Schreibe dazu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, P(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$P(X) \in G(X, -e_1) \implies \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein $t \in \mathbb{R}$. Lösen wir zunächst die Gleichung für die erste Komponente nach t auf, dann erhalten wir

$$0 = tx_1 - (1-t) \Leftrightarrow t = \frac{1}{x_1 + 1}.$$

Da die erste Komponente von $P(X)$ ohnehin verschwindet, können wir nun schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 + 1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nun lassen wir noch wie bereits beim Klein'schen Modell die konstante erste Koordinate weg und beschreiben die Abbildung als

$$P: H^2 \rightarrow D^2 \text{ mit } P\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{x_1 + 1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes suchen wir die Umkehrabbildung. Hierzu schreiben wir

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, P^{-1}(Y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nun wissen wir zunächst, dass $P^{-1}(Y) \in H^2$, also

$$\begin{aligned} -1 &= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 && | \cdot t^2 \\ -t^2 &= \underbrace{-(tx_1)^2}_{=1-t} + \underbrace{(tx_2)^2}_{=y_1^2} + \underbrace{(tx_3)^2}_{=y_2^2} \\ -t^2 &= -(1-t)^2 + y_1^2 + y_2^2 \\ -t^2 + (1-2t+t^2) &= y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2 \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{2}(1 - \|y\|^2). \end{aligned}$$

Weiterhin wissen wir:

$$tx_1 = 1-t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{t} - 1 = \frac{2}{1 - \|y\|^2} - \frac{1 - \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} = \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2},$$

$$tx_2 = y_1 \Rightarrow x_2 = \frac{y_1}{t} = \frac{2y_1}{1 - \|y\|^2},$$

$$tx_3 = y_2 \Rightarrow x_3 = \frac{2y_2}{1 - \|y\|^2};$$

also insgesamt

$$P^{-1}: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 1 + \|y\|^2 \\ 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir gemäß Bemerkung 4.4.1 eine Metrik d_P derart bestimmen, dass $P : (H^2, d_H) \rightarrow (D^2, d_P)$ eine Isometrie ist:

$$\begin{aligned}
d_P(y, y') &= d_H(P^{-1}(y), P^{-1}(y')) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(- \langle \langle P^{-1}(y), P^{-1}(y') \rangle \rangle \right) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(- \frac{1}{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2)} \left(- (1 + \|y\|^2)(1 + \|y'\|^2) + 4y_1 y'_1 + 4y_2 y'_2 \right) \right) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(\frac{1}{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2)} \left(1 + \|y\|^2 + \|y'\|^2 + \|y\|^2 \|y'\|^2 - 4 \langle y, y' \rangle \right) \right) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(\frac{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2) + 2\|y\|^2 + 2\|y'\|^2 - 4 \langle y, y' \rangle}{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2)} \right) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(1 + \frac{2(\|y\|^2 + \|y'\|^2 - 2 \langle y, y' \rangle)}{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2)} \right) \\
&= \operatorname{Acosh} \left(1 + \frac{2\|y - y'\|^2}{(1 - \|y\|^2)(1 - \|y'\|^2)} \right).
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von d_P ist nun (D^2, d_P) ein Modell der hyperbolischen Geometrie.

Definition 4.4.3 Der metrische Raum (D^2, d_P) heißt *Poincaré-Scheibenmodell* oder *konformes Scheibenmodell der hyperbolischen Geometrie*.

Warum „konform“? Dieses Wort bedeutet nichts anderes als „winkeltreu“, und das erklärt der folgende

Satz 4.4.4 Die Abbildung $P : (H^2, d_H) \rightarrow (D^2, d_E)$ ist winkeltreu, d.h. die Winkel im Poincaré-Scheibenmodell stimmen mit den euklidischen Winkeln überein.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, wenden wir einen Algorithmus aus der Differentialgeometrie an, mit dem sich Winkeltreue leicht zeigen oder widerlegen lässt:

1. Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von $Q := P^{-1}$. Dazu leiten wir zunächst den Vorfaktor $\frac{1}{1 - \|y\|^2}$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{1 - \|y\|^2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{1 - y_1^2 - y_2^2} = \frac{2y_1}{(1 - \|y\|^2)^2}.$$

Nun berechnen wir schnell

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial y_1}(y) &= \frac{2y_1}{(1 - \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + \|y\|^2 \\ 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \|y\|^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{(1 - \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} y_1(1 + \|y\|^2) + y_1(1 - \|y\|^2) \\ 2y_1^2 + (1 - \|y\|^2) \\ 2y_1 y_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{(1 - \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 1 + y_1^2 - y_2^2 \\ 2y_1 y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Rollen von y_1 und y_2 erhalten wir

$$\frac{\partial Q}{\partial y_2}(y) = \frac{2}{(1 - \|y\|^2)^2} \begin{pmatrix} 2y_2 \\ 2y_1y_2 \\ 1 + y_2^2 - y_1^2 \end{pmatrix}.$$

2. Nun bestimmen wir die Minkowskiprodukte (welche die Winkelgrößen im Hyperboloidmodell bestimmen)

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_i}(y), \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y) \right\rangle \right\rangle, \quad j \in \{1, 2\} :$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_1}(y), \frac{\partial Q}{\partial y_1}(y) \right\rangle \right\rangle &= \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^4} (-4y_1^2 + 1 + y_1^4 + y_2^4 + 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1^2y_2^2 + 4y_1^2y_2^2) \\ &= \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^4} (1 + y_1^4 + y_2^4 - 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1^2y_2^2) \\ &= \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^4} (1 - \|y\|^2)^2 \\ &= \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Wieder vertauschen wir die Rollen von y_1 und y_2 (da ist nicht viel zu tun) und erhalten

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_2}(y), \frac{\partial Q}{\partial y_2}(y) \right\rangle \right\rangle = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2}.$$

Schließlich bestimmen wir noch

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_1}(y), \frac{\partial Q}{\partial y_2}(y) \right\rangle \right\rangle &= \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_2}(y), \frac{\partial Q}{\partial y_1}(y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^4} (-4y_1y_2 + 2y_1y_2(1 + y_1^2 - y_2^2 + 1 + y_2^2 - y_1^2)) = 0. \end{aligned}$$

3. Sei nun $c : I \rightarrow D^2$ eine glatte Kurve durch $c(0)$ mit dem Tangentenvektor $\dot{c}(0)$.

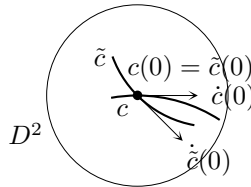


Abb. 212

Dann gilt für die Bildkurve $Q \circ c : I \rightarrow H^2$ nach der Kettenregel:

$$\left. \frac{d}{dt} Q(c(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial Q}{\partial y_1}(c(0)) \cdot \dot{c}_1(0) + \frac{\partial Q}{\partial y_2}(c(0)) \cdot \dot{c}_2(0).$$

Sei \tilde{c} eine weitere derartige Kurve mit $\tilde{c}(0) = c(0)$. Dann gilt für den hyperbolischen Winkel α zwischen den Tangentenvektoren der Bildkurven in H^2 :

$$\cos(\alpha) = \frac{\left\langle \left. \frac{d}{dt} Q(c(t)) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} Q(\tilde{c}(t)) \right|_{t=0} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \left. \frac{d}{dt} Q(c(t)) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} Q(c(t)) \right|_{t=0} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \left. \frac{d}{dt} Q(\tilde{c}(t)) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} Q(\tilde{c}(t)) \right|_{t=0} \right\rangle}}.$$

Betrachten wir zunächst den Zähler, dann erkennen wir

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} Q \circ c \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} Q \circ \tilde{c} \Big|_{t=0} \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_1}(c(0)) \dot{c}_1(0) + \frac{\partial Q}{\partial y_2}(c(0)) \dot{c}_2(0), \frac{\partial Q}{\partial y_1}(\tilde{c}(0)) \dot{\tilde{c}}_1(0) + \frac{\partial Q}{\partial y_2}(\tilde{c}(0)) \dot{\tilde{c}}_2(0) \right\rangle \right\rangle \\
&= \dot{c}_1(0) \dot{\tilde{c}}_1(0) \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_1}(c(0)), \frac{\partial Q}{\partial y_1}(c(0)) \right\rangle \right\rangle + \dot{c}_2(0) \dot{\tilde{c}}_2(0) \left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_2}(c(0)), \frac{\partial Q}{\partial y_2}(c(0)) \right\rangle \right\rangle + 0 \\
&= \frac{4}{(1 - \|c(0)\|^2)^2} (\dot{c}_1(0) \dot{\tilde{c}}_1(0) + \dot{c}_2(0) \dot{\tilde{c}}_2(0)) \\
&= \frac{4}{(1 - \|c(0)\|^2)^2} \langle \dot{c}(0), \dot{\tilde{c}}(0) \rangle.
\end{aligned}$$

Ebenso berechnet sich der Nenner zu

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} Q(c(t)) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} Q(c(t)) \Big|_{t=0} \right\rangle \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} Q(\tilde{c}(t)) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt} Q(\tilde{c}(t)) \Big|_{t=0} \right\rangle \right\rangle} \\
&= \frac{4}{(1 - \|c(0)\|^2)^2} \|\dot{c}(0)\| \|\dot{\tilde{c}}(0)\|,
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \dot{c}(0), \dot{\tilde{c}}(0) \rangle}{\|\dot{c}(0)\| \|\dot{\tilde{c}}(0)\|} = \cos(\angle(\dot{c}(0), \dot{\tilde{c}}(0))),$$

was den euklidischen Winkel beschreibt. \square

Hat man diesen Algorithmus oft angewandt, so erkennt man bereits nach Schritt 2 die Winkeltreue, denn wir stellen fest, dass folgende Eigenschaften der Abbildung Q dafür vonnöten waren: der Wegfall der gemischten Minkowski-Produkte der partiellen Ableitungen sowie die Übereinstimmung der Minkowski-Quadrate.

Eine Abbildung $Q : (D^2, d_E) \rightarrow (H^2, d_H)$ ist also genau dann winkeltreu, wenn die Matrix $(a_{ij}) := \left(\left\langle \left\langle \frac{\partial Q}{\partial y_i}, \frac{\partial Q}{\partial y_j} \right\rangle \right\rangle \right)$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Als Übung sei empfohlen, diese Matrix für das Klein'sche Modell zu bestimmen. Man wird feststellen, dass dabei kein Vielfaches der Einheitsmatrix herauskommt.

Im Zusammenhang mit dem Klein'schen Modell haben wir bereits festgestellt, dass sich die Winkeltreue nicht damit vereinbaren lässt, dass Großhyperbeln die Form von Geradensegmenten annehmen. Die naheliegende Frage ist demnach, welche Form Großhyperbeln im Poincaré-Modell annehmen. Bevor wir diese Frage jedoch beantworten, sehen wir uns erst einmal die Isometriegruppe dieses Modells an, wofür wir noch einige Begriffe aus der Funktionentheorie benötigen.

Definition 4.4.5 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $c, d \neq 0$ und $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. Dann nennt man eine Abbildung $F : \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Möbius-Transformation.

Eine Abbildung G der Form

$$G(z) = F(\bar{z}),$$

wobei F eine Möbius-Transformation ist, heißt *Anti-Möbius-Transformation*.

Bemerkung 4.4.6 Man setzt $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, weiterhin

$$F\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad F(\infty) := \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{falls } c \neq 0; \\ \infty, & \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

Dann kann man jede (Anti-)Möbius-Transformation F als Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ auffassen.

Definition 4.4.7 Die Menge aller Möbius-Transformationen bezeichnen wir mit $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$, die Menge der Anti-Möbius-Transformationen mit $\text{Möb}^-(\hat{\mathbb{C}})$.

Lemma 4.4.8 Die Abbildung $\text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ vermöge

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto F_A \text{ mit } F_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$$

besitzt die Eigenschaften

$$F_{\mathbb{1}_2} = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}, \quad F_{A'} \circ F_A = F_{A' \cdot A}, \quad F_{A^{-1}} = (F_A)^{-1}.$$

Beweis.

1. $F_{\mathbb{1}_2}(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}(z) \quad \checkmark$
- 2.

$$\begin{aligned} F_{A'}(F_A(z)) &= F_{A'}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \frac{a' \left(\frac{az + b}{cz + d}\right) + b'}{c' \left(\frac{az + b}{cz + d}\right) + d'} \\ &= \frac{a'(az + b) + b'(cz + d)}{c'(az + b) + d'(cz + d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}, \end{aligned}$$

während $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \quad \checkmark$

3. $F_{A^{-1}} \circ F_A \stackrel{2.}{=} F_{A^{-1} \cdot A} = F_{\mathbb{1}_2} \stackrel{1.}{=} \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}} \Rightarrow F_{A^{-1}} = F_A^{-1}. \quad \square$

Bemerkung 4.4.9 Damit ist $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Gruppe und $\text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung 4.4.10

$$\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \{a \cdot \mathbb{1}_2 \mid a \neq 0\} =: \text{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

Beweis. Hierfür müssen wir nur den Kern des gegebenen Gruppenhomomorphismus bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ liegt im Kern} &\Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \\
 &\Leftrightarrow az+b = cz^2 + dz \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \\
 &\Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0 \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \\
 &\Leftrightarrow c = d - a = -b = 0 \\
 &\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \mathbb{1}_2, a \neq 0.
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4.11 Die Menge $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \cup \text{Möb}^-(\hat{\mathbb{C}})$ bildet ebenfalls eine Gruppe bezüglich der Verkettung.

Beispiel 4.4.12 Für $A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$F_A(z) = \frac{e^{i\varphi} \cdot z + b}{0 \cdot z + 1} = e^{i\varphi} \cdot z + b.$$

Die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ beschreibt eine Drehung der komplexen Ebene um den Winkel φ ; die darauffolgende Addition von b beschreibt eine Translation. Somit sind alle orientierungserhaltenden euklidischen Bewegungen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ Möbius-Transformationen.

Beispiel 4.4.13 Für $A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & b \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ ist

$$F_A(z) = re^{i\varphi} \cdot z + br.$$

Dies beschreibt offensichtlich eine beliebige orientierungserhaltende Ähnlichkeitstransformation: Auch alle orientierungserhaltenden Ähnlichkeitstransformationen von \mathbb{R}^2 sind Möbius-Transformationen.

Beispiel 4.4.14 Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$F_A(z) = \frac{1}{z}.$$

Diese Funktion bildet offenbar den Einheitskreis auf sich selbst ab, den Koordinatenursprung auf den unendlich fernen Punkt und jenen auf den Koordinatenursprung. Das Innere des Kreises $K_1(0)$ wird also nach außen gekehrt; man nennt diese Abbildung deshalb *Inversion am Kreis*. Auch hierbei handelt es sich um eine Möbiustransformation.

Beispiel 4.4.15 Wir wissen bereits, dass $\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ eine Möbius-Transformation ist. Damit ist die Konjugation (entspricht der Spiegelung an der reellen Achse) eine Anti-Möbius-Transformation, denn

$$\text{conj}(z) = \bar{z} = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}}(\bar{z}).$$

Definition 4.4.16 Für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt

$$(z_1 : z_2; z_3 : z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}{\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}}$$

ihr *Doppelverhältnis*.

Bemerkung 4.4.17 Damit wir das Doppelverhältnis auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$ definieren können, müssen wir uns überlegen, was passiert, wenn einer der Werte ∞ ist. (Dass wir irgendwo durch 0 teilen, ist ausgeschlossen, da z_1, z_2, z_3, z_4 paarweise verschieden sind; das Doppelverhältnis selbst ist also immer aus \mathbb{C} .) Um dies sinnvoll zu definieren, bilden wir einfach den Grenzwert, wenn der jeweilige Eintrag gegen ∞ geht, und erhalten so die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} (\infty : z_2; z_3 : z_4) &= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}; \\ (z_1 : \infty; z_3 : z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}; \\ (z_1 : z_2; \infty : z_4) &= \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}; \\ (z_1 : z_2; z_3 : \infty) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \end{aligned}$$

Lemma 4.4.18 Möbius-Transformationen erhalten das Doppelverhältnis, d.h. für alle $F \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ und paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ gilt:

$$(F(z_1) : F(z_2); F(z_3) : F(z_4)) = (z_1 : z_2; z_3 : z_4).$$

Beweis. Schreibe $w_j := F(z_j)$. Wir bestimmen zunächst $w_1 - w_3$:

$$\begin{aligned} w_1 - w_3 &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} \\ &= \frac{(acz_1z_3 + adz_1 + bcz_3 + bd) - (acz_3z_1 + bcz_1 + adz_3 + bd)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Indizes lassen sich auch die übrigen benötigten Differenzen ermitteln, und so können wir nun den Zähler des Doppelverhältnisses berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} &= \frac{\cancel{(ad - bc)}(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)\cancel{(cz_3 + d)}} \cdot \frac{(cz_2 + d)\cancel{(cz_3 + d)}}{\cancel{(ad - bc)}(z_2 - z_3)} \\ &= \underbrace{\frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}}_{=:k} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, \end{aligned}$$

wobei auffällt, dass k unabhängig von z_3 ist. Wenn wir nun also die Rollen von z_3 und z_4 vertauschen, um den Nenner des Doppelverhältnisses zu bestimmen, so erhalten wir

$$\frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4} = k \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4},$$

und endlich

$$\frac{\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}}{\frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}} = \frac{k \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}{k \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}.$$

□

Definition 4.4.19 Wir fassen Kreise und Geraden in \mathbb{R}^2 unter dem Begriff *verallgemeinerte Kreise* zusammen.

Lemma 4.4.20 Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Dann liegen diese Punkte genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis, wenn $(z_1 : z_2; z_3 : z_4) \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis. Wir zeigen nur „ \Rightarrow “, die andere Richtung lässt sich ähnlich zeigen und sei dem Leser als Übung zur persönlichen Erbauung überlassen.

1. Fall: z_1, z_2, z_3, z_4 liegen auf einer Geraden.

Wir haben in Beispiel 4.4.13 bereits gesehen, dass Translationen Möbiustransformationen sind, und nach Lemma 4.4.18 bleibt damit das Doppelverhältnis erhalten. Sei also o.B.d.A. $z_3 = 0$. Dann sind z_1, z_2, z_4 linear abhängig, und wir können schreiben

$$z_2 = t \cdot z_1 \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

$$z_4 = s \cdot z_1 \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

Daraus bestimmt man nun

$$(z_1 : z_2; z_3 : z_4) = \frac{\frac{z_1-0}{t \cdot z_1-0}}{\frac{z_1-s \cdot z_1}{t \cdot z_1-s \cdot z_1}} \stackrel{z_1 \neq 0}{=} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-s}{t-s}} \in \mathbb{R}.$$

(Dass der Wert existiert und nicht ∞ ist, haben wir bereits bei der Einführung des Doppelverhältnisses festgestellt.)

2. Fall: z_1, z_2, z_3, z_4 liegen auf einem Kreis.

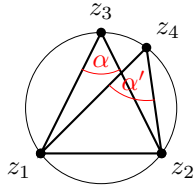


Abb. 213

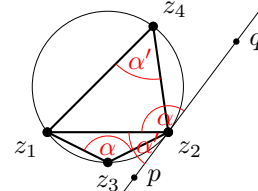


Abb. 214

Damit sind die Umkreise der Dreiecke (z_1, z_2, z_3) und (z_1, z_2, z_4) identisch und besitzen insbesondere denselben Radius r . Diesen können wir jedoch nach Bemerkung 1.5.13 berechnen:

$$2r = \frac{|z_1 - z_2|}{\sin(\alpha)} = \frac{|z_1 - z_2|}{\sin(\alpha')} \Rightarrow \sin(\alpha) = \sin(\alpha').$$

Nun sind $\alpha, \alpha' \in (0, \pi)$, und auf diesem Intervall ist der Sinus leider nicht injektiv. Wir können jedoch zwei mögliche Fälle unterscheiden, und zwar

$$\alpha = \alpha' \text{ oder } \alpha' = \pi - \alpha.$$

Liegen z_3 und z_4 auf derselben Seite von $G(z_1, z_2)$, so muss aus Stetigkeitsgründen $\alpha = \alpha'$ gelten (vgl. Abbildung 213).

Weiter beobachten wir, dass der Vektor $z_1 - z_3$ nur im Uhrzeigersinn um α gedreht werden muss, um parallel und richtungsgleich zu $z_2 - z_3$ zu liegen. Normieren wir diese Vektoren, so sind sie nach der Drehung sogar identisch:

$$\frac{z_1 - z_3}{|z_1 - z_3|} = e^{i\alpha} \frac{z_2 - z_3}{|z_2 - z_3|} \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = qe^{i\alpha} \text{ mit } q = \left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right| \in \mathbb{R}.$$

Ebenso drehen wir den normierten Vektor $z_1 - z_4$ um α auf den normierten $z_2 - z_4$, also

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = q'e^{i\alpha} \text{ mit } q' \in \mathbb{R},$$

und wir bestimmen nun

$$(z_1 : z_2; z_3 : z_4) = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}{\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}} = \frac{qe^{i\alpha}}{q'e^{i\alpha}} = \frac{q}{q'} \in \mathbb{R}.$$

Liegen z_3 und z_4 hingegen auf verschiedenen Seiten von $G(z_1, z_2)$, so betrachten wir die Tangente an den Kreis im Punkt z_2 sowie zwei Punkte auf dieser Tangente: p auf derselben Seite von $G(z_1, z_2)$ wie z_3 und q auf derselben Seite wie z_4 (vgl. Abbildung 214). Nun sehen wir, wenn wir den Punkt z_3 gegen z_2 laufen lassen, dass der Winkel α gegen $\sphericalangle(z_1, z_2, q)$ läuft, wohingegen, wenn wir dasselbe mit z_4 tun, α' gegen $\sphericalangle(z_1, z_2, p)$ geht. Damit gilt wieder aus Gründen der Stetigkeit

$$\alpha = \sphericalangle(z_1, z_2, q) = \pi - \sphericalangle(z_1, z_2, p) = \pi - \alpha'.$$

Jetzt müssen wir zwar immer noch $z_1 - z_3$ im Uhrzeigersinn um α drehen, um auf $z_2 - z_3$ zu gelangen, $z_1 - z_4$ muss jedoch gegen den Uhrzeigersinn um $\alpha' = \pi - \alpha$ gedreht werden, damit es parallel und richtungsgleich zu $z_2 - z_4$ wird, also

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = q'e^{-i(\pi - \alpha)} = q'e^{-i\pi}e^{i\alpha} = -q'e^{i\alpha},$$

und somit erhalten wir

$$(z_1 : z_2; z_3 : z_4) = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}}{\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}} = \frac{qe^{i\alpha}}{-q'e^{i\alpha}} = -\frac{q}{q'} \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Lemma 4.4.21 *Das Bild eines verallgemeinerten Kreises unter einer Möbius-Transformation ist wieder ein verallgemeinerter Kreis.*

Beweis. Sei $F \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$, sei K ein verallgemeinerter Kreis. Seien weiter $z_1, z_2, z_3 \in K$ paarweise verschieden. Dann ist K durch z_1, z_2, z_3 eindeutig bestimmt.

Wähle nun einen Punkt $z \in K - \{z_1, z_2, z_3\}$. Dann ist

$$(F(z_1) : F(z_2); F(z_3) : F(z)) = (z_1 : z_2; z_3 : z) \in \mathbb{R},$$

und damit liegt $F(z)$ auf dem verallgemeinerten Kreis K' , der durch $F(z_1), F(z_2)$ und $F(z_3)$ eindeutig bestimmt wird.

Hiermit ist erst einmal $F(K) \subset K'$ gezeigt; die umgekehrte Inklusion zeigt man, indem man F^{-1} auf K' anwendet. \square

Bemerkung 4.4.22 Da neben den Möbius-Transformationen auch die komplexe Konjugation (d.h. die Spiegelung an der reellen Achse) verallgemeinerte Kreise auf ebensolche abbildet, stellen wir fest: Anti-Möbius-Transformationen bilden verallgemeinerte Kreise ebenfalls auf ebensolche ab.

Definition 4.4.23 Wir bezeichnen mit $\text{Möb}(D^2)$ die Menge all derjenigen Möbius-Transformationen, welche die Kreisscheibe auf sich selbst abbilden, also

$$\text{Möb}(D^2) := \{F \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) \mid F(D^2) = D^2\}.$$

Analog definieren wir

$$\text{Möb}^-(D^2) := \{F \in \text{Möb}^-(\hat{\mathbb{C}}) \mid F(D^2) = D^2\} = \{z \mapsto F(\bar{z}) \mid F \in \text{Möb}(D^2)\}.$$

Lemma 4.4.24 $\text{Möb}(D^2)$ ist eine Untergruppe von $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ und für jede Abbildung $F \in \text{Möb}(D^2)$ gilt

$$F(\partial D^2) \subset \partial D^2.$$

Beweis.

1. $F = \text{id}_{D^2} \in \text{Möb}(D^2)$ klar. ✓
Sei $F \in \text{Möb}(D^2)$. Dann gilt

$$F(D^2) = D^2 \Rightarrow F^{-1}(D^2) = F^{-1}(F(D^2)) = D^2 \Rightarrow F^{-1} \in \text{Möb}(D^2). \checkmark$$

Seien $F, G \in \text{Möb}(D^2)$. Dann ist

$$F(G(D^2)) = F(D^2) = D^2 \Rightarrow F \circ G \in \text{Möb}(D^2). \checkmark$$

2. Sei $z \in \partial D^2$, d.h. $|z| = 1$. Sei $F \in \text{Möb}(D^2)$. Für jede reelle Zahl $r \in (0, 1)$ ist $r \cdot z \in D^2$ und damit auch $F(r \cdot z) \in D^2$, d.h. $|F(r \cdot z)| < 1$. Lässt man nun $r \nearrow 1$ gehen, so ergibt sich

$$|F(z)| = \left| F\left(\lim_{r \nearrow 1} rz\right) \right| \stackrel{\text{stetig}}{=} \left| \lim_{r \nearrow 1} F(rz) \right| = \lim_{r \nearrow 1} \underbrace{|F(rz)|}_{< 1} \leq 1.$$

Wäre nun $|F(z)| < 1$, so hieße das $F(z) \in D^2$ und damit $z = F^{-1}(F(z)) \in D^2$. ✗
Somit muss $|F(z)| = 1$ und damit $F(z) \in \partial D^2$ sein. \square

Bemerkung 4.4.25 Dieser Beweis benutzt nirgends, dass es sich bei den Funktionen tatsächlich um Möbius-Transformationen und bei dem Gebiet um die Kreisscheibe handelt. Tatsächlich verlaufen entsprechende Beweise für stetige Bijektionen auf beliebigen Gebieten analog. Deshalb besitzt auch $\text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2)$ die angegebenen Eigenschaften.

Lemma 4.4.26 Die Abbildungen $F \in \text{Möb}(D^2)$ sind genau die Funktionen der Form

$$F(z) = a \cdot \frac{z - p}{\bar{p}z - 1} \text{ mit } a, p \in \mathbb{C}, |a| = 1, |p| < 1.$$

Beweis.

„ \Leftarrow “ (a) Sei $F(z) = a \cdot \frac{z-p}{\bar{p}z-1}$ mit $|a| = 1$ und $|p| < 1$. Sei $z \in D^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} |F(z)|^2 &= \underbrace{|a|^2}_{=1} \cdot \frac{|z-p|^2}{|\bar{p}z-1|^2} \\ &= \frac{(z-p)(\bar{z}-\bar{p})}{(\bar{p}z-1)(p\bar{z}-1)} \\ &= \frac{|z|^2 - z\bar{p} - p\bar{z} + |p|^2}{|p|^2|z|^2 - \bar{p}z - p\bar{z} + 1}. \end{aligned}$$

Nun ist $1 = \underbrace{(1-|p|^2)}_{>0} + |p|^2 > \underbrace{|z|^2}_{<1} (1-|p|^2) + |p|^2 = |z|^2 - |z|^2|p|^2 + |p|^2$

und damit

$$|z|^2|p|^2 + 1 > |z|^2 + |p|^2 \Leftrightarrow |p|^2|z|^2 - \bar{p}z - p\bar{z} + 1 > |z|^2 - \bar{p}z - p\bar{z} + |p|^2,$$

also der Nenner des obigen Ausdrucks für $|F(z)|^2$ größer als sein Zähler, und folglich gilt

$$|F(z)|^2 < 1 \Rightarrow F(D^2) \subset D^2.$$

- (b) Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, bestimmen wir einfach die inverse Abbildung. Wenn diese dann von der angegebenen Form ist, wissen wir sofort

$$F^{-1}(D^2) \subset D^2 \Rightarrow D^2 = F(F^{-1}(D^2)) \subset F(D^2)$$

und erhalten damit die gewünschte Gleichheit.

Formen wir also um:

$$\begin{aligned} w := F(z) &= a \frac{z-p}{\bar{p}z-1} \\ \Leftrightarrow (\bar{p}z-1)w &= az-ap \\ \Leftrightarrow (\bar{p}w-a)z &= w-ap \\ \Leftrightarrow z &= \frac{w-ap}{\bar{p}w-a} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{w-ap}{a^{-1}\bar{p}w-1} \end{aligned}$$

und wegen $1 = |a|^2 = a\bar{a} \Leftrightarrow a^{-1} = \bar{a}$

$$= \bar{a} \frac{w-ap}{\bar{a}\bar{p}w-1}.$$

Wir sehen also, dass F^{-1} tatsächlich dieselbe Form wie F besitzt mit $a' = \bar{a}$ und $p' = ap$. Offensichtlich gilt auch

$$|a'| = |\bar{a}| = |a| = 1 \text{ und } |ap| = \underbrace{|a|}_{=1} \cdot \underbrace{|p|}_{<1} < 1.$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht.

„ \Rightarrow “ Sei $F \in \text{Möb}(D^2)$. Dann ist F auf jeden Fall von der Form

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Wäre $d = 0$, so wäre $F(0) = \infty \notin D^2$, also ist $d \neq 0$. Nun können wir den Bruch mit $-d$ kürzen, also o.B.d.A. $d = -1$ annehmen, und erhalten

$$F(z) = \frac{az + b}{cz - 1}.$$

Nun ist $F(0) = -b \in D^2$, somit ist $|b| < 1$. Weiterhin gilt für $z = e^{i\varphi} \in \partial D^2$ mit beliebigem $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 = |F(z)|^2 &= \frac{|ae^{i\varphi} + b|^2}{|ce^{i\varphi} - 1|^2} \\ \Leftrightarrow |ce^{i\varphi} - 1|^2 &= |ae^{i\varphi} + b|^2 \\ \Leftrightarrow |c|^2 - ce^{i\varphi} - \bar{c}e^{-i\varphi} + 1 &= |a|^2 + a\bar{b}e^{i\varphi} + \bar{a}be^{-i\varphi} + |b|^2 \\ \Leftrightarrow (|c|^2 + 1 - |a|^2 - |b|^2) - (c + a\bar{b})e^{i\varphi} - (\bar{c} + \bar{a}b)e^{-i\varphi} &= 0 \forall \varphi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d.h. sämtliche Koeffizienten müssen verschwinden. Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 0 &= |c|^2 + 1 - |a|^2 - |b|^2; \\ \text{II} \quad c &= -a\bar{b}. \\ \text{II in I} \quad 0 &= |a|^2|b|^2 + 2 - |a|^2 - |b|^2 \\ &= (|a|^2 - 1) \underbrace{(|b|^2 - 1)}_{<0} \\ \Rightarrow |a|^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow |a| &= 1 \\ \Rightarrow a^{-1} &= \bar{a}. \end{aligned}$$

Hiermit besitzt die Abbildung die Form

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{az + b}{-a\bar{b}z - 1} \\ &= a \frac{z - (-\bar{a}b)}{-a\bar{b}z - 1} \\ &= a \frac{z - p}{\bar{p}z - 1} \end{aligned}$$

mit $p := -\bar{a}b$, wobei

$$|a| = 1; |p| = \underbrace{|a|}_{=1} \cdot \underbrace{|b|}_{<1} < 1. \quad \square$$

Satz 4.4.27 Die Isometriegruppe des Poincaré-Scheibenmodells ist bestimmt durch

$$\text{Iso}(D^2, d_P) = \text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2).$$

Beweis.

„ \supset “ Wir erinnern uns an die Metrik im Poincaré-Scheibenmodell:

$$d_P(z, z') = \operatorname{Acosh} \left(1 + 2 \frac{|z - z'|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)} \right).$$

Zunächst zeigt man, dass für alle Punkte $z, z' \in D^2$ und für alle Abbildungen $F \in \operatorname{Möb}(D^2)$ gilt:

$$\begin{aligned} d_P(z, z') &= d_P(F(z), F(z')) \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \frac{|z - z'|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)} &= 1 + 2 \frac{|F(z) - F(z')|^2}{(1 - |F(z)|^2)(1 - |F(z')|^2)} \\ \Leftrightarrow \frac{|z - z'|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)} &= \frac{|F(z) - F(z')|^2}{(1 - |F(z)|^2)(1 - |F(z')|^2)}, \end{aligned}$$

und dies kann jeder einfach nachrechnen (mit $F(z) = a \frac{z - p}{\bar{p}z - 1}$).

Offensichtlich gilt $\operatorname{conj} \in \operatorname{Iso}(D^2, d_P)$, da sich der Betrag einer komplexen Zahl bei der Konjugation nicht ändert. Für eine Anti-Möbius-Transformation, die durch $G : z \mapsto F(\bar{z})$ gegeben ist, gilt deshalb

$$G(z) = F(\bar{z}) = \underbrace{F}_{\operatorname{Iso}} \circ \underbrace{\operatorname{conj}}_{\operatorname{Iso}}(z) \Rightarrow G = F \circ \operatorname{conj} \in \operatorname{Iso}(D^2, d_P).$$

„ \subset “ Sei $F \in \operatorname{Iso}(D^2, d_P)$.

- (a) Betrachte zunächst den Fall $F(0) = 0$. Um die Natur dieser Möbius-Transformationen zu verstehen, gehen wir kurz zurück ins Hyperboloidmodell. Dem Punkt 0 im Poincaré-Scheibenmodell entspricht dort der Punkt e_1 , und wir suchen somit die Lorentz-Transformationen, die e_1 in sich überführen. Dabei erkennen wir leicht, dass dies genau diejenigen sind, die durch die Matrix

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \text{ mit } B \in \operatorname{O}(2)$$

beschrieben werden.

Ebenso leicht sehen wir, dass bei der Zentralprojektion P die Drehungen um die e_1 -Achse immer Drehungen bleiben, und zwar entspricht der durch A beschriebenen Lorentz-Transformation die durch B beschriebene Drehung der Kreisscheibe. Drehungen sind aber nach Beispiel 4.4.12 Möbius-Transformationen.

Dasselbe gilt natürlich auch, falls B eine Spiegelmatrix sind; aber Spiegelungen sind keine Möbiustransformationen. Falls B die Spiegelung an der reellen Achse beschreibt, entspricht dieser die Abbildung conj , und wir wissen bereits, dass es sich dabei um eine Anti-Möbius-Transformation handelt. Haben wir nun eine Spiegelung an einer beliebigen Achse durch 0 mit dem Winkel α zur reellen Achse, so können wir die gesuchte Abbildung aus einer Drehung um $-\alpha$, der Konjugation sowie einer Drehung um $+\alpha$

zusammensetzen, und dies ist sicherlich auch aus $\text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2)$.
Wir können die Abbildung genau angeben:

$$z \mapsto e^{i\alpha} \cdot \overline{e^{-i\alpha} z} = e^{2i\alpha} \bar{z} = -e^{2i\alpha} \frac{\bar{z} - 0}{0 \cdot \bar{z} - 1}.$$

(b) Nun sei $F(0) = b \in D^2$ beliebig. Betrachte die Abbildung

$$G(z) = \frac{z - b}{\bar{b}z - 1}.$$

Es gilt offensichtlich $G \in \text{Möb}(D^2) \subset \text{Iso}(D^2, d_P)$ und $G(0) = b$. Setze nun

$$H := G^{-1} \circ F \in \text{Iso}(D^2, d_P).$$

Wir erkennen, dass $H(0) = G^{-1}(F(0)) = G^{-1}(b) = 0$ ist und somit nach Teil (a)

$$H \in \text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2).$$

Somit ist auch

$$F = G \circ H \in \text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2). \quad \square$$

Bemerkung 4.4.28 Die Abbildung

$$\text{Iso}(H^2, d_H) = \mathcal{L}^\uparrow(3) \rightarrow \text{Iso}(D^2, d_P) = \text{Möb}(D^2) \cup \text{Möb}^-(D^2) \text{ mit } \varphi \mapsto P \circ \varphi \circ P^{-1}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Damit können wir einen geometrischen Sachverhalt – nämlich Isometrie – auch algebraisch – nämlich durch Isomorphie – ausdrücken.

Bemerkung 4.4.29 Bei diesem Isomorphismus werden die orientierungserhaltenden Lorentz-Transformationen auf $\text{Möb}(D^2)$, die orientierungsumkehrenden hingegen auf $\text{Möb}^-(D^2)$ abgebildet.

Satz 4.4.30 *Unter der Projektion $P : H^2 \rightarrow D^2$ werden die Großhyperbeln genau auf Abschnitte derjenigen verallgemeinerten Kreise abgebildet, die auf ∂D^2 senkrecht stehen.*

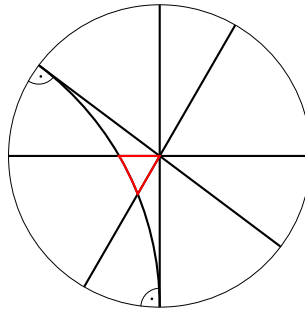


Abb. 215

Beweis.

1. Die Großhyperbeln, die e_1 enthalten, entstehen durch Schnitte von H^2 mit Ebenen, die die e_1 -Achse enthalten. Projizieren wir diese mit dem Projektionszentrum $-e_1$, so erhalten wir die Schnitte derselben Ebenen mit D^2 , also Geraden-segmente durch den Nullpunkt, und dies sind verallgemeinerte Kreise, die auf dem Rand von D^2 senkrecht stehen.
2. Eine Großhyperbel G lässt sich durch eine Lorentz-Transformation φ auf eine Großhyperbel durch e_1 abbilden. Nun sehen wir, dass nach 1 die Großhyperbel $\varphi(G)$ einem verallgemeinerten Kreis im Poincaré-Scheibenmodell entspricht. Bilden wir diesen nun durch $F := P \circ \varphi^{-1} \circ P^{-1}$ auf $P(G)$ ab, so muss dies auch ein verallgemeinerter Kreis sein.
3. Da (Anti-)Möbius-Transformationen als Isometrien von (D^2, d_P) winkeltreu sind (auch die Projektion P ist winkeltreu) und ∂D^2 erhalten, muss der rechte Winkel, den $P(\varphi(G))$ als Durchmesser von D^2 mit deren Rand bildet, erhalten bleiben. Deshalb stehen alle verallgemeinerten Kreise, die Großhyperbeln beschreiben, auf ∂D^2 senkrecht.
4. Dass jeder derartige verallgemeinerte Kreis tatsächlich einer Großhyperbel entspricht, sei dem Leser als abschließende Übung zu zeigen überlassen. \square

Bemerkung 4.4.31 In Abbildung 215 erkennt man auch, dass die Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck immer kleiner als π sein muss, denn im Vergleich mit einem euklidischen Dreieck fehlt an den Ecken, von denen ein Kreisbogen ausgeht, jeweils ein Stück vom Winkel.

4.5 Exkurs: Kegelschnitte

Um Kegelschnitte auf einfache Weise untersuchen zu können, bedienen wir uns der Minkowski-Geometrie (vgl. Abschnitt 4.1) erinnert. In ihr existiert bekanntermaßen eine Einteilung der Vektoren aus \mathbb{R}^3 in *zeitartige* ($\langle\langle x, x \rangle\rangle < 0$), *lichtartige* ($\langle\langle x, x \rangle\rangle = 0, x \neq 0$) und *raumartige Vektoren* ($\langle\langle x, x \rangle\rangle > 0$ oder $x = 0$). Die Menge der zeitartigen Vektoren und 0 nennt man *Lichtkegel*:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}.$$

Definition 4.5.1 Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Dann heißt E

- *zeitartig*, falls E einen zeitartigen Vektor enthält;
- *lichtartig*, falls E keine zeitartigen, aber lichtartige Vektoren enthält;
- *raumartig*, falls E lediglich raumartige Vektoren enthält.

Bemerkung 4.5.2 Jeder zweidimensionale Untervektorraum $E \subset \mathbb{R}^3$ enthält von 0 verschiedene raumartige Vektoren.

Ist E zeitartig, so enthält E auch lichtartige Vektoren.

Definition 4.5.3 Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene, d.h. $E = E_0 + p$ für einen zweidimensionalen Untervektorraum $E_0 \subset \mathbb{R}^3$ und einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3$.

E heißt *zeit-, licht- oder raumartig* genau dann, wenn E_0 zeit-, licht- bzw. raumartig ist.

Bemerkung 4.5.4 Raumartige affine Ebenen können auch zeit- und lichtartige Vektoren enthalten.

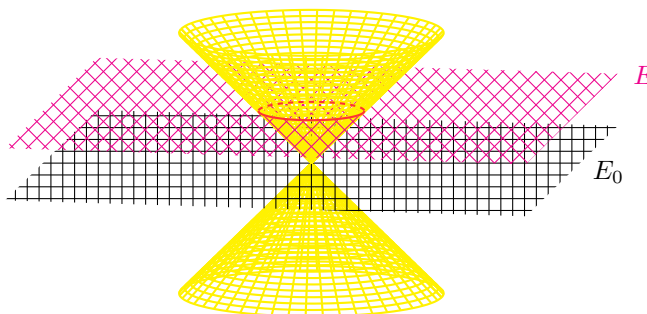


Abb. 216

Satz 4.5.5 (Kegelschnitte) Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Dann gibt es für die Gestalt von $E \cap \mathcal{C}$ genau die folgenden Möglichkeiten:

E	$0 \in E?$	$E \cap \mathcal{C}$
raumartig	ja	$\{0\}$
	nein	Ellipse
lichtartig	ja	Gerade
	nein	Parabel
zeitartig	ja	Geradenkreuz
	nein	Hyperbel

Beweis.

1. Sei E raumartig.

(a) Sei $E = E_0$ ein Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Dann enthält E nur raumartige Vektoren, und der einzige raumartige Vektor in \mathcal{C} ist 0 , also ist

$$E \cap \mathcal{C} = \{0\}.$$

Diese und die folgenden Abbildungen können mit der Maus gedreht werden.

Abb. 217

- (b) Sei $0 \notin E = E_0 + p$. Wähle o.B.d.A. p minkowski-orthogonal zu E_0 , d.h. $\langle p, x \rangle = 0 \forall x \in E_0$. (Die übrigen möglicherweise zunächst vorhandenen Komponenten von p verschieben E_0 nur in sich selbst, weshalb sie getrost außer Acht gelassen werden können.) Dann ist p zeitartig.

Die Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle \big|_{E_0 \times E_0}$ ist positiv definit und natürlich, wie das Minkowski-Produkt auf ganz \mathbb{R}^3 , symmetrisch und bilinear. Es ist sonach ein euklidisches Skalarprodukt auf E_0 .

Nun wählen wir eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von E_0 , die noch mit $\sqrt{|\langle p, p \rangle|}$ skaliert wird, also $b_1, b_2 \in E_0$ mit

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \cdot |\langle p, p \rangle| = -\delta_{ij} \langle p, p \rangle.$$

Ein Punkt $P = p + xb_1 + yb_2 \in E$ liegt gleichzeitig auf dem Lichtkegel genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p + xb_1 + yb_2, p + xb_1 + yb_2 \rangle \\ &= \langle p, p \rangle + x^2 \langle b_1, b_1 \rangle + y^2 \langle b_2, b_2 \rangle \\ &= \langle p, p \rangle (1 - x^2 - y^2) \\ \Leftrightarrow 0 &= 1 - x^2 - y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\in K_1(0). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt: Für die affine Abbildung $f : E \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Translation um $-p$ gefolgt von der linearen Abbildung, die b_1 auf e_1 und b_2 auf e_2 abbildet, gilt

$$f(E \cap \mathcal{C}) = K_1(0),$$

und das heißt nach Korollar 1.7.10:

$$E \cap \mathcal{C} = f^{-1}(K_1(0)) \text{ ist eine Ellipse.}$$

Abb. 218

2. Sei E lichtartig.

- (a) Sei $E = E_0$ ein Untervektorraum von R^3 . Sei $l \in E$ lichtartig. Dann ist auf alle Fälle $\mathbb{R} \cdot l \subset E \cap \mathcal{C}$, und wir müssen uns nur noch fragen, ob es noch weitere lichtartige Vektoren in E gibt.

Wir nehmen an, $l' \in E$ sei lichtartig mit $l' \notin \mathbb{R}l$. Dann sind l, l' linear unabhängig und bilden somit eine Basis von E . Da jede Ebene einen von 0 verschiedenen raumartigen Vektor enthält, nehmen wir uns aus E einen solchen her und nennen ihn q . Wir können q nun in der Basis (l, l') darstellen:

$$q = \alpha l + \beta l' \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &< \langle\langle q, q \rangle\rangle \\ &= \alpha^2 \underbrace{\langle\langle l, l \rangle\rangle}_{=0} + 2\alpha\beta \langle\langle l, l' \rangle\rangle + \beta^2 \underbrace{\langle\langle l', l' \rangle\rangle}_{=0} \\ &= 2\alpha\beta \langle\langle l, l' \rangle\rangle \\ \Rightarrow \quad 2\alpha\beta \langle\langle l, l' \rangle\rangle &> 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Wir wählen nun den Punkt $\tilde{q} := \alpha l - \beta l' \in E$. Wie eben berechnen wir

$$\langle\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle\rangle = -2\alpha\beta \langle\langle l, l' \rangle\rangle \stackrel{(4.10)}{<} 0,$$

also ist \tilde{q} zeitartig. Eine lichtartige Ebene enthält jedoch keine zeitartigen Vektoren, also war unsere Annahme falsch:

$$E \cap \mathcal{C} = \mathbb{R} \cdot l,$$

und das ist eine Gerade.

Abb. 219

- (b) Nun sei $0 \notin E = E_0 + p$. Wieder sei $l \in E_0$ lichtartig. Nach einer Drehung um die x_1 -Achse und eventueller Skalierung von l können wir o.B.d.A. $l = e_1 + e_2$ annehmen.

Mit $l' := e_1 - e_2$ ist (l, e_3, l') eine Basis von \mathbb{R}^3 . Versuchen wir nun, eine Basis von E_0 zu finden, können wir l schon einmal benutzen. Wir suchen also nur noch einen zweiten Basisvektor $b := \beta e_3 + \gamma l'$.

Dann muss für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

$$q = \alpha l + b = \alpha l + \beta e_3 + \gamma l' \in E_0,$$

und da nach 2a E_0 außer $\mathbb{R} \cdot l$ nur raumartige Vektoren enthält, ist

$$0 < \langle\langle q, q \rangle\rangle = \beta^2 + \alpha\gamma \langle\langle l, l' \rangle\rangle = \beta^2 - 2\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 > 2\alpha\gamma \forall \alpha.$$

Wäre nun $\gamma \neq 0$, so setze $\alpha := \frac{\beta^2}{\gamma} \Rightarrow \beta^2 > 2\beta^2$. ζ

Also wählen wir e_3 als zweiten Basisvektor und haben nun (l, e_3) als Basis von E_0 .

Wir können nun analog zu 1b o.B.d.A. annehmen, dass $p = \alpha \cdot l'$ ist für ein $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ein Punkt $P = \alpha l' + x e_3 + y l \in E$ liegt auf dem Lichtkegel, falls

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\langle \alpha l' + x e_3 + y l, \alpha l' + x e_3 + y l \rangle\rangle \\ &= \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} \alpha + 0 + y \\ -\alpha + 0 + y \\ 0 + x + 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha + y \\ -\alpha + y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \\ &= -(y + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 + x^2 \\ &= -y^{\cancel{2}} - 2y\alpha - \alpha^{\cancel{2}} + y^{\cancel{2}} - 2y\alpha + \alpha^{\cancel{2}} + x^2 \\ 0 &= -4y\alpha + x^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x}{4\alpha}, \end{aligned}$$

und das beschreibt (unter Zuhilfenahme einer Affinität wie in 1b) eine Parabel (vgl. (1.29) sowie Satz 1.7.38).

Abb. 220

3. $E = E_0 + p$ sei zeitartig. $q \in E_0$ sei zeitartig, o.B.d.A. sei $q \in H^2$, d.h. $\langle\langle q, q \rangle\rangle = -1$ und q ist zukunftsgerichtet. (Dies wird erreicht durch eine Skalierung von q , gegebenenfalls mit einem negativen Faktor.) Dreht man q noch in die x_1 - x_2 -Ebene und wendet anschließend einen geeigneten Lorentz-Boost an, so erreicht man sogar o.B.d.A. $q = e_1$. Durch eine weitere Drehung um die x_1 -Achse kann nun noch erreicht werden, dass o.B.d.A. $e_2 \in E_0$ ist.

- (a) $p = 0$. Dann ist $xe_1 + ye_2$ ein beliebiges Element aus E , welches genau dann auch in \mathcal{C} liegt, wenn

$$0 = \langle\langle xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2 \rangle\rangle = -x^2 + y^2 \implies y^2 = x^2.$$

Diese Gleichung beschreibt ein Geradenkreuz.

Abb. 221

- (b) Ist $p \neq 0$, so verfahren wir analog zum vorigen Fall, nur dass der beliebige Punkt noch eine x_3 -Komponente besitzt, also $P = xe_1 + ye_2 + \alpha e_3$. Dieser

Punkt liegt in \mathcal{C} , falls

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\langle xe_1 + ye_2 + \alpha e_3, xe_1 + ye_2 + \alpha e_3 \rangle\rangle \\ &= -x^2 + y^2 + \alpha^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 &= 1, \end{aligned}$$

und das ist eine Hyperbelgleichung. □

Abb. 222

Bemerkung 4.5.6 Im Fall, dass E ein zeitartiger Untervektorraum von \mathbb{R}^3 ist, entspricht das Geradenkreuz $E \cap \mathcal{C}$ dem Asymptotenkreuz der Großhyperbel $E \cap H^2$.

Bemerkung 4.5.7 Die Menge der zeitartigen Vektoren $\{x \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle < 0\}$ und die Menge der raumartigen Vektoren ohne 0 $\{x \mid \langle\langle x, x \rangle\rangle > 0\}$ sind offene Teilmengen von \mathbb{R}^3 . „Kleine Störungen“ verändern deshalb zeitartige oder raumartige affine Ebenen nicht in ihrer Art und die Fälle 1 und 3 sind somit stabil. Für die Menge der lichtartigen Vektoren gilt dies nicht, weshalb Fall 2 instabil ist und den Grenzfall zwischen den Fällen 1 und 3 darstellt.

Kapitel 5

Kurventheorie

Wir untersuchen Kurven im n -dimensionalen Raum mit besonderem Schwerpunkt auf ebenen Kurven. Länge und Krümmung werden eingeführt. Wir beweisen den Umlaufsatz für einfach geschlossene Kurven. Wir zeigen die isoperimetrische Ungleichung, die die Länge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve mit dem Flächeninhalt des umlaufenden Gebiets vergleicht.

5.1 Kurven im \mathbb{R}^n

Wir wollen nun die Werkzeuge der Differential- und Integralrechnung benutzen, um Kurven im n -dimensionalen Raum zu beschreiben. Unter einer Kurve stellen wir uns anschaulich ein, in der Regel verbogenes, in den Raum gelegtes Geradenstück vor. Mathematisch drücken wir das folgendermaßen aus:

Definition 5.1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine parametrisierte Kurve heißt *regulär*, falls ihr Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet: $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Das Intervall I aus der Definition kann offen, abgeschlossen oder halbabgeschlossen sein; auch kann I beschränkt oder unbeschränkt sein. Die Bedingung $\dot{c}(t) \neq 0$ stellt sicher, dass sich beim Durchlauf von $t \in I$ der Kurvenpunkt $c(t)$ auch tatsächlich bewegt. Insbesondere wird dadurch die konstante Abbildung $c(t) = c_0$ ausgeschlossen. Das ist sicherlich sinnvoll, denn das Bild dieser Abbildung besteht nur aus dem Punkt c_0 ; nicht gerade das, was man sich unter einer Kurve vorstellt. Sehen wir uns einige Beispiele an.

Beispiel 5.1.2 Eine *Gerade* können wir folgendermaßen als reguläre parametrisierte Kurve schreiben:

$$\begin{aligned} c &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ c(t) &= c_0 + t \cdot v, \end{aligned}$$

wobei $c_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Die Bedingung $\dot{c}(t) = v \neq 0$ ist dann offensichtlich erfüllt.

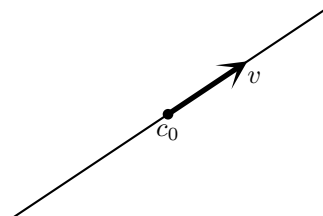


Abb. 223

Beispiel 5.1.3 Eine *Kreislinie* in der Ebene um den Mittelpunkt $(0,0)^T$ mit Radius $r > 0$ sieht folgendermaßen aus:

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}.$$

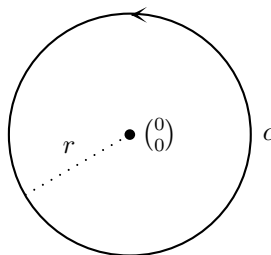


Abb. 224

Der Pfeil in der Skizze gibt die Durchlaufrichtung an. Dieses Beispiel zeigt, dass eine reguläre parametrisierte Kurve nicht injektiv zu sein braucht. Wegen der Periodizität $c(t+2\pi) = c(t)$ wird jeder Bildpunkt unendlich oft durchlaufen. Wir könnten natürlich den Definitionsbereich von c auf ein Periodenintervall einschränken, doch dazu später mehr.

Beispiel 5.1.4 Eine *Schraubenlinie* im 3-dimensionalen Raum kann so parametrisiert werden:

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ h \cdot t \end{pmatrix},$$

wobei $r > 0$ und $h > 0$.

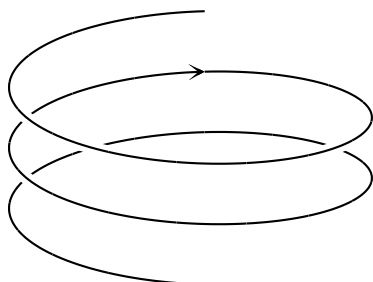


Abb. 225

Beispiel 5.1.5 Die parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, heißt *Neil'sche Parabel*.

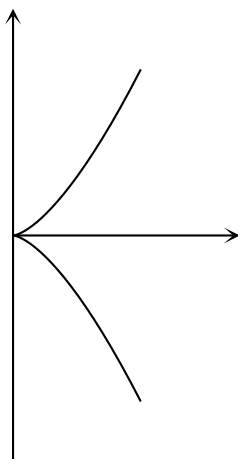


Abb. 226

Obwohl die parametrisierte Kurve glatt ist, hat sie im Ursprung einen „Knick“. Das liegt daran, dass sie nicht regulär ist. In der Tat verschwindet $\dot{c}(t) = (2t, 3t^2)^\top$ genau in $t = 0$.

Beispiel 5.1.6 Die folgende reguläre parametrisierte Kurve wird als *Traktrix* oder auch *Schleppkurve* bezeichnet:

$$c: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \ln \tan(t/2) \end{pmatrix}.$$

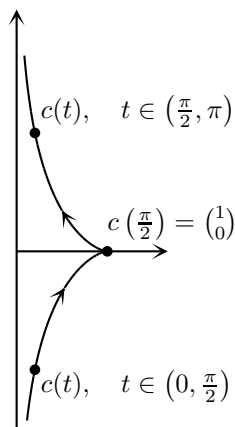


Abb. 227

Mit der angegebenen Funktionsvorschrift ließe sich c auf ganz $(0, \pi)$ definieren. Aber für $t = \frac{\pi}{2}$ gilt $\dot{c}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)^\top$. Daher wäre c auf ganz $(0, \pi)$ nicht mehr regulär. Im Bild sieht man, dass c in $c(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)^\top$ eine Spitze hat. So etwas wird durch unsere Definition einer regulären parametrisierten Kurve ausgeschlossen.

Beispiel 5.1.7 Die *logarithmische Spirale* ist gegeben durch

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} e^{t/10} \cdot \cos t \\ e^{t/10} \cdot \sin t \end{pmatrix}.$$

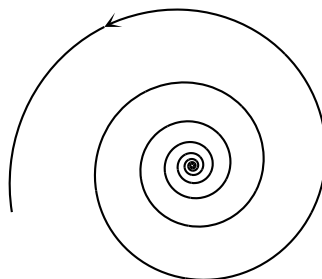


Abb. 228

Eine parametrisierte Kurve ist mehr als nur die Menge der Kurvenpunkte in \mathbb{R}^n , d. h. mehr als nur das Bild $c(I)$ von c . Es wird auch angegeben, wie dieses Bild zu durchlaufen ist. Häufig möchte man diese *Parametrisierung* ändern und dabei die Bildkurve so belassen, wie sie ist. Dazu dient folgende

Definition 5.1.8 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von c ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \rightarrow I$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, so dass sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ unendlich oft differenzierbar sind. Die parametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Umparametrisierung* von c .

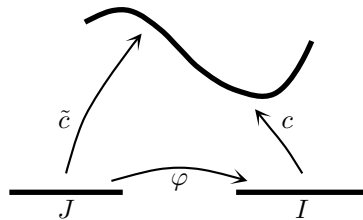


Abb. 229

Wegen $c = \tilde{c} \circ \varphi^{-1}$ kann man c auch wieder aus \tilde{c} zurückgewinnen. Man sollte hier beachten, dass die Ableitung einer Parametertransformation φ nirgends verschwinden kann, denn nach der Kettenregel gilt

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = 1.$$

Damit ist auch sichergestellt, dass eine Umparametrisierung einer regulären parametrisierten Kurve wiederum regulär ist:

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \neq 0.$$

Eine Parametertransformation kann die Richtung, in der die Bildkurve durchlaufen wird, entweder umkehren oder erhalten. Die triviale Parametertransformation $\varphi(t) = t$ beispielsweise ändert nichts an der parametrisierten Kurve, die Parametertransformation $\psi(t) = -t$ dagegen kehrt den Durchlaufsinne um.

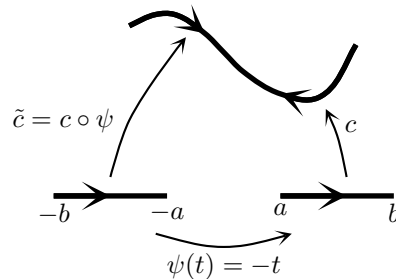


Abb. 230

Definition 5.1.9 Eine Parametertransformation φ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle t , d.h. falls φ streng monoton wächst. Die Parametertransformation φ heißt *orientierungsumkehrend*, falls $\dot{\varphi}(t) < 0$ für alle t , φ also streng monoton fällt.

Jede Parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend, denn gäbe es ein $t_1 \in I$ mit $\dot{\varphi}(t_1) < 0$ und ein $t_2 \in I$ mit $\dot{\varphi}(t_2) > 0$, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz auch ein t_3 zwischen t_1 und t_2 mit $\dot{\varphi}(t_3) = 0$. Das ist aber, wie wir gesehen haben, nicht möglich.

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve, dann nennt man das Bild $c(I)$ auch ihre *Spur*. Offenbar wird jeder regulär parametrisierten Kurve durch ihre Parametrisierung ein Durchlaufsinne zugeordnet, der aber durch eine geeignete Parametertransformation umgekehrt werden kann, bei der sich die Spur nicht ändert.

Definition 5.1.10 Eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven sind also gerade solche, die ihr Bild in \mathbb{R}^n mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Etwas allgemeiner sagt man auch:

Definition 5.1.11 Eine *proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die $\|\dot{c}\|$ konstant (aber nicht unbedingt gleich 1) ist.

Parametrisierungen nach der Bogenlänge sind für viele Zwecke besonders angenehme Parametrisierungen. Aber existieren sie auch?

Proposition 5.1.12 *Zu jeder regulären parametrisierten Kurve c gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ , so dass die Umparametrisierung $c \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Wir wählen $t_0 \in I$ und setzen

$$\psi(s) := \int_{t_0}^s \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Wegen $\psi'(s) = \|\dot{c}(s)\| > 0$ ist ψ streng monoton wachsend und somit injektiv. Daher ist

$$\psi : I \rightarrow J := \psi(I)$$

eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion mit $\varphi := \psi^{-1} : J \rightarrow I$. Dann sind φ und ψ unendlich oft differenzierbar, und für die erste Ableitung von φ haben wir die Formel

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} \quad .$$

Daraus folgt nach der Kettenregel

$$\|(c \circ \varphi)'(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\| = \left\| \frac{\dot{c}(\varphi(t))}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|} \right\| = 1.$$

Somit ist $c \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert. \square

Bemerkung 5.1.13 Der Beweis der Proposition verläuft konstruktiv, er liefert also ein Verfahren, zu einer gegebenen parametrisierten Kurven eine Bogenlängenparametrisierung zu finden.

Parametrisierungen nach der Bogenlänge existieren also. Inwieweit sind sie eindeutig?

Lemma 5.1.14 *Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\varphi : J \rightarrow I$ eine Parametertransformation, bei der die Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ wiederum eine Parametrisierung nach Bogenlänge darstellt, dann ist φ von der Form*

$$\varphi(t) = t + t_0$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, falls c und \tilde{c} gleich orientiert sind. Falls c und \tilde{c} entgegengesetzt orientiert sind, ist sie von der Form

$$\varphi(t) = -t + t_0.$$

Beweis. Es gilt

$$1 = \|\tilde{c}'(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\| = \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot |\dot{\varphi}(t)| = |\dot{\varphi}(t)|.$$

Also ist $\varphi(t) = \pm t + t_0$. \square

Um zu sehen, was nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Länge zu tun haben, müssen wir erst die Länge von Kurven definieren.

Definition 5.1.15 Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Länge von c .

Lemma 5.1.16 *Die Länge parametrisierter Kurven ändert sich nicht bei Umparametrisieren.*

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus der Substitutionsregel. Ist nämlich $\tilde{c} = c \circ \varphi$ eine Umparametrisierung von c , $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} L[\tilde{c}] &= \int_{a'}^{b'} \|(c \circ \varphi)'(t)\| dt \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{c}(\varphi(t))\| \cdot |\dot{\varphi}(t)| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(s)\| ds \\ &= L[c]. \end{aligned}$$

\square

Lemma 5.1.16 besagt, dass die Länge parametrisierter Kurven nicht von der gegebenen Parametrisierung abhängt.

Jetzt verstehen wir auch, warum Parametrisierungen nach der Bogenlänge so bezeichnet werden, denn ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt für jedes Teilintervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

$$L[c|_{[\alpha, \beta]}] = \int_{\alpha}^{\beta} 1 \, dt = \beta - \alpha.$$

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist gerade so lang wie das Parameterintervall.

Die Definition der Länge durch eine Integralformel mag zunächst etwas willkürlich erscheinen. Ein anderer Zugang sieht so aus:

Definition 5.1.17 Ein *Polygon* im \mathbb{R}^n ist ein Tupel $P = (a_0, \dots, a_k)$ von Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$.

Wir stellen uns die Vektoren a_i als die Ecken des Polygons vor und zwei aufeinanderfolgende Ecken a_i und a_{i+1} durch das entsprechende Geradensegment verbunden.

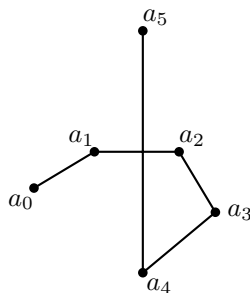


Abb. 231

Da sie Ecken besitzen, sind Polygone keine (regulären parametrisierten) Kurven nach unserer Definition. Aber es ist klar, was die Länge eines solchen Polygons ist, nämlich die Summe der Länge der Geradensegmente:

$$L[P] := \sum_{i=0}^{k-1} \|a_{i+1} - a_i\|.$$

Um die Länge einer parametrisierten Kurve zu definieren, könnte man nun auch diese Kurve durch Polygone annähern und ihre Länge durch den Grenzwert der Polygonlängen erklären, sofern dieser dann existiert. Die folgende Proposition besagt, dass dieser Zugang denselben Längenbegriff liefert.

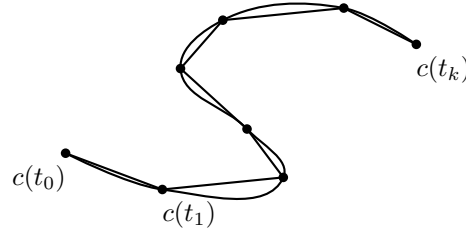


Abb. 232

Proposition 5.1.18 (Längenapproximation durch Polygone) Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann gibt es für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ des Definitionsintervalls mit Feinheit kleiner als δ (d. h. $t_{i+1} - t_i < \delta$ für alle i) gilt:

$$|L[c] - L[P]| < \varepsilon,$$

wobei $P = (c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k))$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein $\varepsilon' \in \left(0, \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{n}(b-a)}\right)$. Nach dem Satz über riemannsche Summen [8, Abschn. 11.8], angewandt auf das Integral

$$L[c] = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt,$$

gibt es zu ε' ein $\delta_0 > 0$, so dass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit kleiner als δ_0 gilt:

$$\left| L[c] - \sum_{i=0}^{k-1} \|\dot{c}(t_{i+1})\| \cdot (t_{i+1} - t_i) \right| < \varepsilon'. \quad (5.1)$$

Die Komponentenfunktionen $\dot{c}_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Ableitung \dot{c} von c sind stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, also sind sie sogar gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Daher gibt es $\delta_j > 0$, so dass

$$|\dot{c}_j(t) - \dot{c}_j(s)| < \varepsilon',$$

wann immer $|t - s| < \delta_j$, $t, s \in [a, b]$.

Wir setzen $\delta := \min \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n\}$. Sei nun eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit kleiner als δ vorgegeben. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\tau_{i,j} \in (t_i, t_{i+1})$, so dass

$$c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i) = \dot{c}_j(\tau_{i,j}) \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| - \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i) \right| \\
&= \left| \left\| \begin{pmatrix} \dot{c}_1(\tau_{i,1}) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(\tau_{i,n}) \end{pmatrix} \right\| (t_{i+1} - t_i) - \|\dot{c}(t_{i+1})\| (t_{i+1} - t_i) \right| \\
&= \left| \left\| \begin{pmatrix} \dot{c}_1(\tau_{i,1}) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(\tau_{i,n}) \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t_{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t_{i+1}) \end{pmatrix} \right\| \right| \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \dot{c}_1(\tau_{i,1}) - \dot{c}_1(t_{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(\tau_{i,n}) - \dot{c}_n(t_{i+1}) \end{pmatrix} \right\| \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^n (\dot{c}_j(\tau_{i,j}) - \dot{c}_j(t_{i+1}))^2} \cdot (t_{i+1} - t_i) \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon' \cdot (t_{i+1} - t_i).
\end{aligned}$$

Beim ersten Ungleichheitszeichen haben wir die „inverse Dreiecksungleichung“ $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ benutzt. Summation über i liefert

$$\begin{aligned}
& \left| L[P] - \sum_{i=0}^{k-1} \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| - \sum_{i=0}^{k-1} \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i) \right| \\
&\leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon' \cdot (b - a). \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}
|L[P] - L[c]| &\leq \left| L[P] - \sum_{i=0}^{k-1} \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{i=0}^{k-1} \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i) - L[c] \right| \\
&\stackrel{(5.1)(5.2)}{\leq} \sqrt{n} \cdot \varepsilon' \cdot (b - a) + \varepsilon' \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1.19 Man kann nun leicht zeigen, dass immer $L[P] \leq L[c]$ gilt (Übung).

Wir erinnern uns an das Hausdorff-Maß (vgl. Abschnitt 2.4), welches wir zur Angabe von Flächeninhalten oder Volumina benutzt haben, und im Falle reeller Intervalle oder der Kreislinie gab uns dieses Maß auch die Größe an, die wir als Länge erwarten. Ist das Hausdorff-Maß einer Kurve (bzw. genauer: der Spur einer Kurve) nun identisch mit ihrer Länge?

Satz 5.1.20 Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$, $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine regulär parametrisierte Kurve. Dann gilt:

$$\mathcal{H}^1(c([a, b])) \leq L[c].$$

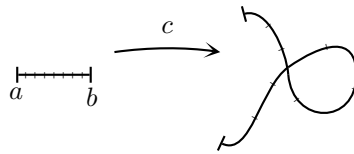


Abb. 233

Beweis. O.B.d.A. sei c nach Bogenlänge parametrisiert.

Wähle eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ der Feinheit kleiner δ und betrachte nun die Überdeckung $\{B_j\}_{j=1, \dots, N}$ mit $B_j := c([t_{j-1}, t_j])$. Dann gilt

$$\text{diam}(B_j) \stackrel{\text{Bem. 5.1.19}}{\leq} L[c|_{[t_{j-1}, t_j]}] = t_j - t_{j-1} < \delta,$$

und daraus erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^1(c([a, b])) &\leq \varpi_1 \cdot \sum_{j=1}^N \left(\frac{\text{diam}(B_j)}{\delta} \right)^1 \\ &= \sum_{j=1}^N \text{diam}(B_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^N L[c|_{[t_{j-1}, t_j]}] \\ &= L[c]. \end{aligned}$$

Lässt man nun $\delta \searrow 0$ gehen, so ergibt sich die Aussage für das Hausdorff-Maß:

$$\mathcal{H}^1(c([a, b])) \leq L[c]. \quad \square$$

Bemerkung 5.1.21 Es kann durchaus vorkommen, dass $\mathcal{H}^1(c([a, b])) < L[c]$.

Beispiel 5.1.22 Sei $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 4\pi]$. Da $c([0, 4\pi]) = c([0, 2\pi]) = K_1(0)$, ist zwar

$$L[c] = 4\pi, \text{ aber } \mathcal{H}^1(c([0, 4\pi])) = \mathcal{H}^1(K_1(0)) = 2\pi < 4\pi.$$

In den meisten (interessanten) Fällen ist jedoch das Hausdorff-Maß tatsächlich mit der Kurvenlänge identisch; dies ist Aussage des folgenden Satzes.

Satz 5.1.23 Sei $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_E)$, sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Kurve mit nur endlich vielen Mehrfachpunkten. Dann gilt

$$\mathcal{H}^1(c([a, b])) = L[c].$$

Beweisskizze.

1. Fall Die Kurve c ist injektiv, besitzt also keine Mehrfachpunkte.



Abb. 234

Man zeigt, dass es genügt, in den Mengen, deren Infima den \mathcal{H}_δ^1 entsprechen, nur solche Überdeckungen $B_j = c([t_{j-1}, t_j])$ zu betrachten, die von Unterteilungen von $[a, b]$ herrühren (wie in Satz 5.1.20). Dann erhält man mit ausreichend kleiner Feinheit $\leq \delta$:

$$L[c] \approx \sum_j \|c(t_j) - c(t_{j-1})\| \approx \sum_j \text{diam}(B_j) \approx \mathcal{H}^1(c([a, b])).$$

2. Fall Die Kurve c enthält Mehrfachpunkte.

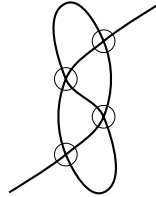


Abb. 235

Dann betrachten wir die Punktmenge, die entsteht, wenn wir kleine Umgebungen um jeden Mehrfachpunkt entfernen. Dadurch erhalten wir endlich viele Teilkurven $c_j = c|_{I_j}$ (in Abbildung 235 sind es 9), für die gilt

$$\begin{aligned} L[c] - \varepsilon &= \sum_j L[c_j] \\ &\stackrel{1. \text{ Fall}}{=} \sum_j \mathcal{H}^1(c_j(I_j)) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Bem. 2.4.6}}{=} \mathcal{H}^1\left(\bigcup_j c_j(I_j)\right)$$

$$\stackrel{\text{Bem. 2.4.3}}{\leq} \mathcal{H}^1\left(c([a, b])\right),$$

wobei ε der Fehler ist, der aus den entfernten Kurvenstücken entsteht. Lässt man diesen nun gegen 0 gehen, indem man den Durchmesser der Umgebungen klein macht, so ergibt sich

$$L[c] \leq \mathcal{H}^1\left(c([a, b])\right),$$

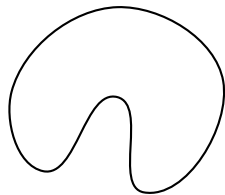
was zusammen mit Satz 5.1.20 die Gleichheit liefert. \square

Definition 5.1.24 Eine parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch mit Periode* L , falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t+L) = c(t)$, $L > 0$, und es kein $0 < L' < L$ gibt, so dass ebenfalls $c(t+L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Periodisch parametrisierte Kurven heißen *geschlossen*.

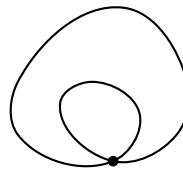
Das Beispiel 5.1.3 ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode $L = 2\pi$. Die Kreislinie ist somit geschlossen.

Nicht jede Parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch. Man kann z. B. eine periodische parametrisierte Kurve so umparametrisieren, dass sie bei jedem Durchlauf der Kurve langsamer wird. Dann wird für jeden Durchlauf ein immer größeres Zeitintervall benötigt. Diese Umparametrisierung ist dann nicht mehr periodisch.

Definition 5.1.25 Eine geschlossene Kurve heißt *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass $c|_{[0, L)}$ injektiv ist.



einfach geschlossen



geschlossen, aber
nicht einfach geschlossen

Abb. 236

Die Bedingung sagt also, dass die Kurve keine Selbstschnitte hat, abgesehen davon, dass sie sich schließt. Da Parametertransformationen bijektiv sind, gilt die Injektivitätsbedingung nicht nur für *eine* periodische Parametrisierung der geschlossenen Kurve, sondern automatisch für *alle* ihre periodischen Parametrisierungen. Die Wahl der periodischen Parametrisierung der geschlossenen Kurve spielt also keine Rolle für die Frage, ob sie einfach geschlossen ist.

5.2 Ebene Kurven

Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf solche Kurven konzentrieren, die in der Ebene verlaufen, d. h. ihre Werte in \mathbb{R}^2 annehmen.

Definition 5.2.1 Eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *ebene parametrisierte Kurve*. Analog sind *ebene reguläre parametrisierte Kurven* definiert.

Definition 5.2.2 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre parametrisierte Kurve. Dann heißt die Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

die *Krümmung* von c .

Die geometrische Bedeutung der Krümmung werden wir gleich untersuchen. Vorher zeigen wir, dass die Krümmung bei orientierungserhaltenden Parametertransformationen im Wesentlichen unverändert bleibt, während sie bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Genauer heißt das:

Lemma 5.2.3 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre parametrisierte Kurve mit Krümmung κ . Ist $\varphi : J \rightarrow I$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt für die Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi$ mit Krümmung $\tilde{\kappa}$

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi.$$

Ist φ orientierungsumkehrend, so ist

$$\tilde{\kappa} = -\kappa \circ \varphi.$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$. Kettenregel und Produktregel liefern $\ddot{\tilde{c}}(t) = \ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t)$. Also folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(t) &= \frac{\det(\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t), \ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t))}{\|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\|^3} \\ &= \frac{\det(\dot{c}(\varphi(t)), \ddot{c}(\varphi(t))) \cdot \dot{\varphi}(t)^3}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|^3 \cdot |\dot{\varphi}(t)|^3} + \frac{\det(\dot{c}(\varphi(t)), \dot{c}(\varphi(t))) \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)}{\|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\|^3} \\ &= \frac{\det(\dot{c}(\varphi(t)), \ddot{c}(\varphi(t))) \cdot \dot{\varphi}(t)^3}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|^3 \cdot |\dot{\varphi}(t)|^3}, \end{aligned}$$

da die Matrix $(\dot{c}(\varphi(t)), \dot{c}(\varphi(t)))$ Rang 1 und somit verschwindende Determinante hat. Es folgt

$$\tilde{\kappa}(t) = \kappa(\varphi(t)) \cdot \frac{\dot{\varphi}(t)^3}{|\dot{\varphi}(t)|^3}.$$

Im orientierungserhaltenden Fall ist $\frac{\dot{\varphi}(t)^3}{|\dot{\varphi}(t)|^3} = 1$, im orientierungsumkehrenden Fall $\frac{\dot{\varphi}(t)^3}{|\dot{\varphi}(t)|^3} = -1$. □

Um die geometrische Bedeutung der Krümmung zu verstehen, betrachten wir den Fall ebener parametrisierter Kurven, die nach Bogenlänge parametrisiert sind. Sei also $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir definieren das *Normalenfeld* durch

$$n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{c}(t).$$

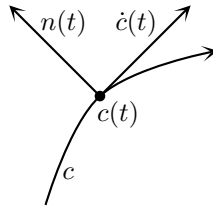


Abb. 237

Die Definition ist gerade so gemacht, dass $(\dot{c}(t), n(t))$ stets eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 bilden. Mit anderen Worten, wir drehen den Geschwindigkeitsvektor um 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn.

Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \equiv 1.$$

Differentiation dieser Gleichung liefert

$$0 \equiv \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle + \langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle.$$

Also stehen $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ senkrecht aufeinander. Somit ist $\ddot{c}(t)$ ein Vielfaches des Normalenvektors $n(t)$,

$$\ddot{c}(t) = \alpha(t) \cdot n(t)$$

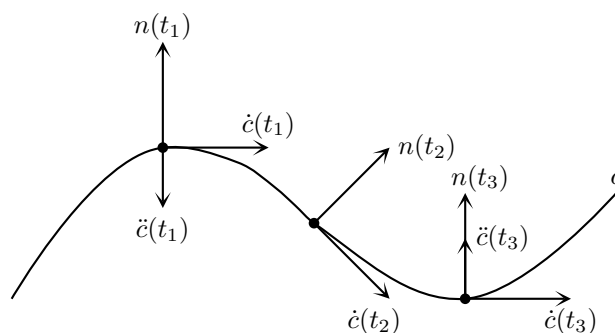
für irgendwelche Koeffizienten $\alpha(t)$. Wir berechnen die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \det(\dot{c}(t), \alpha(t) \cdot n(t)) = \alpha(t) \cdot \det(\dot{c}(t), n(t)) = \alpha(t),$$

wobei wir $\|\dot{c}(t)\| = 1$ und $\det(\dot{c}(t), n(t)) = 1$ benutzt haben. Der Koeffizient $\alpha(t)$ ist also gerade die Krümmung $\kappa(t)$, d. h.

$$\ddot{c}(t) = \kappa(t) \cdot n(t). \quad (5.3)$$

Die Krümmung ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve von einer Geraden abweicht. Ist nämlich c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, so ist c eine Gerade genau dann, wenn $\ddot{c} \equiv 0$, d. h. wenn $\kappa \equiv 0$. Die Krümmung ist positiv, wenn sich die Kurve in Richtung ihres Normalenvektors krümmt, d. h. in Durchlaufrichtung nach links, und negativ, wenn sie sich nach rechts krümmt.



$$\kappa(t_1) < 0 \quad \kappa(t_2) = 0 \quad \kappa(t_3) > 0$$

Abb. 238

Beispiel 5.2.4 Betrachten wir die Kreislinie $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$, parametrisiert durch $c(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))^T$. Diese Parametrisierung ist proportional zur Bogenlänge, aber nur im Fall $r = 1$ nach Bogenlänge, denn $\dot{c}(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t))^T$ und somit $\|\dot{c}(t)\| = r$. Aus $\ddot{c}(t) = (-r \cos(t), -r \sin(t))^T$ folgt

$$\kappa(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} -r \sin(t) & -r \cos(t) \\ r \cos(t) & -r \sin(t) \end{pmatrix}}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

In diesem Fall ist die Krümmung konstant gleich $1/r$.

Beispiel 5.2.5 Wir berechnen die Krümmung der Ellipse $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det \begin{pmatrix} -a \sin(t) & -a \cos(t) \\ b \cos(t) & -b \sin(t) \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix} \right\|^3} \\ &= \frac{ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{a^3(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ die *numerische Exzentrizität* der Ellipse ist. Ist $a = b =: r$, d.h. ist die Ellipse ein Kreis, liefert auch diese Formel $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

Bemerkung 5.2.6 Wir kennen nun den Flächeninhalt (siehe Beispiel 2.4.27) und die Krümmung der Ellipse. Da scheint es uns ein Leichtes, nun endlich auch den Umfang der Ellipse zu berechnen:

$$\begin{aligned} L[E] &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(b^2 - a^2) \cos^2(t) + a^2} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral lässt sich jedoch nicht analytisch lösen. Aufgrund seiner Bedeutung hat es aber einen Namen bekommen: Es heißt *elliptisches Integral*.

Proposition 5.2.7 (Frenet-Gleichungen) Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir setzen $v := \dot{c}$. Sei κ die Krümmung von c und sei n der Normalenvektor. Dann gilt:

$$(\dot{v}(t), \dot{n}(t)) = (v(t), n(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Gleichung $\dot{v} = \kappa \cdot n$ ist gerade Gleichung (5.3). Durch Differentiation der Gleichung $\langle n, n \rangle \equiv 1$ schließen wir wie oben, dass $\dot{n}(t)$ senkrecht auf $n(t)$ steht und daher ein Vielfaches von $v(t)$ sein muss, $\dot{n}(t) = \alpha(t) \cdot v(t)$. Wir differenzieren $\langle n, v \rangle \equiv 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{n}, v \rangle + \langle n, \dot{v} \rangle \\ &= \langle \alpha \cdot v, v \rangle + \langle n, \kappa \cdot n \rangle \\ &= \alpha + \kappa. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha = -\kappa$ und damit $\dot{n} = -\kappa \cdot v$. □

5.3 Der Umlaufsatz

Lemma 5.3.1 Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (die sogenannte Winkelfunktion), so dass

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Sind ϑ_1 und ϑ_2 zwei solche Funktionen, so unterscheiden sie sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ konstant. Insbesondere ist $\vartheta(b) - \vartheta(a)$ eindeutig durch c festgelegt.

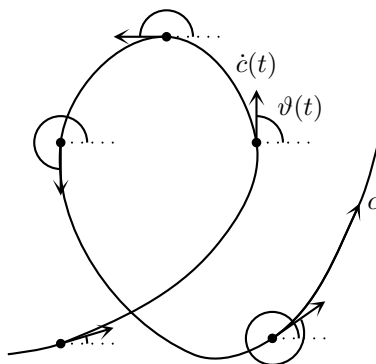


Abb. 239

Die Zahl $\vartheta(t)$ misst den Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(t)$ und der x -Achse. Dieses Winkelmaß ist allerdings nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig. Jeder Einheitsvektor kann in der Form $(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))^T$ geschrieben werden. Die wichtige Aussage dieses Lemmas besteht darin, dass der Winkel ϑ als stetige, ja sogar als glatte, Funktion von t gewählt werden kann. Natürlich könnte man den Winkel eindeutig festlegen, indem man z. B. verlangt, dass er im Intervall $[0, 2\pi)$ liegt. Aber dann hätte die Funktion ϑ an den Stellen Sprünge, an denen der Geschwindigkeitsvektor einen Umlauf vollendet hat.

Beweis. a) Wir betrachten zunächst den Fall, dass das Bild $\dot{c}([a, b])$ ganz in einem der folgenden vier Halbkreise enthalten ist:

$$S_R := \{(x, y)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, \quad S_L := \{(x, y)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}, \\ S_O := \{(x, y)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad S_U := \{(x, y)^T \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}.$$

Dabei steht S_R für rechter Halbkreis, S_L für linker, S_O für oberer und S_U für unterer. Sei das Bild z. B. in S_R . Das bedeutet $\dot{c}^1 > 0$. Für unsere Funktion ϑ muss also gelten

$$\frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)} = \frac{\sin(\vartheta(t))}{\cos(\vartheta(t))} = \tan(\vartheta(t)).$$

Also ist

$$\vartheta(t) = \arctan\left(\frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)}\right) + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Dabei ist k konstant, da ϑ sonst nicht stetig wäre. Man sieht an der Formel auch, dass ϑ sogar glatt ist. Wird der Anfangswert $\vartheta(a)$ vorgegeben, so ist k und damit auch ϑ eindeutig festgelegt. Den Fall der anderen drei Halbkreise behandelt man ähnlich.

b) Nun lassen wir die Voraussetzung fallen, dass das Bild $\dot{c}([a, b])$ ganz in einem Halbkreis enthalten sein soll. Wir unterteilen das kompakte Intervall $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, so dass jedes $\dot{c}([t_i, t_{i+1}])$ in einem der vier Halbkreise enthalten ist. Wir können $\vartheta(a)$ vorgeben und erhalten nach a) ein eindeutiges glattes $\vartheta : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist $\vartheta(t_1)$ festgelegt und wir erhalten erneut

nach a) eine eindeutige glatte Fortsetzung $\vartheta : [a, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir fahren induktiv fort und erhalten schließlich ein glattes $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Die einzige Wahl, die wir gemacht haben, betrifft den Startwert $\vartheta(a)$. Er ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig. Damit ist auch ϑ insgesamt bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig. \square

Definition 5.3.2 Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, periodisch mit Periode L . Sei $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Lemma 5.3.1. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi} (\vartheta(L) - \vartheta(0))$$

Umlaufzahl von c .

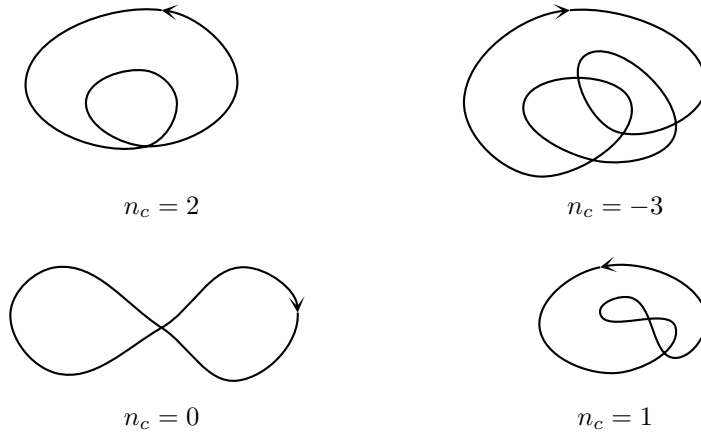


Abb. 240

Dass die Winkelfunktion aus Lemma 5.3.1 nur bis auf einen konstanten Summanden $2k\pi$ eindeutig ist, ist für die Definition der Umlaufzahl ohne Belang, da dieser Summand bei der Differenzbildung $\vartheta(L) - \vartheta(0)$ wieder wegfällt.

Beispiel 5.3.3 Der Kreis vom Radius $r > 0$ hat die Bogenlängenparametrisierung $c(t) = (r \cdot \cos(t/r), r \cdot \sin(t/r))^T$ mit Periode $L = 2\pi r$. Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t/r) \\ \cos(t/r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t/r + \pi/2) \\ \sin(t/r + \pi/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Winkelfunktion $\vartheta(t) = t/r + \pi/2$ und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi} (\vartheta(2\pi r) - \vartheta(0)) = 1.$$

Lemma 5.3.4 Seien $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L . Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_1} = n_{c_2}.$$

Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_1} = -n_{c_2}.$$

Beweis. Nach Lemma 5.1.14 gilt für die Parametertransformation φ mit $c_1 = c_2 \circ \varphi$

$$\varphi(t) = \pm t + t_0,$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob die Parametertransformation die Orientierung erhält oder umkehrt. Ist ϑ_2 eine Winkelfunktion für c_2 wie in Lemma 5.3.1, so ist, im orientierungserhaltenden Fall, $\vartheta_1 := \vartheta_2 \circ \varphi$ eine solche für c_1 , denn

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \dot{c}_2(t + t_0) \\ &= (\cos(\vartheta_2(t + t_0)), \sin(\vartheta_2(t + t_0)))^\top. \end{aligned}$$

Mit ϑ_1 ist aber auch $\tilde{\vartheta}_1$ eine Winkelfunktion für c_1 , wobei $\tilde{\vartheta}_1(t) := \vartheta_1(t + L)$ ist und L die Periode von c_1 . Es folgt

$$\begin{aligned} n_{c_2} - n_{c_1} &= (\vartheta_2(L) - \vartheta_2(0)) - (\vartheta_1(L) - \vartheta_1(0)) \\ &= \vartheta_1(L - t_0) - \vartheta_1(-t_0) - \vartheta_1(L) + \vartheta_1(0) \\ &= (\tilde{\vartheta}_1(-t_0) - \tilde{\vartheta}_1(0)) - (\vartheta_1(-t_0) - \vartheta_1(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im orientierungsumkehrenden Fall sieht man, dass für eine Winkelfunktion ϑ_2 für c_2 die Funktion $\vartheta_1(t) := \vartheta_2(-t + t_0) + \pi$ eine Winkelfunktion für c_1 ist, denn dann ist $\varphi(t) = -t + t_0$ und somit

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= -\dot{c}_2(-t + t_0) \\ &= -(\cos(\vartheta_2(-t + t_0)), \sin(\vartheta_2(-t + t_0)))^\top \\ &= (\cos(\vartheta_2(-t + t_0) + \pi), \sin(\vartheta_2(-t + t_0) + \pi))^\top. \end{aligned}$$

Man folgert

$$\begin{aligned} n_{c_2} + n_{c_1} &= (\vartheta_2(L) - \vartheta_2(0)) + (\vartheta_1(L) - \vartheta_1(0)) \\ &= (\vartheta_1(-L + t_0) - \pi) - (\vartheta_1(t_0) - \pi) + \vartheta_1(L) - \vartheta_1(0) \\ &= (\vartheta_1(-L + t_0) - \vartheta_1(0)) - (\tilde{\vartheta}_1(-L + t_0) - \tilde{\vartheta}_1(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Das Lemma zeigt, dass die Umlaufzahl bei orientierungserhaltender Parametertransformation unverändert bleibt. Bei Orientierungsumkehr wechselt die Umlaufzahl ihr Vorzeichen.

Ferner können wir feststellen, dass die Umlaufzahl stets eine *ganze* Zahl ist. Aus $\cos(\vartheta(L)) = \cos(\vartheta(0))$ und $\sin(\vartheta(L)) = \sin(\vartheta(0))$ folgt nämlich $e^{i\vartheta(L)} = e^{i\vartheta(0)}$ und damit $\vartheta(L) - \vartheta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Nun liegt es nahe, einen Zusammenhang zwischen Umlaufzahl und Krümmung zu vermuten. Krümmt sich die Kurve lange genug nach links ($\kappa > 0$), so sollte sie irgendwann einen Umlauf vollendet haben und einen positiven Beitrag zur Umlaufzahl geliefert haben. Entsprechend sollte Krümmung nach rechts ($\kappa < 0$) einen negativen Beitrag zur Umlaufzahl liefern. In der Tat gilt

Satz 5.3.5 *Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode L . Sei $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von c . Dann gilt*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt.$$

Beweis. Wir schreiben gemäß Lemma 5.3.1 $\dot{c}(t) = (\cos(\vartheta(t)), \sin(\vartheta(t)))^\top$. Differentiation ergibt $\ddot{c}(t) = (-\sin(\vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t), \cos(\vartheta(t)) \cdot \dot{\vartheta}(t))^\top$. Andererseits gilt $\ddot{c}(t) = \kappa(t) \cdot n(t) = \kappa(t) \cdot (-\sin(\vartheta(t)), \cos(\vartheta(t)))^\top$. Daraus folgt

$$\dot{\vartheta}(t) = \kappa(t). \quad (5.4)$$

Die Krümmung gibt also gerade die Winkeländerung des Geschwindigkeitsvektors \dot{c} mit einer festen Achse an. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert wie gewünscht

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{1}{2\pi} (\vartheta(L) - \vartheta(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L \dot{\vartheta}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt. \end{aligned}$$

□

Es drängt sich uns der Eindruck auf, dass eine geschlossene ebene Kurve, deren Umlaufzahl einen Betrag von wenigstens zwei hat, Selbstschnitte haben muss. Vollführt die Kurve zwei oder mehr Umläufe, bevor sie sich schließt, so muss sie sich selbst durchdringen. Dieser Eindruck ist korrekt, wie folgender Satz besagt:

Satz 5.3.6 (Umlaufsatz) *Eine nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder -1 .*

Zum Beweis des Umlaufsatzes benötigen wir zunächst eine Verallgemeinerung von Lemma 5.3.1.

Definition 5.3.7 Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in X$. Dann heißt X *sternförmig* bezüglich x_0 , falls für jeden Punkt $x \in X$ auch die Strecke $\overline{xx_0}$ ganz in X enthalten ist, d. h. für alle $t \in [0, 1]$ gilt $tx + (1-t)x_0 \in X$.

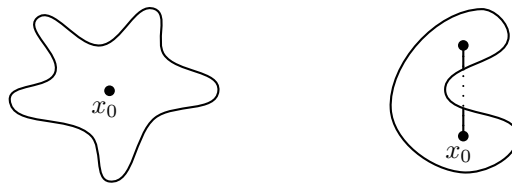
sternförmig bzgl. x_0 nicht sternförmig bzgl. x_0

Abb. 241

Lemma 5.3.8 (Liftungslemma) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bzgl. x_0 und $e : X \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, dann existiert eine stetige Abbildung $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix}$$

für alle $x \in X$. Die Abbildung ϑ ist durch Vorgabe von $\vartheta(x_0) = \vartheta_0$ eindeutig bestimmt.

Beweis des Liftungslemmas. a) Betrachten wir zunächst den Fall

$$n = 1, \quad X = [0, 1] \quad \text{und} \quad x_0 = 0.$$

Dies ist im Wesentlichen Lemma 5.3.1, nur dass wir \dot{c} durch e ersetzen. Da hier e nur als stetig vorausgesetzt wird, ist ϑ natürlich auch nur stetig und i. Allg. nicht C^∞ . Erinnern wir uns kurz an den Beweis:

Wir unterteilen das Intervall $[0, 1]$ in Teilintervalle, die unter e jeweils ganz in einen der vier Halbkreise abgebildet werden. Dort kann man mit Hilfe des Arkustangens oder des Arkuskotangens die Funktion ϑ explizit hinschreiben. Sie ist durch den Startwert $\vartheta(0)$ und die Stetigkeitsforderung eindeutig bestimmt.

b) Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$ eine allgemeine sternförmige Menge, $x_0 \in X$. Sei $x \in X$. Wegen der Sternförmigkeit von X liegt die Strecke von x_0 nach x ganz in X und wir können die stetige Abbildung

$$e_x : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad e_x(t) := e(tx + (1-t)x_0),$$

bilden. Nach a) gibt es genau ein stetiges $\vartheta_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vartheta_x(0) = \vartheta_0$ und $e_x(t) = (\cos(\vartheta_x(t)), \sin(\vartheta_x(t)))^\top$. Gibt es eine Abbildung ϑ wie in der Behauptung von Lemma 5.3.8, so muss wegen der Eindeutigkeit von ϑ_x gelten

$$\vartheta_x(t) = \vartheta(tx + (1-t)x_0).$$

Insbesondere gilt dann $\vartheta(x) = \vartheta_x(1)$. Damit ist die Eindeutigkeit von ϑ bewiesen.

c) Zum Beweis der Existenz setzen wir $\vartheta(x) := \vartheta_x(1)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_x(1)) \\ \sin(\vartheta_x(1)) \end{pmatrix} = e_x(1) = e(x)$$

und $\vartheta(x_0) = \vartheta_0$. Es ist lediglich noch die Stetigkeit von $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$ zu überprüfen.

Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$, so dass e_x , eingeschränkt auf ein Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$, stets ganz in einem der vier offenen Halbkreise verläuft. Wegen der Stetigkeit von e gilt für alle $y \in X$ nahe genug bei x für alle $t \in [0, 1]$

$$\|e_x(t) - e_y(t)\| < \varepsilon.$$

Ist ε klein genug, so ist auch e_y , eingeschränkt auf ein Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$, stets ganz in demselben der vier offenen Halbkreise wie e_x . Das bedeutet auch, dass wir für e_y dieselbe Unterteilung von $[0, 1]$ nehmen können wie für e_x . Durch eine Induktion über die Anzahl N der erforderlichen Teilintervalle zeigt man nun leicht, dass im Fall des linken oder rechten Halbkreises

$$\vartheta_x(t) = \arctan\left(\frac{e_{x,2}(t)}{e_{x,1}(t)}\right) + 2k\pi$$

und

$$\vartheta_y(t) = \arctan\left(\frac{e_{y,2}(t)}{e_{y,1}(t)}\right) + 2k\pi$$

gilt, wobei das $k \in \mathbb{Z}$ für x und y dasselbe ist. Hier haben wir $e = (e_1, e_2)^\top$ geschrieben. Im Fall des oberen und unteren Halbkreises haben wir die entsprechenden Formeln

$$\vartheta_x(t) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{e_{x,1}(t)}{e_{x,2}(t)}\right) + 2k\pi$$

und

$$\vartheta_y(t) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{e_{y,1}(t)}{e_{y,2}(t)}\right) + 2k\pi.$$

Insbesondere gilt, je nach Halbkreis,

$$\vartheta(x) - \vartheta(y) = \arctan\left(\frac{e_2(x)}{e_1(x)}\right) - \arctan\left(\frac{e_2(y)}{e_1(y)}\right)$$

bzw.

$$\vartheta(x) - \vartheta(y) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{e_1(x)}{e_2(x)}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{e_1(y)}{e_2(y)}\right).$$

Die Stetigkeit von e , \arctan und arcctg liefert nun die Stetigkeit von ϑ . \square

Bemerkung 5.3.9 Ist die Abbildung $e : X \rightarrow S^1$ nicht surjektiv, so lässt sich die Abbildung $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$ viel leichter angeben. Sei etwa $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))^\top$ nicht im Bild von e . Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\Psi_k : (\varphi + 2\pi k, \varphi + 2\pi(k+1)) \rightarrow S^1 - (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^\top, \quad \Psi_k(t) = (\cos(t), \sin(t))^\top,$$

ein Homöomorphismus. Dann ist $\vartheta := \Psi_k^{-1} \circ e : X \rightarrow (\varphi + 2\pi k, \varphi + 2\pi(k+1)) \subset \mathbb{R}$ stetig und erfüllt

$$e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix}.$$

Das k ist dann durch die Bedingung $\vartheta(x_0) = \vartheta_0$ eindeutig festgelegt. Insbesondere gilt dann für alle $x_1, x_2 \in X$, dass $|\vartheta(x_1) - \vartheta(x_2)| < 2\pi$. \square

Nach diesen technischen Vorbereitungen können wir nun zum Beweis des Umlaufsatzes kommen.

Beweis des Umlaufsatzes. a) Sei c eine periodische Parametrisierung mit Periode L . Sei $x_0 := \max\{c^1(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Da die Spur von c kompakt ist, wird das Maximum auch tatsächlich angenommen. Die Gerade $\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0\}$ schneidet die Spur von c in einem Punkt p . Durch eine Parametertransformation der Form $t \mapsto t + t_0$ können wir erreichen, dass $c(0) = p$.

Sei G die Gerade, die durch $s \mapsto p + s \cdot (1, 0)^\top$ parametrisiert wird. Auf der Halbgeraden zu $s > 0$ liegen dann keine Punkte von c mehr. Falls erforderlich, führen wir die Parametertransformation $t \mapsto -t$ durch, um zu erreichen, dass $\dot{c}(0) = (0, 1)^\top$. Diese Transformation kehrt die Orientierung um und verändert daher das Vorzeichen der Umlaufzahl, was für die Behauptung jedoch ohne Belang ist.

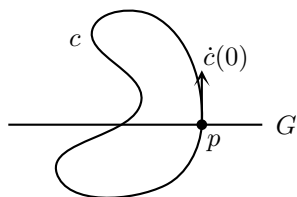


Abb. 242

b) Wir setzen $X := \{(t_1, t_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$. Dann ist X eine bzgl. $(0, 0)^\top$ sternförmige Menge.

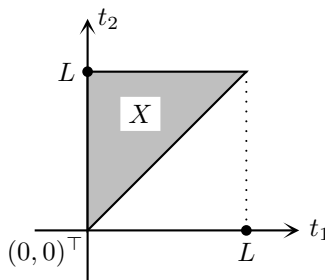


Abb. 243

Wir betrachten die stetige Abbildung

$$e : X \rightarrow S^1,$$

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|}, & t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, L) \\ \dot{c}(t), & t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0), & (t_1, t_2) = (0, L) \end{cases}$$

Man beachte, dass e nur deshalb wohldefiniert ist, weil c als *einfach* geschlossen vorausgesetzt wurde. Sonst hätte im ersten Zweig der Definition $c(t_1) = c(t_2)$ vorkommen können.

Wir wählen nun zu e eine Funktion $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$ wie im Liftungslemma 5.3.8. Wegen $e(t, t) = \dot{c}(t)$ ist $t \mapsto \vartheta(t, t)$ eine Winkelfunktion wie in Lemma 5.3.1. Also gilt für die Umlaufzahl

$$2\pi n_c = \vartheta(L, L) - \vartheta(0, 0) = \vartheta(L, L) - \vartheta(0, L) + \vartheta(0, L) - \vartheta(0, 0). \quad (5.5)$$

c) Wenn für ein $t \in (0, L)$ gelten würde, dass $e(0, t) = (1, 0)^\top$, dann wäre $c(t)$ auf dem rechten Halbstrahl von G im Widerspruch zu a). Außerdem ist $(1, 0)^\top$ senkrecht zu $(0, 1)^\top = \dot{c}(0) = e(0, 0) = -e(0, L)$. Somit ist $(1, 0)^\top$ nicht im Bild der Abbildung $t \mapsto e(0, t)$. Wegen der Bemerkung 5.3.9 nimmt $t \mapsto \vartheta(0, t)$ sein Bild in einem Intervall der Form $(2\pi k, 2\pi(k+1))$ an, $k \in \mathbb{Z}$. Aus $e(0, L) = -\dot{c}(0) = (0, -1)^\top$ folgt $\vartheta(0, L) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ und wegen $e(0, 0) = \dot{c}(0) = (0, 1)^\top$ ist $\vartheta(0, 0) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Somit gilt

$$\vartheta(0, L) - \vartheta(0, 0) = \pi.$$

Analog ist $(-1, 0)^\top$ nicht im Bild der Abbildung $t \mapsto e(t, L)$ und wir erhalten

$$\vartheta(L, L) - \vartheta(0, L) = \pi.$$

Aus (5.5) folgt

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi. \quad \square$$

5.4 Der Vierscheitelsatz

Definition 5.4.1 Eine ebene Kurve heißt *konvex*, falls für jeden ihrer Punkte gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

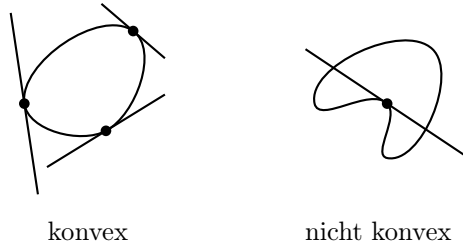


Abb. 244

Ist c eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und n das Normalenfeld längs c , so sagt die Konvexitätsbedingung für den Punkt $c(t_0)$:

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad (5.6)$$

für alle t oder

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \quad (5.7)$$

für alle t .

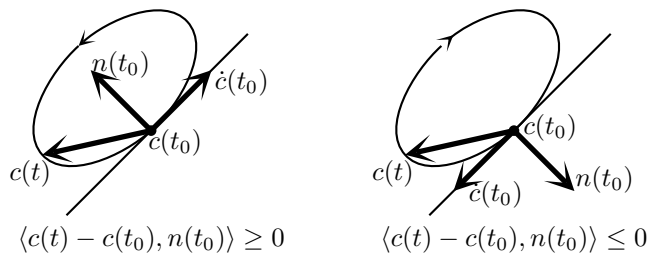


Abb. 245

Apriori könnte man bei einer konvexen Kurve für manche t_0 die Bedingung (5.6) benötigen, für andere t_0 dagegen (5.7). Tatsächlich tritt das aber nicht auf: Gilt nämlich bei einer konvexen Kurve $\langle c(t) - c(t_1), n(t_1) \rangle \geq 0$ für alle t und $\langle c(t) - c(t_2), n(t_2) \rangle \leq 0$ für alle t , so existiert aus Stetigkeitsgründen ein t_3 zwischen t_1 und t_2 derart, dass $\langle c(t) - c(t_3), n(t_3) \rangle = 0$ für alle t . Dann aber muss c eine Gerade sein und für alle t_0 sind sowohl (5.6) als auch (5.7) erfüllt. Wir haben bewiesen:

Lemma 5.4.2 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Normalenfeld n . Dann ist c genau dann konvex, wenn für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$$

oder für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0. \quad \square$$

Die Intuition legt nahe, dass sich eine konvexe Kurve immer in dieselbe Richtung, immer nach links oder immer nach rechts, krümmt. In der Tat gilt:

Satz 5.4.3 Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve. Sei $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung. Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Winkelfunktion wie in Lemma 5.3.1. Wir wissen bereits nach (5.4) $\dot{\vartheta} = \kappa$.

a) Sei jetzt c konvex. Wir haben zu zeigen, dass κ das Vorzeichen nicht wechselt. Gemäß Lemma 5.4.2 können wir annehmen, dass für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0.$$

Der Fall $\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0$ wird analog behandelt und führt zum entgegengesetzten Vorzeichen von κ . In unserem Fall zeigen wir $\kappa(t_0) \geq 0$ für alle t_0 . Wir führen für c eine Taylorentwicklung durch:

$$c(t) = c(t_0) + \dot{c}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{c}(t_0)(t - t_0)^2 + R(t),$$

wobei das Restglied einer Abschätzung der Form $\|R(t)\| \leq K \cdot |t - t_0|^3$ genügt. Skalarmultiplikation mit $n(t_0)$ liefert wegen $\langle \dot{c}(t_0), n(t_0) \rangle = 0$:

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \langle \ddot{c}(t_0), n(t_0) \rangle (t - t_0)^2 + \langle R(t), n(t_0) \rangle.$$

Wir dividieren für $t \neq t_0$ durch das positive $(t - t_0)^2$ und erhalten

$$0 \leq \frac{1}{2} \langle \ddot{c}(t_0), n(t_0) \rangle + \frac{\langle R(t), n(t_0) \rangle}{(t - t_0)^2} = \frac{1}{2} \kappa(t_0) + \frac{\langle R(t), n(t_0) \rangle}{(t - t_0)^2}.$$

Nun ist

$$\left| \frac{\langle R(t), n(t_0) \rangle}{(t - t_0)^2} \right| \leq \frac{\|R(t)\| \|n(t_0)\|}{(t - t_0)^2} \leq \frac{K \cdot |t - t_0|^3 \cdot 1}{(t - t_0)^2} = K \cdot |t - t_0|.$$

Der Grenzübergang $t \rightarrow t_0$ liefert also

$$\frac{\langle R(t), n(t_0) \rangle}{(t - t_0)^2} \rightarrow 0$$

und somit

$$\kappa(t_0) \geq 0.$$

b) Sei jetzt $\kappa \geq 0$. Wir zeigen, dass die Kurve konvex ist. Wäre die Kurve nicht konvex, so gäbe es ein t_0 derart, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle,$$

sowohl negative als auch positive Werte annimmt. Wegen der Periodizität von c nimmt φ das Minimum in einem Punkt t_1 an und das Maximum in einem t_2 . Es gilt mithin

$$\varphi(t_1) < 0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_2). \quad (5.8)$$

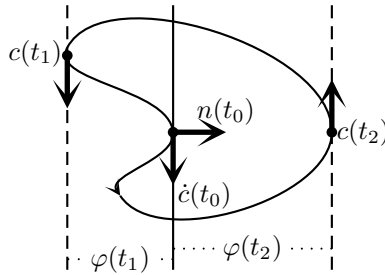


Abb. 246

Aus $\dot{\varphi}(t_1) = 0$ folgt $\langle \dot{c}(t_1), n(t_0) \rangle = 0$. Also ist $\dot{c}(t_1) = \pm \dot{c}(t_0)$. Analog folgt $\dot{c}(t_2) = \pm \dot{c}(t_0)$. Von den drei Einheitsvektoren $\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_1)$ und $\dot{c}(t_2)$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen. Wir wählen $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass

$$\dot{c}(s_1) = \dot{c}(s_2).$$

Es gilt also $\vartheta(s_2) - \vartheta(s_1) = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Aus $\dot{\vartheta} = \kappa \geq 0$ folgt, dass ϑ monoton wächst und somit $\vartheta(s_2) - \vartheta(s_1) \geq 0$. Daher ist $k \in \mathbb{N}_0$. Analog folgt $\vartheta(s_1 + L) - \vartheta(s_2) = 2\pi l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$. Für die Umlaufzahl folgt $n_c = k + l (\geq 0)$. Nach dem Umlaufsatz ist dann $n_c = 1$. Also muss $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Sei etwa $k = 0$. Es folgt $\kappa = \dot{\vartheta} = 0$ auf $[s_1, s_2]$. Somit parametrisiert c auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade. Also gilt für alle $s \in [s_1, s_2]$

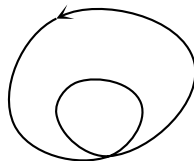
$$c(s) = c(s_1) + (s - s_1) \cdot \dot{c}(s_1) = c(s_1) \pm (s - s_1) \cdot \dot{c}(t_0).$$

Dann erhalten wir für die Funktion φ und $s \in [s_1, s_2]$:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \langle c(s) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) \pm (s - s_1) \cdot \dot{c}(t_0) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) - c(t_0), n(t_0) \rangle,\end{aligned}$$

d. h. φ ist konstant auf $[s_1, s_2]$. Da aber wenigstens zwei der drei Werte t_0, t_1 oder t_2 im Intervall $[s_1, s_2]$ liegen, widerspricht dies (5.8). \square

Bemerkung 5.4.4 Für die Gültigkeit dieses Satzes ist allerdings wichtig, dass die Kurve als *einfach* geschlossen vorausgesetzt wurde, wie das folgende Beispiel zeigt.



$\kappa > 0$, aber nicht konvex

Abb. 247

Allerdings haben wir die Bedingung, dass die Kurve einfach geschlossen ist, nur für eine Richtung im Beweis benötigt. Als wir zeigten, dass aus $\kappa \geq 0$ die Konvexität der Kurve folgt, haben wir den Umlaufsatz verwendet und $n_c = 1$ benutzt. Die andere Richtung kommt ohne diese Voraussetzung aus. Wir halten fest:

Satz 5.4.5 Für die Krümmung einer Parametrisierung nach der Bogenlänge einer konvexen (aber nicht notwendigerweise geschlossenen) Kurve gilt $\kappa(t) \geq 0$ für alle t oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle t .

Definition 5.4.6 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Wir sagen, c hat einen *Scheitel* in $t_0 \in I$, falls $\kappa(t_0) = 0$.

Beispiel. Für einen Kreis ist jeder Punkt Scheitelpunkt, da die Krümmung konstant ist.

Betrachten wir die *Ellipse*, parametrisiert durch

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix},$$

mit $0 < a < b$.

Aus Beispiel 5.2.5 kennen wir die Krümmung von c :

$$\kappa(t) = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Differentiation liefert nun

$$\begin{aligned}\dot{\kappa}(t) &= \frac{b}{a^2} \cdot 2\varepsilon^2 \sin(t) \cos(t) \cdot \left(-\frac{3}{2}(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{-\frac{5}{2}}\right) \\ &= -\frac{3b\varepsilon^2}{a^2} \cdot \frac{\sin(t) \cos(t)}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}},\end{aligned}$$

d. h. $\dot{\kappa}(t) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$\varepsilon^2 \sin(t) \cos(t) = 0.$$

Wegen $a^2 \neq b^2$ ist $\varepsilon \neq 0$ und somit $\dot{\kappa}(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\sin(t) \cos(t) = 0,$$

d. h. wenn $t \in \mathbb{Z} \cdot \frac{\pi}{2}$. Bei einem Durchlauf durch $[0, 2\pi)$ hat die Ellipse also genau vier Scheitel in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ und $\frac{3\pi}{2}$.

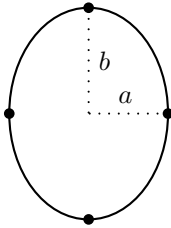


Abb. 248

Tatsächlich hat eine einfach geschlossene konvexe Kurve stets mindestens vier Scheitel. Genauer heißt dies:

Satz 5.4.7 (Vierscheitelsatz) *Ist $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte konvexe ebene Kurve mit Periode L , dann hat c mindestens vier Scheitel in $[0, L)$.*

Zum Beweis benötigen wir folgende Hilfsaussagen:

Lemma 5.4.8 *Sei $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve und sei G eine Gerade, die c in $c(t_0)$ schneidet, $t_0 \in (a, b)$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass alle $c(t)$ für $|t - t_0| < \varepsilon$ auf einer Seite von G liegen, dann schneidet G die Kurve c in $c(t_0)$ tangential, d. h. G lässt sich durch $t \mapsto c(t_0) + \dot{c}(t_0)(t - t_0)$ parametrisieren.*

Beweis des Lemmas. Wir machen eine Taylorentwicklung

$$c(t) = c(t_0) + \dot{c}(t_0)(t - t_0) + R(t)$$

mit $\|R(t)\| \leq K \cdot (t - t_0)^2$ für alle $|t - t_0| < \varepsilon$. Parametrisiere G durch $t \mapsto c(t_0) + v \cdot (t - t_0)$ mit $\|v\| = 1$ und betrachte den Normalenvektor $\tilde{n} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v$ von G . Bei richtiger

Wahl der Richtung von v liegen die Kurvenpunkte nahe $c(t_0)$ auf der Seite von G , in die \tilde{n} zeigt. Daher gilt dann

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0), \tilde{n} \rangle = \langle \dot{c}(t_0), \tilde{n} \rangle (t - t_0) + \langle R(t), \tilde{n} \rangle$$

für alle $|t - t_0| < \varepsilon$. Für $t > t_0$ ist $t - t_0 > 0$ und daher

$$0 \leq \frac{\langle c(t) - c(t_0), \tilde{n} \rangle}{t - t_0} = \langle \dot{c}(t_0), \tilde{n} \rangle + \underbrace{\frac{\langle R(t), \tilde{n} \rangle}{t - t_0}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{wenn } t \rightarrow t_0}}$$

Also ist

$$\langle c(t) - c(t_0), \tilde{n} \rangle \geq 0.$$

Für $t < t_0$ ist $t - t_0 < 0$ und man schließt analog

$$\langle c(t) - c(t_0), \tilde{n} \rangle \leq 0.$$

Also ist $\langle c(t) - c(t_0), \tilde{n} \rangle = 0$ und daher $\dot{c}(t_0) = \pm v$. □

Lemma 5.4.9 *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als zwei Punkten, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden und hat damit insbesondere unendlich viele Schnittpunkte mit der Geraden.*

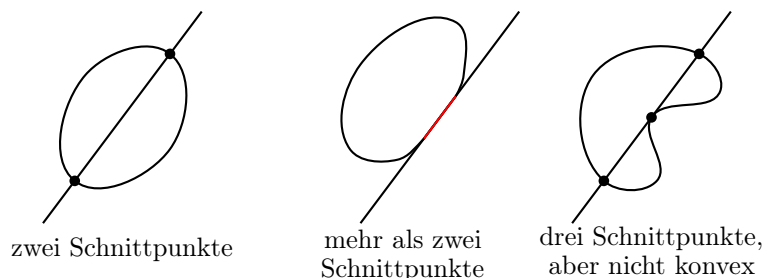


Abb. 249

Beweis des Lemmas. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung der Kurve nach der Bogenlänge mit Periode L . Durch eine Parametertransformation der Form $t \mapsto t + t_0$ können wir erreichen, dass $c(0)$ einer der drei Schnittpunkte mit der Geraden ist. Nach Satz 5.4.3 können wir, nachdem wir eventuell die Parametertransformation $t \mapsto -t$ durchgeführt haben, annehmen, dass die Krümmung $\kappa \geq 0$ erfüllt. Die Winkelfunktion aus Lemma 5.3.1 erfüllt also $\dot{\vartheta} \geq 0$, d. h. sie ist monoton wachsend. Nach dem Umlaufsatz ist $\vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi n_c = 2\pi$. Also ist

$$\vartheta : [0, L] \rightarrow [\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi]$$

eine glatte monoton wachsende surjektive Funktion, $\vartheta_0 = \vartheta(0)$.

Die Kurve c schneide die Gerade G in den Punkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < L$. Sei G parametrisiert durch $t \mapsto p_0 + t \cdot v$. Sei $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ der Normalenvektor von G .

Sei nun I eines der drei Intervalle $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ oder $[t_2, L]$. In den Endpunkten von I liegt c auf der Geraden G . Wenn $c(t)$ für alle $t \in I$ auf G liegt, so enthält c ein Segment von G und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also an, dass es auch Punkte $t \in I$ gibt, so dass $c(t)$ nicht auf G liegt. Wir betrachten nun die zu G parallelen Geraden G_s , die durch $t \mapsto p + s \cdot n + t \cdot v$ parametrisiert werden. Setze $s_1 := \sup\{s > 0 \mid G_s \text{ schneidet } c|_I\}$. Falls auf der Seite von G , in die n zeigt, keine Punkte von $c|_I$ liegen sollten, betrachten wir statt dessen $s_1 := \inf\{s < 0 \mid G_s \text{ schneidet } c|_I\}$.

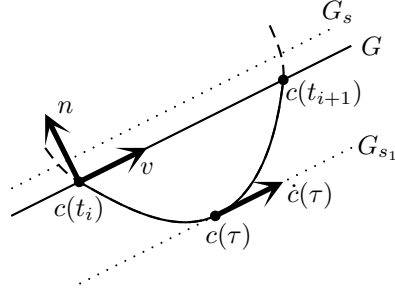


Abb. 250

In jedem Fall schneidet G_{s_1} das Kurvenstück $c|_I$ in einem Punkt τ aus dem Inneren von I tangential, d. h. $\dot{c}(\tau) = \pm v$. Wenden wir dies auf alle drei Intervalle $I = [0, t_1]$, $I = [t_1, t_2]$ und $I = [t_2, t_3]$ an, so erhalten wir drei Punkte τ_1, τ_2 und τ_3 , $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < L$, mit $\dot{c}(\tau_j) = \pm v$.

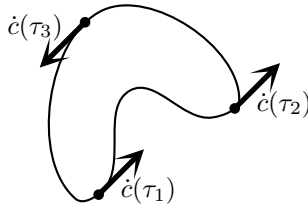


Abb. 251

Bezeichne ϑ_1 den eindeutigen Wert aus $[\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi)$, für den $v = (\cos(\vartheta_1), \sin(\vartheta_1))^\top$, und $\vartheta_2 = \vartheta_1 \pm \pi$ denjenigen mit $-v = (\cos(\vartheta_2), \sin(\vartheta_2))^\top$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$, ansonsten vertauschen wir die Rollen von ϑ_1 und ϑ_2 .

1. Fall. Sei ϑ_1 (und damit auch ϑ_2) echt größer als ϑ_0 . Dann muss ϑ an den drei Stellen τ_1, τ_2 und τ_3 jeweils einen der beiden Werte ϑ_1 oder ϑ_2 annehmen. Insbesondere muss ϑ an wenigstens zwei der drei Stellen gleich sein. Da ϑ monoton wächst, muss ϑ auf einem der Intervalle $[\tau_1, \tau_2]$ oder $[\tau_2, \tau_3]$ konstant sein. Dann ist aber $\dot{c} \equiv \pm v$ auf diesem Intervall, d. h. dieses Stück der Kurve ist ein Geradensegment parallel zu G . Da beide in Frage kommenden Intervalle einen Punkt enthalten, in dem c die Gerade G schneidet, nämlich t_1 bzw. t_2 , muss c ein Segment von G enthalten.

2. Fall. Nun gibt es noch die Möglichkeit, dass $\vartheta(\tau_1) = \vartheta_1 = \vartheta_0$, $\vartheta(\tau_2) = \vartheta_2$ und $\vartheta(\tau_3) = \vartheta_0 + 2\pi$ gilt. Dann aber ist, wieder wegen der Monotonie, ϑ auf dem Intervall

$[0, \tau_1]$ konstant, und es folgt wie oben, dass $c|_{[0, \tau_1]}$ mit einem Segment der Geraden G übereinstimmt. \square

Lemma 5.4.10 *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als einem Punkt tangential, so enthält die Kurve ein ganzes Geradensegment.*

Beweis des Lemmas. Hat die Kurve mehr als zwei Schnittpunkte mit der Geraden G , so folgt die Aussage aus Lemma 5.4.9. Also können wir annehmen, dass die Kurve die Gerade G in genau zwei Punkten schneidet. Wegen der Konvexität der Kurve liegt sie ganz auf einer Seite der Geraden. Wir verschieben die Gerade ein hinreichend kleines Stück in Richtung der Kurve und erhalten eine parallele Gerade G' . Aus Stetigkeitsgründen muss G' die Kurve in der Nähe der beiden Schnittpunkte mit G jeweils in mindestens zwei Punkten schneiden.

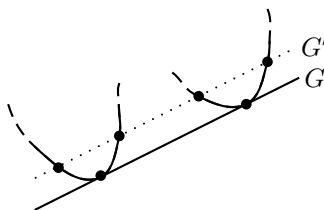


Abb. 252

Damit hat G' mindestens vier Schnittpunkte mit der Kurve und wegen Lemma 5.4.9 enthält die Kurve ein Geradensegment. \square

In Lemma 5.4.10 wird nicht behauptet, dass die Kurve ein Segment der tangential schneidenden Geraden enthält (obwohl auch das wahr ist), sondern das in der Kurve enthaltene Segment darf durchaus zu einer anderen Geraden gehören. Für unsere Anwendung des Lemmas im Beweis des Vierscheitelsatzes spielt dies aber keine Rolle.

Beweis des Vierscheitelsatzes. Die Krümmung κ von c nimmt wegen der Periodizität Maximum und Minimum an, was uns bereits zwei Scheitel liefert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Minimum in $t = 0$ und das Maximum in $t = t_0 \in (0, L)$ angenommen wird. Sei G die Gerade durch die beiden Punkte $c(0)$ und $c(t_0)$. Besitzt G einen weiteren Schnittpunkt mit der durch c parametrisierten Kurve, so enthält c nach Lemma 5.4.9 ein ganzes Geradensegment. Dann aber ist auf einem ganzen Intervall die Krümmung konstant 0 und wir erhalten unendlich viele Scheitel.

Also betrachten wir den Fall, dass G keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein hat. Nach Anwendung einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass G die x -Achse ist. Angenommen, die Kurve hat keine weiteren Scheitel. Dann verschwindet $\dot{\kappa}$ nirgends auf den beiden Intervallen $(0, t_0)$ und (t_0, L) . Da $\int_0^L \dot{\kappa}(t) dt = \kappa(L) - \kappa(0) = 0$ ist, muss $\dot{\kappa}$ auf einem der beiden Intervalle positiv, auf dem anderen negativ sein. Sei etwa $\dot{\kappa}(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $\dot{\kappa}(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$.

Läge c ganz auf einer Seite von G , so würde c die Gerade G in $t = 0$ und $t = t_0$ tangential schneiden. Dann enthielte c nach Lemma 5.4.10 ein Geradensegment und hätte insbesondere unendlich viele Scheitel. Also können wir annehmen, dass etwa $c|_{(0, t_0)}$ oberhalb von G liegt, $c|_{(t_0, L)}$ dagegen unterhalb. Dies bedeutet, dass für die y -Komponente von c gilt $c_2(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $c_2(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$.

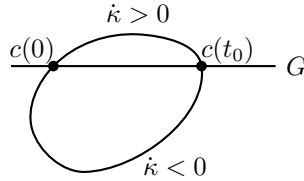


Abb. 253

Damit folgt $\dot{\kappa}(t)c_2(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_0) \cup (t_0, L)$ und insbesondere

$$\int_0^L \dot{\kappa}(t)c_2(t)dt > 0. \quad (5.9)$$

Partielle Integration und die Frenet-Gleichungen aus Proposition 5.2.7 liefern

$$\begin{aligned} \int_0^L \dot{\kappa}(t)c(t)dt &= - \int_0^L \kappa(t)\dot{c}(t)dt \\ &= \int_0^L \dot{n}(t)dt \\ &= n(L) - n(0) \\ &= (0, 0)^\top. \end{aligned}$$

Wir nehmen das Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor e_2 und erhalten

$$\int_0^L \dot{\kappa}(t)c_2(t)dt = 0$$

im Widerspruch zu (5.9).

Somit muss es einen dritten Scheitel geben, etwa in $t_1 \in (t_0, L)$. Angenommen, es gäbe keinen vierten Scheitel. Dann haben wir unsere Kurve in drei Bögen aufgeteilt, auf denen die Ableitung der Krümmung nicht verschwindet, entsprechend den Intervallen $(0, t_0)$, (t_0, t_1) und (t_1, L) . Wie oben sieht man, dass das Vorzeichen von $\dot{\kappa}$ nicht auf allen drei Bögen dasselbe sein kann. Wir fassen die beiden Bögen, auf denen $\dot{\kappa}$ dasselbe Vorzeichen hat, zu einem Bogen zusammen. Dadurch erhalten wieder eine Unterteilung der geschlossenen Kurve in zwei Bögen, auf denen $\dot{\kappa}$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, abgesehen von einer einzigen Nullstelle von $\dot{\kappa}$ in einem der beiden Bögen. Diese eine Nullstelle ändert nichts an der Positivität des entsprechenden Integrals und derselbe Beweis wie oben liefert einen Widerspruch. \square

Der Vierscheitelsatz gilt auch für nichtkonvexe einfach geschlossene ebene Kurven, aber der Beweis ist schwieriger.

5.5 Isoperimetrische Ungleichung

Als vorläufig letzte Frage zu ebenen Kurven betrachten wir folgendes Optimierungsproblem, dessen landwirtschaftliche Formulierung so lauten könnte: Gesetzt ein Bauer hat eine bestimmte Länge Weidezaun, z. B. 10 km. Wie müsste eine größtmögliche Kuhweide aussehen, die er damit einzäunen kann?

Zunächst müssen wir eine mathematische Definition des Flächeninhalts eines ebenen Gebiets geben.

Definition 5.5.1 Sei $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$, eine parametrisierte einfach geschlossene Kurve, die das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einmal im mathematisch positiven Sinn umläuft.

Wir definieren den *Flächeninhalt* von Ω durch

$$A[\Omega] := \int_0^L x(t)\dot{y}(t)dt.$$

Bemerkung 5.5.2 Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^L x(t)\dot{y}(t)dt &= - \int_0^L \dot{x}(t)y(t)dt + x(L)y(L) - x(0)y(0) \\ &= - \int_0^L \dot{x}(t)y(t)dt. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A[\Omega] &= \int_0^L x(t)\dot{y}(t)dt = - \int_0^L \dot{x}(t)y(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt. \end{aligned}$$

Gemäß Satz 2.4.26 entspricht diese Definition dem zweidimensionalen Hausdorff-Maß der Fläche; dies wird an angegebener Stelle auch bewiesen.

Beispiel 5.5.3 Wir berechnen den Flächeninhalt einer Kreisscheibe vom Radius r . Wir legen den Mittelpunkt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und parametrisieren den Rand durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Somit erhalten wir für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r \cos(t) \cdot r \cos(t) - (-r \sin(t)) \cdot r \sin(t)) dt &= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) dt \\ &= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = r^2 \cdot \pi. \end{aligned}$$

Satz 5.5.4 (Isoperimetrische Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, das von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c berandet wird. Dann gilt:

$$L[c]^2 \geq 4\pi \cdot A[\Omega].$$

In dieser Ungleichung gilt „ \geq “ genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Beweis. a) Verschiebe die y -Achse parallel, bis sie die Spur von c erstmals von links bzw. rechts berührt.

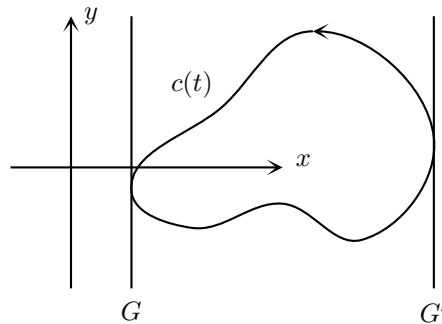


Abb. 254

Wir erhalten zwei senkrechte Geraden G' und G , die c tangential schneiden. Sei $2r$ der Abstand zwischen G und G' . Verschiebe nun c längs der x -Achse um einen Wert z so, dass der Ursprung genau in die Mitte zwischen den beiden Geraden zu liegen kommt. Wir erhalten \tilde{c} , \tilde{G}' und \tilde{G} .

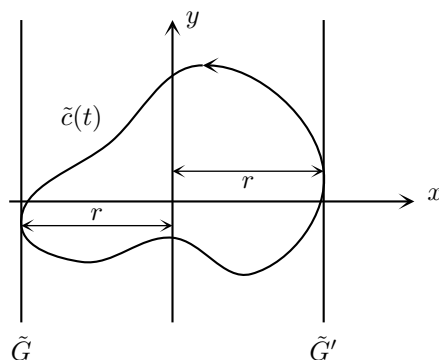


Abb. 255

Parametrisiere c und \tilde{c} im mathematisch positiven Sinne nach Bogenlänge, so dass c die Gerade G in $t = 0$ und die Gerade G' in $t = t_0$ trifft. Analog treffe \tilde{c} die Gerade \tilde{G} in $t = 0$ und \tilde{G}' in $t = t_0$. Es gilt dann $\tilde{x}(t) = x(t) - z$, $\tilde{y}(t) = y(t)$, wobei $c(t) = (x(t), y(t))$ und $\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$. Wir parametrisieren nun den Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius r durch $\bar{c}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &:= \tilde{x}(t), \\ \bar{y}(t) &:= \begin{cases} \sqrt{r^2 - \tilde{x}(t)^2}, & \text{falls } t \in [0, t_0], \\ -\sqrt{r^2 - \tilde{x}(t)^2}, & \text{falls } t \in [t_0, L]. \end{cases} \end{aligned}$$

Da wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe bereits kennen, erhalten wir

$$\pi r^2 = \bar{A} = - \int_0^L \tilde{x}(t) \dot{\bar{y}}(t) dt = - \int_0^L \bar{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t) dt.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A[\Omega] + \pi r^2 &= \int_0^L x(t) \dot{y}(t) dt - \int_0^L \bar{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t) dt \\ &= \int_0^L \tilde{x}(t) \dot{\tilde{y}}(t) dt + z \underbrace{\int_0^L \dot{y}(t) dt}_{=y(L)-y(0)=0} - \int_0^L \bar{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t) dt \\ &= \int_0^L (\tilde{x}(t) \dot{\tilde{y}}(t) - \bar{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t)) dt \\ &\leq \int_0^L |\tilde{x}(t) \dot{\tilde{y}}(t) - \bar{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t)| dt \\ &= \int_0^L \sqrt{(\tilde{x} \dot{\tilde{y}} - \bar{y} \dot{\tilde{x}})^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \sqrt{\tilde{x}^2(\dot{y})^2 - \underbrace{2\tilde{x}\dot{y}\dot{x}}_{|\dots| \leq \tilde{x}^2(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \tilde{y}^2} + \tilde{y}^2(\dot{x})^2} dt \\
&\leq \int_0^L \sqrt{\tilde{x}^2(\dot{y})^2 + \tilde{x}^2(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \tilde{y}^2 + \tilde{y}^2(\dot{x})^2} dt \quad (5.10) \\
&= \int_0^L \sqrt{\underbrace{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}_{=r^2} \underbrace{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)}_{=1}} dt \\
&= L \cdot r.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sqrt{A[\Omega]} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A[\Omega] + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} \cdot r \cdot L[c]$$

und somit $A[\Omega] \cdot \pi \leq \frac{1}{4}L[c]^2$.

b) Ist c ein Kreis vom Radius r , so gilt

$$L[c] = 2\pi r$$

und

$$A[\Omega] = \pi r^2$$

und somit „ $=$ “ in der isoperimetrischen Ungleichung.

c) Es gelte nun „ $=$ “ in der isoperimetrischen Ungleichung. Wir zeigen, dass c ein Kreis ist. In allen Abschätzungen aus Beweisteil a) muss nun „ $=$ “ gelten.

Insbesondere ist

$$\sqrt{A[\Omega]} \cdot \sqrt{\pi r^2} = \frac{1}{2}(A[\Omega] + \pi r^2)$$

und somit $A[\Omega] = \pi r^2$. Also ist $L[c] = 2\sqrt{A[\Omega]\pi} = 2\pi r$. Der Radius r ist also nur durch die Länge von c bestimmt und wir würden dasselbe r erhalten, wenn wir statt senkrechter Geraden G und G' waagerechte genommen hätten.

Gleichheit in (5.10) impliziert

$$-2\tilde{x}\dot{y}\dot{x} = \tilde{x}^2(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\tilde{y}^2,$$

d.h.

$$(\tilde{x}\dot{x} + \tilde{y}\dot{y})^2 = 0,$$

d.h.

$$\tilde{x}\dot{x} = -\tilde{y}\dot{y},$$

d.h.

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} =: \alpha.$$

Es folgt

$$r = \frac{r}{1} = \frac{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}{\sqrt{(\dot{y})^2 + (\dot{x})^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2(\dot{y})^2 + \alpha^2(\dot{x})^2}}{\sqrt{(\dot{y})^2 + (\dot{x})^2}} = |\alpha|,$$

d.h.

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \pm r$$

und somit $\tilde{x} = \pm r\tilde{y}$, d.h. $x(t) - z = \pm r\dot{y}(t)$. Unter Verwendung von waagerechten Geraden G und G' statt senkrechter folgt analog $y(t) - w = \pm r\dot{x}(t)$. Wir schließen

$$(x(t) - z)^2 + (y(t) - w)^2 = r^2\dot{y}(t)^2 + r^2\dot{x}(t)^2 = r^2.$$

Also parametrisiert $c = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ einen Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ und Radius r . \square

5.6 Krümmung von Raumkurven

Wir kommen jetzt zu solchen Kurven, die im dreidimensionalen Raum verlaufen, d.h. ihre Werte in \mathbb{R}^3 annehmen.

Definition 5.6.1 Eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *parametrisierte Raumkurve*. Analog sind *reguläre parametrisierte Raumkurven* definiert.

Anders als bei ebenen Kurven ist es nun nicht mehr so einfach, ein Normalenfeld zu definieren. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, so bilden die Vektoren senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(t)$ eine Ebene, die senkrecht stehenden *Einheitsvektoren* eine Kreislinie.

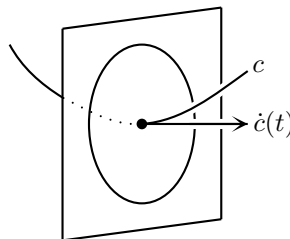


Abb. 256

Im Fall ebener Kurven gab es zwei senkrecht stehende Einheitsvektoren. Wir haben den Normalenvektor durch die Orientierungsbedingung festgelegt. Welchen Normalenvektor sollten wir nun im Fall von Raumkurven wählen? Erinnern wir uns daran, dass das Vorzeichen der Krümmung gerade charakterisierte, ob sich die Kurve nach links oder nach rechts krümmte. Was sollte das bei Raumkurven bedeuten?

Diese Problematik führt dazu, dass wir die Krümmung von Raumkurven nur „ohne Vorzeichen“ definieren können. Die Krümmung einer Raumkurve ist stets ≥ 0 .

Definition 5.6.2 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Raumkurve. Die Funktion

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(t) := \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3},$$

heißt *Krümmung* von c .

Ist c nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt durch Differentiation der Gleichung $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \equiv 1$, dass $\ddot{c}(t)$ auf $\dot{c}(t)$ senkrecht steht und somit $\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\| = \|\dot{c}(t)\| \cdot \|\ddot{c}(t)\| = \|\ddot{c}(t)\|$. Also gilt in diesem Fall für die Krümmung

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\|.$$

Wie bei ebenen Kurven ist die Krümmung ein Maß dafür, wie stark die Kurve von der Geraden abweicht. Ist nämlich c eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, so ist c eine Gerade genau dann, wenn $\ddot{c} \equiv 0$, d.h. wenn $\kappa \equiv 0$. Die Krümmung ist nun aber stets ≥ 0 . Es macht keinen Sinn mehr davon zu sprechen, die Kurve krümme sich nach rechts oder links.

Lemma 5.6.3 Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Raumkurve mit Krümmung κ . Ist $\varphi : J \rightarrow I$ eine Parametertransformation, so gilt für die Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi$ mit Krümmung $\tilde{\kappa}$

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi.$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$. Kettenregel und Produktregel liefern $\ddot{\tilde{c}}(t) = \ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2 + \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t)$. Da die Vektoren $\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$ und $\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t)$ linear abhängig sind, ist

$$\dot{\tilde{c}}(t) \times \ddot{\tilde{c}}(t) = (\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)) \times (\ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)^2) = \dot{\varphi}(t)^3 \cdot \dot{c}(\varphi(t)) \times \ddot{c}(\varphi(t)).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(t) &= \frac{\|\dot{\varphi}(t)^3 \cdot \dot{c}(\varphi(t)) \times \ddot{c}(\varphi(t))\|}{\|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\|^3} \\ &= \frac{\|\dot{c}(\varphi(t)) \times \ddot{c}(\varphi(t))\|}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|^3} \\ &= \kappa(\varphi(t)). \end{aligned}$$

□

Im Gegensatz zu ebenen Kurven ändert sich im Fall von Raumkurven die Krümmung auch bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen nicht. Dies passt natürlich dazu, dass die Krümmung nun auch kein Vorzeichen mehr hat.

Zur Rechtfertigung der Definition der Länge einer Kurve c haben wir Polygonzüge zur Approximation von c betrachtet. Ist c auf $I = [a, b]$ parametrisiert, so kann man zu jeder Unterteilung von I , d. h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, das zugehörige einbeschriebene Polygon $P = (c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_N))$ betrachten. Wir denken uns die aufeinanderfolgenden Ecken durch Geradensegmente verbunden. Die Länge eines Polygons $P = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ ist definiert durch

$$L[P] = \sum_{i=1}^N \|a_i - a_{i-1}\|.$$

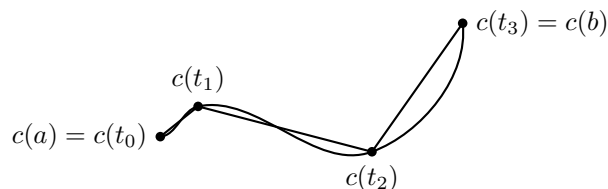


Abb. 257

Ist P in c eingeschrieben, d. h. $a_i = c(t_i)$ für eine Unterteilung von I , dann gilt

$$L[P] \leq L[c],$$

da das Kurvenstück von c , das zwei aufeinander folgende Ecken verbindet, mindestens so lang ist wie der euklidische Abstand dieser Ecken. Proposition 5.1.18 besagt, dass für immer feinere Unterteilungen die Länge des Polygons die Länge der Kurve immer besser approximiert. Gemeinsam mit Bemerkung 5.1.19 ergibt dies

$$\sup_P L[P] = L[c].$$

Dabei wird das Supremum über alle in c eingeschriebenen Polygone genommen.

Wir wollen im Folgenden die Krümmung von Raumkurven ebenfalls durch Polygone approximieren. Dabei verstehen wir unter einem *geschlossenen Polygon* ein Tupel $P = (a_1, \dots, a_m)$, für das $a_i \neq a_{i-1}$ für alle $i = 2, \dots, m$ und auch $a_1 \neq a_m$ gilt. Wir denken uns dabei a_m mit a_1 verbunden und verwenden die Konvention $a_{i+m} = a_i$.

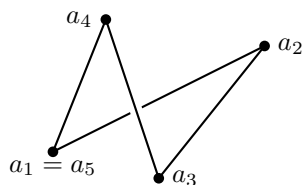


Abb. 258

Mit α_i bezeichnen wir dann stets die Winkelgröße an der Ecke a_i , d.h. die Zahl $\alpha_i \in [0, \pi]$, festgelegt durch

$$\cos(\alpha_i) = \frac{\langle a_i - a_{i-1}, a_{i+1} - a_i \rangle}{\|a_i - a_{i-1}\| \cdot \|a_{i+1} - a_i\|}.$$

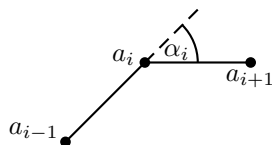


Abb. 259

Wir sehen, dass die Bedingung $a_i \neq a_{i-1}$ jetzt erforderlich ist, um sicherzustellen, dass wir nicht durch 0 dividieren müssen.

Offensichtlich verschwindet die Winkelgröße in der Ecke a_i genau dann, wenn a_{i-1}, a_i, a_{i+1} in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Die Winkelgröße ist also, wie die Krümmung bei glatten Kurven, ein Maß für die Abweichung des Polygons von einer Geraden. Den genauen Zusammenhang zwischen Krümmung und Winkelgrößen werden wir jetzt untersuchen.

Definition 5.6.4 Sei $P = (a_1, \dots, a_m)$ ein geschlossenes Polygon mit den Winkelgrößen α_i . Dann heißt

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

der *Totalwinkel* von P .

Beispiel 5.6.5 Betrachten wir ein Dreieck $P = (a_1, a_2, a_3)$. Der Außenwinkel α_i und der Innenwinkel β_i in einer Ecke a_i addieren sich stets zu $\alpha_i + \beta_i = \pi$ auf. Nach Satz 1.3.6 ist die Summe der Innenwinkel $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$. Es folgt

$$\begin{aligned} \kappa(P) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &= \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ &= 3\pi - \pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Lemma 5.6.6 Seien P_1 und P_2 geschlossene Polygone im \mathbb{R}^3 . Das Polygon P_2 entstehe aus P_1 durch Hinzunahme einer Ecke. Dann gilt:

$$\kappa(P_1) \leq \kappa(P_2).$$

Die hinzugenommene Ecke a sei in P_1 zwischen a_i und a_{i+1} eingefügt worden. Gleichheit $\kappa(P_1) = \kappa(P_2)$ gilt genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle auftritt:

- 1) Die Punkte a_i, a, a_{i+1} liegen auf einer Geraden, oder
- 2) Die Punkte $a_{i-1}, a_i, a, a_{i+1}, a_{i+2}$ liegen auf einer Ebene.

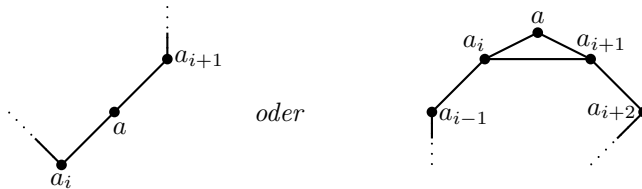


Abb. 260

Beweis. a) Die Winkelgrößen von P_1 bezeichnen wir wie üblich mit α_k . Für die Winkelgrößen von P_2 in der Ecke a_k schreiben wir β_k , für diejenige in der Ecke a schreiben wir β . Dann gilt $\alpha_k = \beta_k$, es sei denn $k = i$ oder $k = i + 1$.

Betrachten wir nun das Dreieck (a_i, a, a_{i+1}) und bezeichnen dessen Innenwinkelgrößen in den Ecken a_k mit $\gamma_k, k = i, i + 1$.

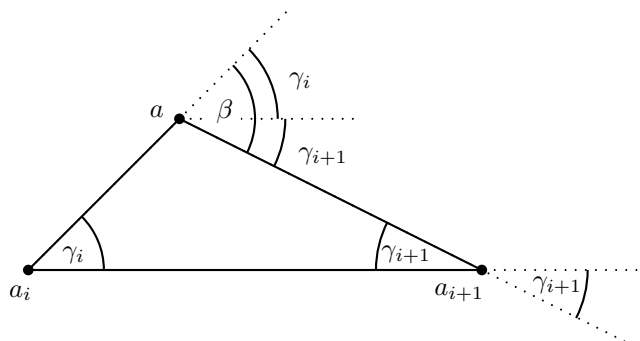


Abb. 261

Dann gilt

$$\beta = \gamma_i + \gamma_{i+1}.$$

Nun ist die Winkelgröße zwischen zwei Einheitsvektoren X und Y nichts anderes als der sphärische Abstand zwischen X und Y , aufgefasst als Punkte auf der zweidimensionalen Sphäre, d.h. die Länge des verbindenden kurzen Großkreisbogens. Betrachten wir also das sphärische Dreieck mit den Ecken $\frac{a_i - a_{i-1}}{\|a_i - a_{i-1}\|}$, $\frac{a - a_i}{\|a - a_i\|}$ und $\frac{a_{i+1} - a_i}{\|a_{i+1} - a_i\|}$. Die sphärischen Seitenlängen sind α_i, β_i und γ_i .

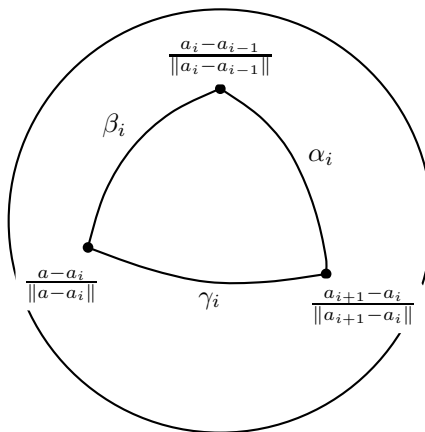


Abb. 262

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\alpha_i \leq \beta_i + \gamma_i.$$

Analog erhalten wir unter Benutzung des sphärischen Dreiecks mit den Ecken $\frac{a_{i+1} - a_i}{\|a_{i+1} - a_i\|}$, $\frac{a_{i+1} - a}{\|a_{i+1} - a\|}$ und $\frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{\|a_{i+2} - a_{i+1}\|}$:

$$\alpha_{i+1} \leq \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
 \kappa(P_2) - \kappa(P_1) &= \beta_i + \beta + \beta_{i+1} - (\alpha_i + \alpha_{i+1}) \\
 &= (\beta_i - \alpha_i) + \beta + (\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}) \\
 &\geq -\gamma_i + \beta - \gamma_{i+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und damit

$$\kappa(P_2) \geq \kappa(P_1).$$

b) Es bleibt der Gleichheitsfall zu diskutieren. Nach obigem Beweis gilt $\kappa(P_1) = \kappa(P_2)$ genau dann, wenn in den beiden betrachteten sphärischen Dreiecken Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt. Dies wiederum gilt genau dann, wenn die Ecken dieser sphärischen Dreiecke jeweils auf einem Großkreis liegen. Dies bedeutet, dass zum einen die Vektoren $\frac{a_i - a_{i-1}}{\|a_i - a_{i-1}\|}$, $\frac{a - a_i}{\|a - a_i\|}$ und $\frac{a_{i+1} - a_i}{\|a_{i+1} - a_i\|}$ linear abhängig sein müssen und zum anderen auch die Vektoren $\frac{a_{i+1} - a_i}{\|a_{i+1} - a_i\|}$, $\frac{a_{i+1} - a}{\|a_{i+1} - a\|}$ und $\frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{\|a_{i+2} - a_{i+1}\|}$. Die Normierung auf Einheitslänge spielt für die lineare Abhängigkeit keine Rolle. Also ist $\kappa(P_1) = \kappa(P_2)$ äquivalent dazu, dass sowohl $a_i - a_{i-1}$, $a - a_i$ und $a_{i+1} - a_i$ linear abhängig sind als auch $a_{i+1} - a_i$, $a_{i+1} - a$ und $a_{i+2} - a_{i+1}$.

1. Fall: a_i, a, a_{i+1} liegen auf einer Geraden.

Einerseits gilt dann 5.6.6) und andererseits sind $a - a_i$ und $a_{i+1} - a_i$ linear abhängig, $a_{i+1} - a_i$ und $a_{i+1} - a$ ebenso. Also ist $\kappa(P_1) = \kappa(P_2)$.

2. Fall: a_i, a, a_{i+1} liegen nicht auf einer Geraden.

Dann spannen a_i, a und a_{i+1} eine affine Ebene E auf. Die lineare Abhängigkeit von $a_i - a_{i-1}$, $a - a_i$ und $a_{i+1} - a_i$ ist nun äquivalent dazu, dass a_{i-1} auf E liegt. Genauso ist die lineare Abhängigkeit von $a_{i+1} - a_i$, $a_{i+1} - a$ und $a_{i+2} - a_{i+1}$ gleichbedeutend damit, dass a_{i+2} auf E liegt. Somit gilt $\kappa(P_1) = \kappa(P_2)$ genau dann, wenn alle fünf Punkte auf E liegen, was 5.6.6) ergibt. \square

Definition 5.6.7 In Analogie zum Totalwinkel definieren wir für eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve c mit Periode L die *Totalkrümmung* durch

$$\kappa(c) := \int_0^L \kappa(t) dt.$$

Definition 5.6.8 Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit Periode L . Ein Tupel $U = (t_1, \dots, t_m)$ heißt *Unterteilung*, falls $0 \leq t_1 < \dots < t_m < L$. Die Zahl

$$\mathcal{F}(U) := \max\{t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_m - t_{m-1}, t_1 + L - t_m\}$$

heißt *Feinheit* der Unterteilung. Das Polygon $P(U) = (c(t_1), \dots, c(t_m))$ heißt zur Unterteilung U gehöriges *einbeschriebenes Polygon*.

Satz 5.6.9 (Krümmungsapproximation durch Polygone) Sei c eine geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Dann gilt

$$\kappa(c) = \sup_P \kappa(P),$$

wobei das Supremum über alle in c einbeschriebenen Polygone P zu nehmen ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einige Hilfsaussagen. Zunächst leiten wir eine Abschätzung her, die kontrolliert, wie gut die Ableitung einer Kurve, also der Differentialquotient, durch die entsprechenden Differenzenquotienten angenähert wird.

Lemma 5.6.10 Sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein nach Bogenlänge parametrisiertes Kurvenstück mit $\|\ddot{c}(u) - \ddot{c}(v)\| < \varepsilon$ für alle $u, v \in [t_0, t_1]$. Sei $\tau := \frac{1}{2}(t_1 + t_0)$. Dann gilt

$$\left\| \frac{c(t_1) - c(t_0)}{t_1 - t_0} - \dot{c}(\tau) \right\| < \frac{\varepsilon}{4}(t_1 - t_0).$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{t_1} \left(\int_{\tau}^v (\ddot{c}(u) - \ddot{c}(\tau)) du \right) dv \\ &= \int_{\tau}^{t_1} ([\dot{c}(u) - \dot{c}(\tau)]_{u=\tau}^v) dv \\ &= \int_{\tau}^{t_1} (\dot{c}(v) - \dot{c}(\tau) - (v - \tau)\ddot{c}(\tau)) dv \\ &= [(c(v) - \dot{c}(\tau)v - (\frac{v^2}{2} - \tau v)\ddot{c}(\tau))]_{v=\tau}^{t_1} \\ &= (t_1 - \tau)(-\dot{c}(\tau) + \tau\ddot{c}(\tau)) + c(t_1) - c(\tau) - \frac{1}{2}(t_1^2 - \tau^2)\ddot{c}(\tau) \\ &= c(t_1) - c(\tau) - (t_1 - \tau)\dot{c}(\tau) - \frac{1}{2}(t_1 - \tau)^2\ddot{c}(\tau). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} \left(\int_v^{\tau} (\ddot{c}(\tau) - \ddot{c}(u)) du \right) dv &= c(\tau) - c(t_0) - (\tau - t_0)\dot{c}(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tau - t_0)^2\ddot{c}(\tau). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Wegen $t_1 - \tau = \tau - t_0$ ergibt Addition von (5.11) und (5.12)

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{t_1} \left(\int_{\tau}^v (\ddot{c}(u) - \ddot{c}(\tau)) du \right) dv + \int_{t_0}^{\tau} \left(\int_v^{\tau} (\ddot{c}(\tau) - \ddot{c}(u)) du \right) dv \\ &= c(t_1) - c(t_0) - (t_1 - t_0)\dot{c}(\tau). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nun gilt mit der Voraussetzung unseres Lemmas

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\tau}^{t_1} \left(\int_{\tau}^v (\ddot{c}(u) - \ddot{c}(\tau)) du \right) dv \right\| &\leq \int_{\tau}^{t_1} \left(\int_{\tau}^v \|\ddot{c}(u) - \ddot{c}(\tau)\| du \right) dv \\ &< \int_{\tau}^{t_1} \int_{\tau}^v \varepsilon du dv = \int_{\tau}^{t_1} (\varepsilon v - \varepsilon \tau) dv \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(t_1 - \tau)^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

und analog

$$\left\| \int_{t_0}^{\tau} \left(\int_v^{\tau} (\ddot{c}(\tau) - \ddot{c}(u)) du \right) dv \right\| < \frac{\varepsilon}{2} (\tau - t_0)^2. \tag{5.15}$$

Einsetzen von (5.14) und (5.15) in (5.13) ergibt mit $t_1 - \tau = \tau - t_0$

$$\begin{aligned} \|c(t_1) - c(t_0) - (t_1 - t_0)\dot{c}(\tau)\| &< \frac{\varepsilon}{2}(t_1 - \tau)^2 + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t_0)^2 \\ &= \varepsilon(t_1 - \tau)^2 = \frac{\varepsilon}{4}(t_1 - t_0)^2. \end{aligned}$$

Division durch $t_1 - t_0$ liefert die Behauptung. □

Bemerkung 5.6.11 Das vorangegangene Lemma stellt insbesondere sicher, dass für hinreichend feine Unterteilungen die zugehörigen einbeschriebenen Polygone tatsächlich geschlossene Polygone sind, d. h. dass zwei aufeinander folgende Ecken des Polygons stets verschieden sind. Da nämlich die Funktion $(u, v) \mapsto \|\ddot{c}(u) - \ddot{c}(v)\|$ doppelperiodisch und stetig ist, ist sie beschränkt. Das heißt, es gibt eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\|\ddot{c}(u) - \ddot{c}(v)\| < K \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Sei nun U eine Unterteilung der Feinheit $\mathcal{F}(U) < \frac{4}{K}$. Wäre $c(t_{i+1}) = c(t_i)$, so würde aus Lemma 5.6.10 folgen, dass

$$\begin{aligned} 1 &= \|\dot{c}((t_{i+1} + t_i)/2)\| = \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \dot{c}((t_{i+1} + t_i)/2) \right\| \\ &< \frac{K}{4}(t_{i+1} - t_i) \leq \frac{K}{4} \cdot \mathcal{F}(U) < 1, \end{aligned}$$

Widerspruch. □

Nun vergleichen wir euklidischen und sphärischen Abstand.

Lemma 5.6.12 *Es gibt eine Konstante $C_1 > 0$, so dass für alle $X, Y \in S^2$ gilt:*

$$0 \leq d_S(X, Y) - \|X - Y\| \leq C_1 \cdot \|X - Y\|^3.$$

Die Abschätzung durch $\|X - Y\|^3$ zeigt, dass sich euklidischer und sphärischer Abstand nahe beieinander liegender Punkte nur sehr wenig unterscheiden.

Beweis. Seien $X, Y \in S^2$. Schreiben wir für den sphärischen Abstand $d_S(X, Y)$ kurz α , so gilt $\|X - Y\| = 2 \sin(\alpha/2)$.

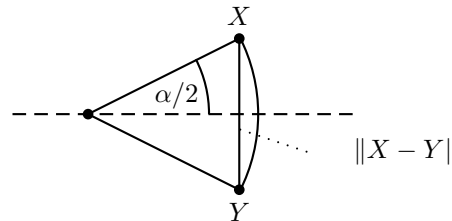


Abb. 263

Betrachten wir nun die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2 \sin(x/2),$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = (2 \sin(x/2))^3.$$

Man berechnet sofort

$$f'(x) = 1 - \cos(x/2), \quad f''(x) = \sin(x/2)/2, \quad f'''(x) = \cos(x/2)/4$$

und

$$g'(x) = 12 \sin(x/2)^2 \cos(x/2), \quad g''(x) = 12 \sin(x/2) \cos(x/2)^2 - 6 \sin(x/2)^3, \\ g'''(x) = 6 \cos(x/2)^3 - 21 \sin(x/2)^2 \cos(x/2).$$

Insbesondere ist $f(0) = f'(0) = f''(0) = g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ und $f'''(0) = 1/4$ sowie $g'''(0) = 6$. Nach dem Satz von L'Hospital ist

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{1}{24}.$$

Die auf $(0, \pi]$ definierte und stetige Funktion f/g setzt sich somit stetig auf das kompakte Intervall $[0, \pi]$ fort. Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stets beschränkt sind, gibt es ein $C_1 > 0$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} \leq C_1$ für alle $x \in (0, \pi]$ und somit

$$f(x) \leq C_1 \cdot g(x)$$

für alle $x \in [0, \pi]$. Da der sphärische Abstand zweier Punkte auf S^2 nur Werte im Intervall $[0, \pi]$ annehmen kann, folgt

$$d_S(X, Y) - \|X - Y\| = f(d_S(X, Y)) \leq C_1 \cdot g(d_S(X, Y)) = C_1 \cdot \|X - Y\|^3.$$

Ferner ist wegen $f' \geq 0$ die Funktion f monoton wachsend und wegen $f(0) = 0$ insbesondere $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Daraus folgt

$$d_S(X, Y) - \|X - Y\| = f(d_S(X, Y)) \geq 0. \quad \square$$

Lemma 5.6.13 *Es gibt eine Konstante $C_2 > 0$, so dass für alle $X, X', Y, Y' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt:*

$$|\sphericalangle(X, Y) - \sphericalangle(X', Y')| \leq C_2 \cdot \left(\left\| \frac{X}{\|X\|} - \frac{X'}{\|X'\|} \right\| + \left\| \frac{Y}{\|Y\|} - \frac{Y'}{\|Y'\|} \right\| \right)$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $X, X', Y, Y' \in S^2$. Sei o. B. d. A. $\sphericalangle(X, Y) \geq \sphericalangle(X', Y')$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für den sphärischen Abstand (Beispiel 2.1.3) und Lemma 5.6.12

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(X, Y) - \sphericalangle(X', Y')| &= \sphericalangle(X, Y) - \sphericalangle(X', Y') \\ &= d_S(X, Y) - d_S(X', Y') \\ &\leq d_S(X, X') + d_S(X', Y') + d_S(Y', Y) - d_S(X', Y') \\ &= d_S(X, X') + d_S(Y', Y) \\ &\leq \|X - X'\| + C_1 \cdot \|X - X'\|^3 + \|Y - Y'\| + C_1 \cdot \|Y - Y'\|^3 \\ &\leq (1 + C_1 \cdot 2^2)(\|X - X'\| + \|Y - Y'\|). \end{aligned}$$

Wir haben hierbei benutzt, dass für alle Punkte $Z, Z' \in S^2$ gelten muss $\|Z - Z'\| \leq 2$. Also erfüllt $C_2 := 1 + 4C_1$ in diesem Fall die Anforderungen.

Sind allgemein $X, X', Y, Y' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so folgt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle(X, Y) - \sphericalangle(X', Y')| &= \left| \sphericalangle\left(\frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|}\right) - \sphericalangle\left(\frac{X'}{\|X'\|}, \frac{Y'}{\|Y'\|}\right) \right| \\ &\leq C_2 \cdot \left(\left\| \frac{X}{\|X\|} - \frac{X'}{\|X'\|} \right\| + \left\| \frac{Y}{\|Y\|} - \frac{Y'}{\|Y'\|} \right\| \right). \end{aligned}$$

□

Die wesentliche Aussage von Satz 5.6.9 findet sich in folgender Proposition.

Proposition 5.6.14 *Sei c eine geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle Unterteilungen der Feinheit $< \delta$ für das zugehörige einbeschriebene Polygon P gilt:*

$$|\kappa(c) - \kappa(P)| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Die Funktion $t \mapsto \|\ddot{c}(t)\|$ ist stetig und periodisch, also beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante $C_3 > 0$, so dass

$$\|\ddot{c}(t)\| \leq C_3 \quad (5.16)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Länge (und damit die Periode) von c bezeichnen wir mit L . Wähle $\varepsilon_1 > 0$ so klein, dass

$$\varepsilon_1^2 \cdot C_1 \cdot C_3^3 \cdot L < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.17)$$

und

$$\varepsilon_1 \cdot C_2 \cdot L < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.18)$$

Dabei sind C_1 und C_2 die Konstanten aus Lemma 5.6.12 und Lemma 5.6.13. Da die Funktion $t \mapsto \|\ddot{c}(t)\|$ wie jede stetige und periodische Funktion gleichmäßig stetig ist, können wir ein $\delta_1 > 0$ finden, so dass $\|\ddot{c}(u) - \ddot{c}(v)\| < \varepsilon_1$ ist, wann immer $|u - v| < \delta_1$. Also gilt nach Lemma 5.6.10 für jede Unterteilung $U = (t_1, \dots, t_m)$ der Feinheit $< \delta_1$

$$\left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \dot{c}(\tau_i) \right\| < \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i), \quad (5.19)$$

wobei $\tau_i = \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$. Da für je zwei Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ gilt $|\|X\| - \|Y\|| \leq \|X - Y\|$, folgt

$$\begin{aligned} \left| \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| - 1 \right| &= \left| \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| - \|\dot{c}(\tau_i)\| \right| \\ &\leq \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \dot{c}(\tau_i) \right\| \\ (5.19) \quad &< \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|} - \dot{c}(\tau_i) \right\| \\
& \leq \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|} - \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| + \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \dot{c}(\tau_i) \right\| \\
(5.19) \quad & \leq \left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|} \left(1 - \frac{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|}{t_{i+1} - t_i} \right) \right\| + \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i) \\
& = \left| 1 - \frac{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|}{t_{i+1} - t_i} \right| + \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i) \\
(5.20) \quad & \leq \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i) + \frac{\varepsilon_1}{4}(t_{i+1} - t_i) \\
& = \frac{\varepsilon_1}{2}(t_{i+1} - t_i). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Ferner stellen wir fest, dass

$$\|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| = \left\| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \ddot{c}(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\ddot{c}(\tau)\| d\tau \stackrel{(5.16)}{\leq} C_3 \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i). \tag{5.22}$$

Die Abschätzungen gelten für alle $i \in \mathbb{Z}$, wenn wir die Konvention $t_{m+i} = t_i + L$ und entsprechend $\tau_{m+i} = \tau_i + L$ benutzen.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir endlich zur Totalkrümmung. Wegen

$$\kappa(c) = \int_0^L \|\ddot{c}(t)\| dt = L[\dot{c}]$$

ist die Totalkrümmung von c nichts anderes als die Länge der sphärischen Kurve \dot{c} . Nach Proposition 5.1.18 gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle Unterteilungen der Feinheit $< \delta_2$ die Länge von \dot{c} und die des zugehörigen einbeschriebenen Polygons sich um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ unterscheiden. Wir setzen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1\}$. Sei $U = (t_1, \dots, t_m)$ eine Unterteilung der Feinheit $< \delta$. Sei $P = P(U)$ das zugehörige einbeschriebene Polygon. Setze $\tau_i := \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$. Dann ist auch (τ_1, \dots, τ_m) eine Unterteilung der Feinheit $< \delta$. Wir wissen

$$\begin{aligned}
|\kappa(c) - \kappa(P)| &= |L[\dot{c}] - \kappa(P)| \\
&\leq \left| L[\dot{c}] - \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| \right| + \left| \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| - \kappa(P) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| - \kappa(P) \right|.
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass

$$\left| \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| - \kappa(P) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| - \kappa(P) \right| \\
& \leq \left| \sum_i \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\| - \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) \right| + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& \stackrel{\text{Lemma 5.6.12}}{\leq} \sum_i C_1 \cdot \|\dot{c}(\tau_{i+1}) - \dot{c}(\tau_i)\|^3 + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& \stackrel{(5.22)}{\leq} C_1 \cdot \sum_i C_3^3 \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i)^3 + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& \leq C_1 \cdot C_3^3 \cdot \sum_i \delta^2 \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& = C_1 \cdot C_3^3 \cdot \delta^2 \cdot L + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& \leq C_1 \cdot C_3^3 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot L + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& \stackrel{(5.17)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right|.
\end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass $\left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Mit Lemma 5.6.13 folgt

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_i \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \kappa(P) \right| \\
& = \left| \sum_i \left(\angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \angle(c(t_{i+2}) - c(t_{i+1}), c(t_{i+1}) - c(t_i)) \right) \right| \\
& \leq \sum_i \left| \angle(\dot{c}(\tau_{i+1}), \dot{c}(\tau_i)) - \angle(c(t_{i+2}) - c(t_{i+1}), c(t_{i+1}) - c(t_i)) \right| \\
& \leq C_2 \cdot \sum_i \left(\left\| \dot{c}(\tau_{i+1}) - \frac{c(t_{i+2}) - c(t_{i+1})}{\|c(t_{i+2}) - c(t_{i+1})\|} \right\| + \left\| \dot{c}(\tau_i) - \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|} \right\| \right) \\
& = 2 \cdot C_2 \cdot \sum_i \left\| \dot{c}(\tau_{i+1}) - \frac{c(t_{i+2}) - c(t_{i+1})}{\|c(t_{i+2}) - c(t_{i+1})\|} \right\| \\
& \stackrel{(5.21)}{\leq} 2 \cdot C_2 \cdot \sum_i \frac{\varepsilon_1}{2} (t_{i+2} - t_{i+1}) \\
& = C_2 \cdot \varepsilon_1 \cdot L \\
& \stackrel{(5.18)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis beendet. \square

Satz 5.6.9 ist nun leicht zu zeigen.

Beweis von Satz 5.6.9. Angenommen, es gibt ein in c eingeschriebenes Polygon P , so dass $\kappa(P) > \kappa(c)$. Setze $\varepsilon := \kappa(P) - \kappa(c) > 0$. Gemäß Proposition 5.6.14 können wir die P zugrunde liegende Unterteilung so verfeinern, dass für das daraus entstehende eingeschriebene Polygon P' gelten würde:

$$|\kappa(c) - \kappa(P')| < \varepsilon. \quad (5.23)$$

Da P' durch Hinzunahme von Ecken aus P entsteht, gilt nach Lemma 5.6.6

$$\kappa(P) \leq \kappa(P') \stackrel{(5.23)}{<} \kappa(c) + \varepsilon = \kappa(P),$$

Widerspruch. Also gilt für alle eingeschriebenen Polygone P

$$\kappa(P) \leq \kappa(c)$$

und somit auch

$$\sup_P \kappa(P) \leq \kappa(c).$$

Angenommen, $\sup_P \kappa(P) < \kappa(c)$. Setze $\varepsilon := \kappa(c) - \sup_P \kappa(P) > 0$. Wiederum erhalten wir gemäß Proposition 5.6.14 für eine hinreichend feine Unterteilung, dass für das zugehörige eingeschriebene Polygon P' gilt

$$\kappa(c) - \kappa(P') < \varepsilon.$$

Also liefert

$$\kappa(c) < \kappa(P') + \varepsilon \leq \sup_P \kappa(P) + \varepsilon = \kappa(c)$$

einen Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Kapitel 6

Knotentheorie

6.1 Grundlegende Definitionen

Definition 6.1.1 Ein *orientierter Knoten* ist eine einfach geschlossene periodische reguläre parametrisierte Raumkurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Seien c und \tilde{c} orientierte Knoten. Dann heißt c *isotop* zu \tilde{c} , falls es eine stetige Abbildung $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass

- (i) für jedes $s \in [0, 1]$ ist $H_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, H_s(t) := H(t, s)$, ein Knoten,
- (ii) $H_0 = c$,
- (iii) $H_1 = \tilde{c}$.

Die Abbildung H heißt *Isotopie* zwischen c und \tilde{c} .

Beispiel 6.1.2 Sei $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ Kreis vom Radius 1 mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(t) + 1 \\ \frac{1}{2} \sin(t) + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir setzen

$$H(t, s) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{s}{2}) \cos(t) + s \\ (1 - \frac{s}{2}) \sin(t) + s \\ s \end{pmatrix}.$$

Dann ist $H_0(t) = H(t, 0) = c(t), H_1(t) = H(t, 1) = \tilde{c}(t)$ und für jedes $s \in [0, 1]$ ist H_s periodisch mit Periode 2π , einfach geschlossen und wegen $H'_s(t) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{s}{2}) \sin(t) \\ (1 - \frac{s}{2}) \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist H_s regulär. Also ist c isotop zu \tilde{c} .

Satz 6.1.3 *Isotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Knoten.*

Beweis.

- a) c ist zu sich selbst isotop. Setze einfach $H(t, s) := c(t)$ für alle t und s .
- b) Ist c isotop zu \tilde{c} , so ist \tilde{c} isotop zu c . Ist H wie in der Definition mit $H_0 = c$ und $H_1 = \tilde{c}$, so gilt für $\hat{H}(t, s) := H(t, 1 - s)$, dass $\hat{H}_0 = \tilde{c}$ und $\hat{H}_1 = c$.
- c) Ist c isotop zu \tilde{c} und \tilde{c} isotop zu $\tilde{\tilde{c}}$, so ist c auch isotop zu $\tilde{\tilde{c}}$. Sei H wie in der Definition mit $H_0 = c$ und $H_1 = \tilde{c}$ und \hat{H} ebenfalls mit $\hat{H}_0 = \tilde{c}$ und $\hat{H}_1 = \tilde{\tilde{c}}$. Wir definieren $\hat{\hat{H}}(t, s) := \begin{cases} H(t, 2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \hat{H}(t, 2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Dann gilt $\hat{\hat{H}}_0 = H_0 = c$, $\hat{\hat{H}}_1 = \hat{H}_1 = \tilde{\tilde{c}}$ und für jedes $s \in [0, 1]$ ist $\hat{\hat{H}}_s$ eine einfach geschlossene periodische reguläre parametrisierte Raumkurve.

Die beiden Zweige in der Definition von $\hat{\hat{H}}$ sind für sich jeweils stetig, da sie Verkettungen stetiger Abbildungen sind. Sie setzen sich bei $s = \frac{1}{2}$ stetig zusammen, da $\hat{\hat{H}}_{\frac{1}{2}} = H_1 = \hat{H}_0 = \tilde{c}$. \square

Beispiel 6.1.4 Jeder zur Kreislinie $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ isotope orientierte Knoten heißt *Unknoten*.

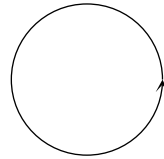


Abb. 264

Dieser Knoten ist ebenfalls Unknoten:

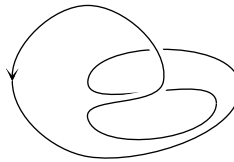


Abb. 265

Denn:

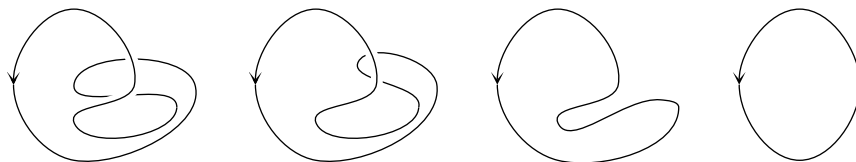
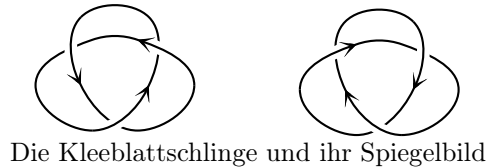


Abb. 266

Beispiel 6.1.5 Kleeblattschlinge

Die Kleeblattschlinge und ihr Spiegelbild

Abb. 267

Beispiel 6.1.6 Achterknoten

Achterknoten

Abb. 268

Satz 6.1.7 Sind c und \tilde{c} zwei orientierte Knoten, die durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation auseinander hervorgehen, dann sind c und \tilde{c} isotop.

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Parametertransformation, d. h. $c = \tilde{c} \circ \varphi$. Da φ orientierungserhaltend ist, gilt $\varphi' > 0$. Sei L_0 die Periode von c und L_1 die Periode von \tilde{c} .

a) *Behauptung:* Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(t + L_1) = \varphi(t) + L_0.$$

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$c(\varphi(t)) = \tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + L_1) = c(\varphi(t + L_1)).$$

Da c einfach geschlossen mit Periode L_0 ist, folgt $\varphi(t + L_1) = \varphi(t) + kL_0$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Aus Stetigkeitsgründen hängt k nicht von t ab. Bleibt zu zeigen, dass $k = 1$. Da φ orientierungserhaltend, also streng monoton wachsend ist, muss $k > 0$ sein.

Analog gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{-1}(t + L_0) = \varphi^{-1}(t) + lL_1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Vollständige Induktion liefert

$$\varphi^{-1}(t + mL_0) = \varphi^{-1}(t) + mL_1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen

$$t + L_1 = \varphi^{-1}(\varphi(t + L_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) + kL_0) = \varphi^{-1}(\varphi(t)) + klL_1 = t + klL_1$$

ist $k \cdot l = 1$, also auch $k = 1$.

b) Wir setzen nun für $s \in [0, 1]$

$$L_s := (1 - s)L_0 + sL_1 > 0$$

und

$$\varphi_s(t) := (1 - s) \cdot \frac{L_0}{L_s} \cdot t + s \cdot \varphi \left(\frac{L_1}{L_s} \cdot t \right).$$

Dann gilt für $s \in [0, 1]$

$$\varphi'_s(t) = (1 - s) \frac{L_0}{L_s} + s \frac{L_1}{L_s} \varphi' \left(\frac{L_1}{L_s} t \right) > 0.$$

Somit ist φ_s eine orientierungserhaltende Parametertransformation mit $\varphi_0(t) = t$ und $\varphi_1 = \varphi$. Also ist $H_s := c \circ \varphi_s$ für jedes $s \in [0, 1]$ Umparametrisierung von c , also insbesondere eine einfach geschlossene reguläre parametrisierte Raumkurve. Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_s(t + L_s) &= (1 - s) \frac{L_0}{L_s} (t + L_s) + s \varphi \left(\frac{L_1}{L_s} (t + L_s) \right) \\ &= (1 - s) \frac{L_0}{L_s} t + (1 - s)L_0 + s \varphi \left(\frac{L_1}{L_s} t + L_1 \right) \\ &= (1 - s) \frac{L_0}{L_s} t + (1 - s)L_0 + s \varphi \left(\frac{L_1}{L_s} t \right) + sL_0 \\ &= \varphi_s(t) + L_0 \end{aligned}$$

ist H_s periodisch mit Periode L_s . Somit erfüllt

$$H(t, s) := H_s(t) = c(\varphi_s(t)) = c \left((1 - s) \frac{L_0}{L_s} t + s \varphi \left(\frac{L_1}{L_s} t + t \right) \right)$$

alle Bedingungen. □

Definition 6.1.8 Eine endliche Menge $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}$ paarweise disjunkter orientierter Knoten heißt *orientierte Verschlingung*. Die orientierten Knoten c_j heißen die *Komponenten* von \mathcal{C} .

Beispiel 6.1.9 *Triviale Verschlingung*

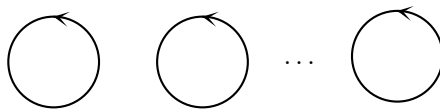


Abb. 269

Beispiel 6.1.10 *Hopf-Verschlingung*

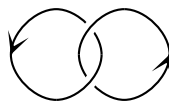


Abb. 270

Beispiel 6.1.11 *Borromeo-Ringe*

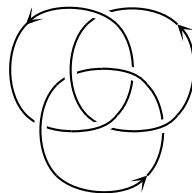


Abb. 271

Definition 6.1.12 Zwei orientierte Verschlingungen $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}$ und $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$ heißen *isotop*, wenn es stetige Abbildungen $H^1, \dots, H^k : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass

- (i) für jedes $s \in [0, 1]$ ist $\{H_s^1, \dots, H_s^k\}$ eine orientierte Verschlingung
- (ii) $\mathcal{C} = \{H_0^1, \dots, H_0^k\}$
- (iii) $\tilde{\mathcal{C}} = \{H_1^1, \dots, H_1^k\}$.

Bemerkung 6.1.13 Wie für Knoten zeigt man, dass Isotopie von orientierter Verschlingung eine Äquivalenzrelation ist und dass orientierungserhaltende Parametertransformationen zu isotopen Verschlingungen führen.

Wir wollen Verschlingungen durch 2-dimensionale Projektionen beschreiben. Seien dazu $v, w \in \mathbb{R}^3$ orthonormal, d.h. $\|v\| = \|w\| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$. Wir betrachten die zugehörige Projektion

$$\Pi_{v,w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \langle x, v \rangle \\ \langle x, w \rangle \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Projektion ist die von $v \times w$ erzeugte Gerade.

Definition 6.1.14 Wir nennen die Projektion $\Pi_{v,w}$ *zulässig* für die Verschlingung $\{c_1, \dots, c_k\}$, falls gilt:

- (i) $\Pi_{v,w}(\dot{c}_j(t)) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, k$.

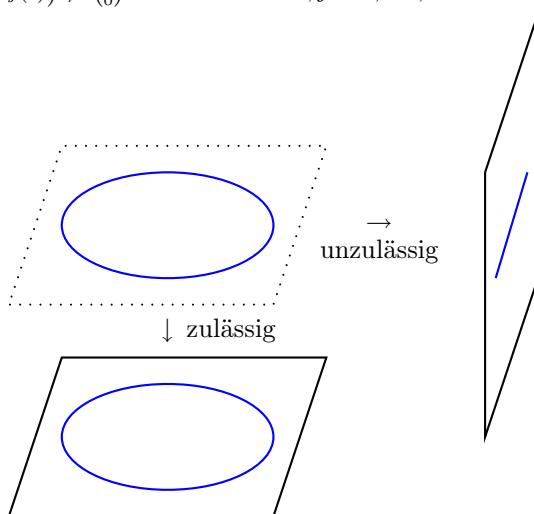


Abb. 272

- (ii) Jeder Bildpunkt im \mathbb{R}^2 hat unter $\Pi_{v,w}$ höchstens zwei Urbilder auf $c_1(\mathbb{R}) \cup \dots \cup c_k(\mathbb{R})$.

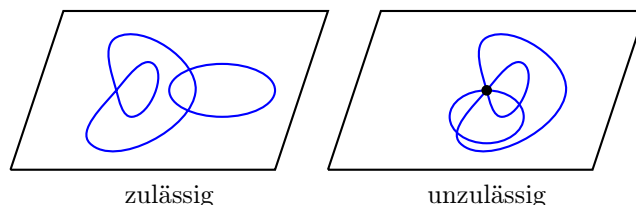


Abb. 273

- (iii) Sind $c_i(t_1) \neq c_j(t_2)$ mit $\Pi_{v,w}(c_i(t_1)) = \Pi_{v,w}(c_j(t_2))$, so sind $\Pi_{v,w}(\dot{c}_i(t_1))$ und $\Pi_{v,w}(\dot{c}_j(t_2))$ linear unabhängig.

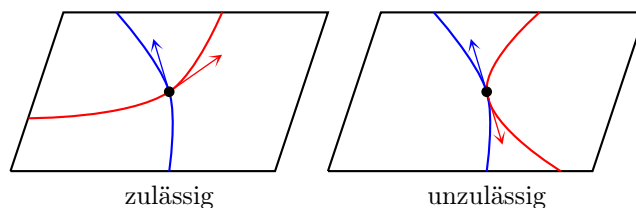


Abb. 274

Der Punkt $\Pi_{v,w}(c_i(t_1)) = \Pi_{v,w}(c_j(t_2))$ heißt dann *Überkreuzungspunkt* oder *Doppelpunkt*.

Bemerkung 6.1.15 Man kann zeigen, dass für jede Verschlingung eine zulässige Projektion existiert.

Definition 6.1.16 Ist $\Pi_{v,w}$ eine zulässige Projektion für $\{c_1, \dots, c_k\}$, so heißt $(\{\Pi_{v,w} \circ c_1, \dots, \Pi_{v,w} \circ c_k\}, \{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\})$ das zugehörige *Verschlingungsdiagramm* (im Fall $k = 1$ auch *Knotendiagramm*), wobei $\Pi_{v,w}(c_{j_1}(t_1)), \dots, \Pi_{v,w}(c_{j_n}(t_n))$ genau die paarweise verschiedenen Überkreuzungspunkte sind und für das jeweils andere Urbild $c_{j'_i}(t'_i)$ von $\Pi_{v,w}(c_{j_i}(t_i))$ unter $\Pi_{v,w}$ gilt:

$$\langle c_{j_i}(t_i), v \times w \rangle > \langle c_{j'_i}(t'_i), v \times w \rangle.$$

Anschaulich heißt dies, dass von den beiden Urbildern eines Doppelpunktes der Punkt $c_{j_i}(t_i)$ dasjenige ist, das über der von v und w aufgespannten Projektionsebene weiter oben liegt, der Punkt $c_{j'_i}(t'_i)$ dagegen dasjenige, das weiter unten liegt. Das Verschlingungsdiagramm enthält also nicht nur die projizierten Kurven $\Pi_{v,w} \circ c_1, \dots, \Pi_{v,w} \circ c_k$, sondern auch die Information, welcher von den beiden Strängen durch einen Doppelpunkt über den anderen verläuft.

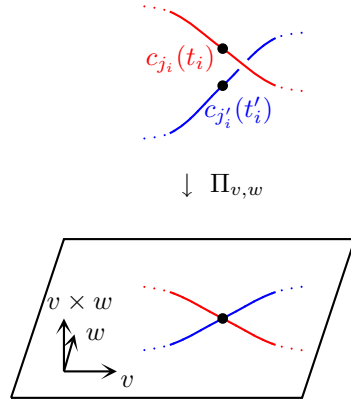


Abb. 275

Wir stellen $\{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\}$ grafisch dadurch dar, dass wir $\Pi_{v,w} \circ c_{j'_i}(t)$ für $|t - t'_i| < \varepsilon$ **nicht** zeichnen, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein.

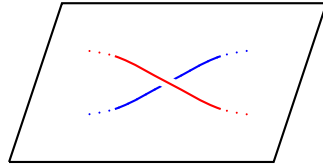


Abb. 276

Satz 6.1.17 *Haben zwei orientierte Verschlingungen dasselbe Verschlingungsdiagramm, so sind sie isotop.*

Beweis. Seien $\{c_1, \dots, c_k\}$ und $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$ zwei orientierte Verschlingungen. Seien v, w und \tilde{v}, \tilde{w} jeweils orthonormal in \mathbb{R}^3 , so dass $\Pi_{v,w}$ zulässig ist für $\{c_1, \dots, c_k\}$ und $\Pi_{\tilde{v},\tilde{w}}$ für $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$ und die zugehörigen Verschlingungsdiagramme übereinstimmen. Wir müssen zeigen, dass $\{c_1, \dots, c_k\}$ und $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$ isotop sind.

- a) Wir betrachten zunächst den Fall $v = \tilde{v}, w = \tilde{w}$. Dann ist $\Pi_{v,w} \circ c_j = \Pi_{v,w} \circ \tilde{c}_j$, für alle $j = 1, \dots, k$. Definiere $H^j(t, s) := s \cdot \tilde{c}_j(t) + (1 - s)c_j(t)$. Dann ist $H_0^j(t) = H^j(t, 0) = c_j(t)$ und $H_1^j(t) = H^j(t, 1) = \tilde{c}_j(t)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\{H_s^1, \dots, H_s^k\}$ für jedes $s \in [0, 1]$ eine orientierte Verschlingung ist.

$$\begin{aligned} \Pi_{v,w}(\dot{H}_s^j(t)) &= \Pi_{v,w}(s \dot{\tilde{c}}_j(t) + (1 - s) \dot{c}_j(t)) \\ &= s \Pi_{v,w}(\dot{\tilde{c}}_j(t)) + (1 - s) \Pi_{v,w}(\dot{c}_j(t)) \\ &= \Pi_{v,w}(\dot{c}_j(t)), \end{aligned}$$

da die Verschlingungsdiagramme übereinstimmen. Insbesondere ist $\Pi_{v,w}(\dot{H}_s^j(t)) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit auch $(\dot{H}_s^j(t)) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Über-

kreuzungspunkte sehen wir ferner

$$\begin{aligned}
\langle H_s^{j_i}(t_i), v \times w \rangle &= \langle s \cdot \tilde{c}_{j_i}(t_i) + (1-s)c_{j_i}(t_i), v \times w \rangle \\
&= \underbrace{s}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\langle \tilde{c}_{j_i}(t_i), v \times w \rangle}_{> \langle \tilde{c}_{j_i'}(t_i'), v \times w \rangle} + \underbrace{(1-s)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\langle c_{j_i}(t_i), v \times w \rangle}_{> \langle c_{j_i'}(t_i'), v \times w \rangle} \\
&> s \cdot \langle \tilde{c}_{j_i'}(t_i'), v \times w \rangle + (1-s) \langle c_{j_i'}(t_i'), v \times w \rangle \\
&= \langle H_s^{j_i'}(t_i'), v \times w \rangle.
\end{aligned}$$

Insbesondere hat $\{H_s^1, \dots, H_s^k\}$ keine Selbstdurchdringungen und bildet somit eine orientierte Verschlingung.

- b) Seien nun v, w und \tilde{v}, \tilde{w} nicht notwendig gleich. Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die $0, v$ und \tilde{v} enthält, sei φ die Winkelgröße zwischen v und \tilde{v} .

Sei $A(s) \in O(3)$ die Drehung in E um die Winkelgröße $s \cdot \varphi$ von v in Richtung \tilde{v} . Dann ist $A(0) = \text{id}$ und $A(1)v = \tilde{v}$. Setze $v_s := A(s)v, w_s := A(s)w, H_s^j(t) := H^j(t, s) := A(s) \cdot c_j(t)$. Dann ist $\{c_1, \dots, c_k\} = \{H_0^1, \dots, H_0^k\}$ isotop zu $\{H_s^1, \dots, H_s^k\} =: \{\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k\}$ und für alle $s \in [0, 1]$ ist Π_{v_s, w_s} zulässig für $\{H_s^1, \dots, H_s^k\}$ mit demselben Verschlingungsdiagramm, denn $\Pi_{v_s, w_s}(H_s^j(t)) = \begin{pmatrix} \langle H_s^j(t), v_s \rangle \\ \langle H_s^j(t), w_s \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A(s)c_j(t), A(s)v \rangle \\ \langle A(s)c_j(t), A(s)w \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_j(t), v \rangle \\ \langle c_j(t), w \rangle \end{pmatrix} = \Pi_{v, w}(c_j(t))$, da $A(s)$ eine orthogonale Matrix ist. Eine erneute Drehung um die \tilde{v} -Achse, welche w in \tilde{w} überführt, liefert eine zu $\{\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k\}$ isotope Verschlingung $\{\hat{\tilde{c}}_1, \dots, \hat{\tilde{c}}_k\}$, für die $\Pi_{\tilde{v}, \tilde{w}}$ zulässig ist, mit demselben Verschlingungsdiagramm. Nach Teil a) sind $\{\hat{\tilde{c}}_1, \dots, \hat{\tilde{c}}_k\}$ und $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$ isotop, also auch $\{c_1, \dots, c_k\}$ und $\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}$. \square

Definition 6.1.18 Zwei orientierte Verschlingungsdiagramme

$(\{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k\}, \{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\})$ und $(\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k\}, \{(\tilde{j}_1, \tilde{t}_1), \dots, (\tilde{j}_n, \tilde{t}_n)\})$ heißen *isotop*, wenn es stetige Abbildungen $\bar{H}^1, \dots, \bar{H}^k : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und stetige Funktionen $\tau_1, \dots, \tau_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

- (i) für jedes $s \in [0, 1]$ ist $(\{\bar{H}_s^1, \dots, \bar{H}_s^k\}, \{(j_1, \tau_1(s)), \dots, (j_n, \tau_n(s))\})$ ein orientiertes Verschlingungsdiagramm
- (ii) nach eventueller Ummummerierung gilt $j_1 = \tilde{j}_1, \dots, j_n = \tilde{j}_n$
- (iii) $\bar{H}_0^i = \bar{c}_i, \bar{H}_1^i = \tilde{c}_i$
- (iv) $\tau_i(0) - t_i \in \mathbb{Z} \cdot L_{j_i},$
 $\tau_i(1) - \tilde{t}_i \in \mathbb{Z} \cdot \tilde{L}_{j_i},$
wobei L_j die Periode von \bar{c}_j und \tilde{L}_j die von \tilde{c}_j ist.

Bemerkung 6.1.19 Isotope Verschlingungsdiagramme haben stets dieselbe Anzahl k von Komponenten und dieselbe Anzahl n von Doppelpunkten.

Bemerkung 6.1.20 Isotope Knoten (oder Verschlingungen) können Knotendiagramme haben, die nicht isotop sind.

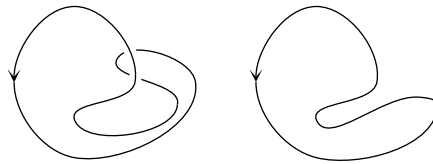


Abb. 277

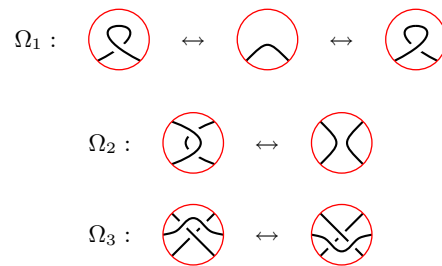
Abbildung 277 zeigt zwei Knotendiagramme von Knoten, die zueinander isotop sind: Beide sind Unknoten. Die Diagramme selbst sind aber nicht isotop, da sie nicht einmal dieselbe Anzahl von Doppelpunkten haben.

Ähnlich wie die bisherigen Sätze zeigt man:

Satz 6.1.21 *Haben zwei orientierte Verschlingungen isotope Verschlingungsdiagramme, so sind sie selbst isotop.*

6.2 Die Reidemeister-Bewegungen

Definition 6.2.1 Man sagt, ein orientiertes Verschlingungsdiagramm entsteht aus einem anderen durch Anwendung einer *Reidemeister-Bewegung* Ω_i , falls die Diagramme außerhalb einer kleinen (rot umrandeten) Scheibe übereinstimmen und sich innerhalb der Scheibe wie folgt ändern:



Beispiel 6.2.2

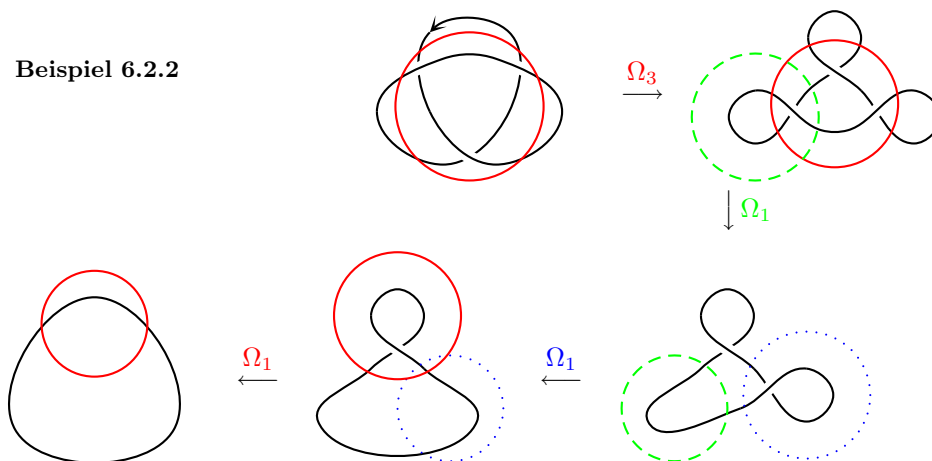


Abb. 278

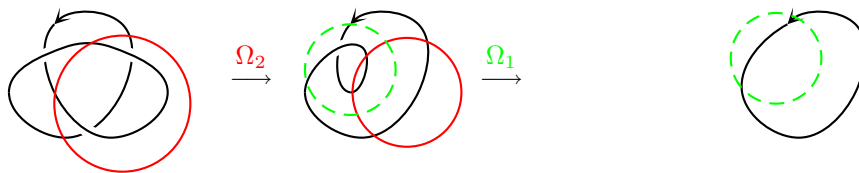
Beispiel 6.2.3

Abb. 279

Satz 6.2.4 (Reidemeister) Seien D und \tilde{D} Verschlingungsdiagramme der orientierten Verschlingungen C und \tilde{C} . Die orientierten Verschlingungen C und \tilde{C} sind genau dann isotop, wenn es eine endliche Folge von Verschlingungsdiagrammen D_0, D_1, \dots, D_N gibt, so dass

- (i) $D_0 = D$
- (ii) $D_N = \tilde{D}$
- (iii) D_i entsteht aus D_{i-1} durch eine Diagramm-Isotopie oder eine Reidemeister-Bewegung, $i = 1, \dots, N$.

Ohne Beweis. Eine Richtung ist aber leicht zu zeigen: Nach Proposition 6.1.21 führen isotope Verschlingungsdiagramme zu isotopen Verschlingungen. Dass die Reidemeister-Bewegungen zu Isotopien der zugehörigen Verschlingungen gehören, ist auch leicht zu sehen. Die Schwierigkeit im Beweis ist zu zeigen, dass man mit den Reidemeister-Bewegungen auskommt.

6.3 Die Verschlingungszahl

Definition 6.3.1 Sei $D = (\{c_1, \dots, c_k\}, \{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\})$ ein orientiertes Verschlingungsdiagramm, sei $p = c_{j_i}(t_i) = c_{j'_i}(t'_i)$ ein Doppelpunkt. Wir ordnen dem Doppelpunkt das Vorzeichen $\text{sign}(p) = +1$ zu, falls $\det(\dot{c}_{j_i}(t_i), \dot{c}_{j'_i}(t'_i)) > 0$, d.h. falls

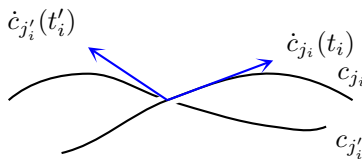


Abb. 280

$\dot{c}_{j_i}(t_i)$ und $\dot{c}_{j'_i}(t'_i)$ eine positiv orientierte Basis von \mathbb{R}^2 bilden. Falls $\det(\dot{c}_{j_i}(t_i), \dot{c}_{j'_i}(t'_i)) < 0$, setzen wir $\text{sign}(p) = -1$.

Korollar 6.3.6 Definiert man für zwei verschiedene Komponenten c_i und c_j einer orientierten Verschlingung \mathcal{C} die Verschlingungszahl

$$lk(c_i, c_j) := lk(\Pi \circ c_i, \Pi \circ c_j),$$

wobei $\Pi = \Pi_{v,w}$ eine zulässige Projektion von \mathcal{C} ist, so ist dies wohldefiniert, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl von v und w , und liefert für eine isotope Verschlingung dieselben Werte. \square

Beispiel 6.3.7 Die Hopf-Verschlingung ist nicht trivial, da die beiden Komponenten Verschlingungszahl ± 1 haben und nicht 0.

Beispiel 6.3.8 Eine Kette der Form



Abb. 281

kann nicht in zwei Teilketten der Form



Abb. 282

zerfallen, da sich die Verschlingungszahl der beiden Komponenten, die auseinander genommen würden, von ± 1 auf 0 verändern würde.

Beispiel 6.3.9 Sei $V = \{c_1, c_2\}$, wobei die beiden Komponenten wie folgt verschlungen sind:

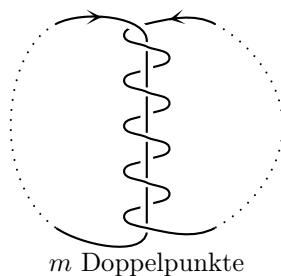
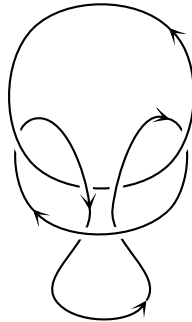


Abb. 283

Dann ist $lk(c_1, c_2) = \pm m$.

Beispiel 6.3.10 Der Ringstek (Seemannsknoten zur Befestigung einer Leine an einem Ring).



Ringstek

Abb. 284

Es gilt $lk(c_1, c_2) = 0$ und beide Komponenten sind für sich genommen Unknoten. In der Tat ist die Verschlingung trivial.

Beispiel 6.3.11 Die Verschlingung

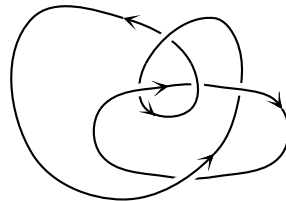


Abb. 285

besteht aus zwei Komponenten, die jeweils für sich genommen Unknoten sind. Die Verschlingungszahl ist 0. Dennoch ist diese Verschlingung nicht trivial, was wir später zeigen können.

Beispiel 6.3.12 In den Borromeo-Ringen haben je zwei Komponenten Verschlingungszahl 0:

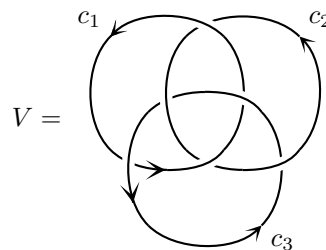


Abb. 286

In der Tat bleibt nach Entfernung einer der Komponenten eine triviale Verschlingung mit zwei Komponenten übrig. Ob die Borromeo-Ringe insgesamt isotop zur trivialen Verschlingung mit drei Komponenten sind, können wir jetzt auch noch nicht beantworten.

Satz 6.3.13 *Sind c_1 und c_2 zwei verschiedene Komponenten einer orientierten Verschlingung \mathcal{C} , dann gilt:*

- (i) $lk(c_1, c_2) = lk(c_2, c_1)$
- (ii) *Kehrt man die Orientierung von c_1 um, also $\bar{c}_1(t) := c_1(-t)$, so ist $lk(\bar{c}_1, c_2) = -lk(c_1, c_2)$.*

Beweis. Es sei D ein Verschlingungsdiagramm von \mathcal{C} . Um (i) zu beweisen, bezeichnen wir mit P_1 die Menge aller Doppelpunkte von D , in denen c_1 über c_2 läuft, und mit P_2 die Menge der Doppelpunkte, in denen c_2 über c_1 läuft. Dann gilt nach der Definition 6.3.2 also

$$lk(c_1, c_2) = \sum_{p \in P_1} \text{sign}(p) \quad \text{und} \quad lk(c_2, c_1) = \sum_{p \in P_2} \text{sign}(p).$$

Die Behauptung erhalten wir nun nach Induktion über die Zahl der Elemente von P_2 . Ist $\#P_2 = 0$, also $P_2 = \emptyset$, dann läuft \bar{c}_1 stets über \bar{c}_2 und eine einfache Translation liefert eine Isotopie, so dass \bar{c}_1 und \bar{c}_2 disjunkt sind. Dann ist $lk(c_1, c_2) = lk(c_2, c_1) = 0$.

Sei nun $\#P_2 > 0$. Wir wählen ein $p \in P_2$, führen einen Überkreuzungswechsel in p durch und erhalten ein orientiertes Verschlingungsdiagramm D' mit $P'_1 = P_1 \cup \{p\}$ und $P'_2 = P_2 \setminus \{p\}$. Außerdem haben wir $\text{sign}'(p) = -\text{sign}(p)$, da p sein Vorzeichen ändert. Hierbei bezeichnet $\text{sign}'(p)$ das Vorzeichen von p im Diagramm D' und $\text{sign}(p)$ das Vorzeichen von p im Diagramm D . Analog bezeichnen lk und lk' die Verschlingungszahlen im Diagramm D bzw. D' .

Wir erhalten

$$\begin{aligned} lk'(\bar{c}_1, \bar{c}_2) &= \sum_{q \in P'_1} \text{sign}'(q) \\ &= \sum_{q \in P_1} \text{sign}(q) - \text{sign}(p) \\ &= lk(\bar{c}_1, \bar{c}_2) - \text{sign}(p) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} lk'(\bar{c}_2, \bar{c}_1) &= \sum_{q \in P'_2} \text{sign}'(q) \\ &= \sum_{q \in P_2} \text{sign}(q) - \text{sign}(p) \\ &= lk(\bar{c}_2, \bar{c}_1) - \text{sign}(p). \end{aligned}$$

Da $\#P'_2 = \#P_2 - 1$ gilt, liefert die Induktionsannahme $lk'(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = lk'(\bar{c}_2, \bar{c}_1)$ nun die Behauptung $lk(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = lk(\bar{c}_2, \bar{c}_1)$. Damit ist (i) gezeigt.

Aussage (ii) ist eine Übungsaufgabe. □

Als Folgerung aus Satz 6.3.13 erhalten wir neben der zu (ii) analogen Behauptung bezüglich c_2 :

$$lk(c_1, \tilde{c}_2) = lk(\tilde{c}_2, c_1) = -lk(c_2, c_1) = -lk(c_1, c_2)$$

schließlich für ein Verschlingungsdiagramm D von \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} lk(c_1, c_2) &= \frac{1}{2}(lk(c_1, c_2) + lk(c_2, c_1)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{\text{Doppelpunkte } p \text{ von } D, \\ \text{in denen } \bar{\varepsilon}_1 \text{ über } \bar{\varepsilon}_2 \text{ läuft}}} \text{sign}(p) + \sum_{\substack{\text{Doppelpunkte } p \text{ von } D, \\ \text{in denen } \bar{\varepsilon}_2 \text{ über } \bar{\varepsilon}_1 \text{ läuft}}} \text{sign}(p) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{\text{alle Doppelpunkte } p \text{ von } D, \\ \text{in denen sich } \bar{\varepsilon}_1 \text{ und } \bar{\varepsilon}_2 \text{ kreuzen}}} \text{sign}(p) \right). \end{aligned}$$

6.4 Das Kauffman-Polynom

Nach Einführung der Verschlingungszahl konnten wir bereits von vielen Verschlingungen sagen, dass sie nicht Isotop zur trivialen Verschlingung sind. Allerdings fanden wir auch Beispiele, wo es uns nicht möglich war, eine derartige Aussage zu treffen; und über einzelne Knoten können wir noch gar nicht urteilen, denn wenn wir keine Reidemeisterzüge finden, heißt das ja noch lange nicht, dass es wirklich keine gibt. Wir suchen also eine weitere Invariante, die uns weitere Aussagen über die Isotopie von Verschlingungen liefert. Diese wird ein Polynom sein.

Isotope Verschlingungen sollen dasselbe Polynom erhalten; dann wissen wir, dass Verschlingungen, die nicht dasselbe Polynom zugeordnet bekommen, nicht isotop sein können. Wir ordnen also Verschlingungsdiagrammen Polynome so zu, dass sie sich nicht ändern, wenn man ein Diagramm durch ein isotopes ersetzt oder durch eines, welches durch eine Reidemeister-Bewegung entsteht.

Notation. Wir schreiben für die Menge der Polynome in den Variablen X_1, \dots, X_n mit ganzzahligen Koeffizienten

$$\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] := \left\{ \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^N k_{j_1 \dots j_n} X_1^{j_1} \cdot \dots \cdot X_n^{j_n} \mid N \in \mathbb{N}, k_{j_1 \dots j_n} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Satz 6.4.1 *Es gibt eine eindeutige Abbildung*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{orientierte} \\ \text{Verschlingungsdiagramme} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{Z}[A, B, C],$$

$$D \longmapsto \langle D \rangle_3,$$

so dass gilt

- (i) Sind D und D' isotop, so ist $\langle D \rangle_3 = \langle D' \rangle_3$
- (ii) $\langle \textcircled{\times} \rangle_3 = A \cdot \langle \textcircled{\times} \rangle_3 + B \cdot \langle \textcircled{\times} \rangle_3$
- (iii) $\langle D \dot{\cup} \bigcirc \rangle_3 = C \cdot \langle D \rangle_3$
- (iv) $\langle \bigcirc \rangle_3 = 1$

Beispiel 6.4.2 Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle_3 &\stackrel{(ii)}{=} A \cdot \langle \infty \rangle_3 + B \cdot \langle \bigcirc \bigcirc \rangle_3 \\ &\stackrel{(i)\&(iii)}{=} A \cdot \langle \bigcirc \rangle_3 + B \cdot C \cdot \langle \bigcirc \rangle_3 \\ &\stackrel{(iv)}{=} A + B \cdot C \end{aligned}$$

Beispiel 6.4.3 Unter Benutzung des soeben Berechneten sehen wir

$$\begin{aligned} \langle \infty \infty \rangle_3 &\stackrel{(ii)}{=} A \langle \infty \infty \rangle_3 + B \langle \infty \bigcirc \rangle_3 \\ &\stackrel{(i)\&(iii)}{=} A \langle \infty \rangle_3 + BC \langle \infty \rangle_3 \\ &= (A + BC) \langle \infty \rangle_3 \\ &= (A + BC)^2 \\ &= A^2 + 2ABC + B^2C^2. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Eindeutigkeit.

Seien $\{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\}$ die Markierungen der Doppelpunkte im Verschlingungsdiagramm D . Unter einem Zustand von D wollen wir eine Abbildung

$$Z : \{(j_1, t_1), \dots, (j_n, t_n)\} \longrightarrow \{a, b\}$$

verstehen. Wir stellen uns einen Zustand so vor, dass jeder Überkreuzungspunkt des Diagramms mit dem Buchstaben a oder b dekoriert ist. Zum Beispiel hat $\infty \infty$ 4 Zustände:

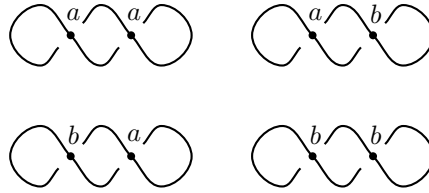


Abb. 287

Jedem Zustand von D ordnen wir das Verschlingungsdiagramm ohne Überkreuzungen zu, dass aus D dadurch entsteht, dass wir in den Überkreuzungen, die auf a abgebildet werden, die Transformation

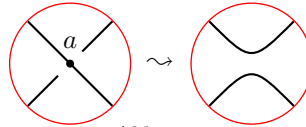


Abb. 288

durchführen, und in denen, die auf b abgebildet werden, die Transformation

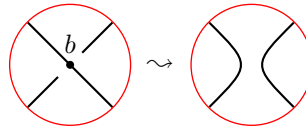


Abb. 289

Sei $\gamma(Z)$ die Anzahl der Komponenten nach Durchführung dieser Transformationen. So erhalten wir z. B. für die Zustände von $\infty\infty$

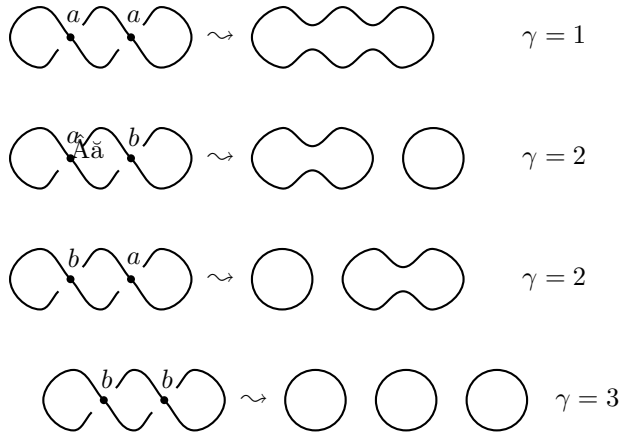


Abb. 290

Sei ferner $\alpha(Z)$ die Anzahl der Überkreuzungen, die auf a abgebildet werden, und $\beta(Z)$ die Anzahl derer, die auf b gehen. Insbesondere gilt

$$\alpha(Z) + \beta(Z) = n.$$

Wir zeigen nun durch Induktion über die Anzahl n der Überkreuzungen, dass

$$\langle D \rangle_3 = \sum_{\text{Zustände } Z} A^{\alpha(Z)} B^{\beta(Z)} C^{\gamma(Z)-1}. \tag{6.1}$$

Dann haben wir eine Formel für $\langle D \rangle_3$ hergeleitet und insbesondere die Eindeutigkeit bewiesen.

Induktionsanfang $n = 0$:

Dann gibt es nur den trivialen Zustand Z_0 . Es gilt $\alpha(Z_0) = \beta(Z_0) = 0$ und $\gamma(Z_0)$ ist die Anzahl der Komponenten von D . Da keine Überkreuzungen vorliegen, sind alle Komponenten von D trivial. Daher gilt

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_3 &= \langle \bigcirc \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \bigcirc \rangle_3 = C^{\gamma(Z_0)-1} \cdot \langle \bigcirc \rangle_3 \\ &= C^{\gamma(Z_0)-1} = A^0 \cdot B^0 \cdot C^{\gamma(Z_0)-1}. \end{aligned}$$

Formel (6.1) gilt also für $n = 0$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Sei D ein Verschlingungsdiagramm mit $n + 1$ Überkreuzungen. Wir unterteilen die möglichen Zustände von D in zwei Typen, je nachdem, was der Zustand mit der letzten Überkreuzung macht. Wir nennen einen Zustand Z von D vom Typ I, falls $Z((j_{n+1}, t_{n+1})) = a$, und vom Typ II, falls $Z((j_{n+1}, t_{n+1})) = b$. Durchführung der entsprechenden Transformation im $(n + 1)$ -ten Doppelpunkt liefert eine Verschlingung

D_I bzw. D_{II} . Ein Zustand Z von Typ I liefert Zustand Z' von D_I , Zustand von Typ II liefert Zustand Z'' von D_{II} , so dass

$$\alpha(Z) = \alpha(Z') + 1, \quad \beta(Z) = \beta(Z'),$$

$$\alpha(Z) = \alpha(Z''), \quad \beta(Z) = \beta(Z'') + 1,$$

und

$$\gamma(Z) = \gamma(Z') \quad \text{bzw.} \quad \gamma(Z) = \gamma(Z'').$$

Für die Zustände von $D = \infty\infty$ haben wir beispielsweise

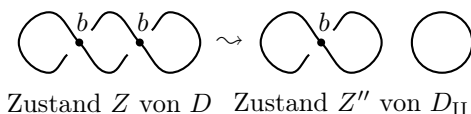
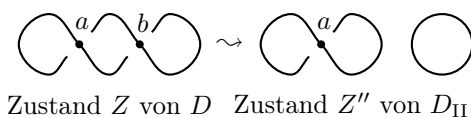
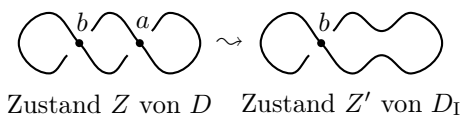
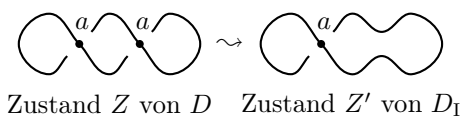


Abb. 291

Es gilt nun nach Induktionsannahme für D_I und D_{II}

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_3 &= A \cdot \langle D_I \rangle_3 + B \cdot \langle D_{II} \rangle_3 \\ &= A \cdot \sum_{\substack{\text{Zustände } Z' \\ \text{von } D_I}} A^{\alpha(Z')} B^{\beta(Z')} C^{\gamma(Z')-1} \\ &\quad + B \cdot \sum_{\substack{\text{Zustände } Z'' \\ \text{von } D_{II}}} A^{\alpha(Z'')} B^{\beta(Z'')} C^{\gamma(Z'')-1} \\ &= A \cdot \sum_{Z \text{ vom Typ I}} A^{\alpha(Z)-1} B^{\beta(Z)} C^{\gamma(Z)-1} \\ &\quad + B \cdot \sum_{Z \text{ vom Typ II}} A^{\alpha(Z)} B^{\beta(Z)-1} C^{\gamma(Z)-1} \\ &= \sum_{\substack{\text{Zustände } Z \\ \text{von } D}} A^{\alpha(Z)} B^{\beta(Z)} C^{\gamma(Z)-1}. \end{aligned}$$

Damit ist Formel (6.1) für alle n gezeigt.

Existenz.

Definiere $\langle D \rangle_3$ durch Formel (6.1). Man sieht dann leicht, dass (i) - (iv) gelten. \square

Nun untersuchen wir, wie sich $\langle D \rangle_3$ bei Reidemeister-Bewegungen verhält. Wir beginnen mit der Reidemeister-Bewegung Ω_2 :

$$\begin{aligned} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 1}} \right\rangle_3 &= A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 2}} \right\rangle_3 + B \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 3}} \right\rangle_3 \\ &= A \cdot \left\{ A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 4}} \right\rangle_3 + B \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 5}} \right\rangle_3 \right\} \\ &\quad + B \cdot \left\{ A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 6}} \right\rangle_3 + B \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 7}} \right\rangle_3 \right\} \\ &= (A^2 + ABC + B^2) \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 8}} \right\rangle_3 + AB \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 9}} \right\rangle_3 \end{aligned}$$

Entsprechend der Reidemeister-Bewegung Ω_2 hätten wir gerne

$$\left\langle \textcircled{\text{Diagram 1}} \right\rangle_3 = \left\langle \textcircled{\text{Diagram 9}} \right\rangle_3.$$

Dies ist äquivalent zu $A^2 + ABC + B^2 = 0$ und $AB = 1$, d. h. zu

$$\begin{aligned} B &= A^{-1}, \\ C &= -A^2 - A^{-2}. \end{aligned}$$

Wir substituieren nun einfach diese Werte für B und C und erhalten ein neues Polynom, das nur noch von A abhängt.

Definition 6.4.4 Das Polynom

$$\langle D \rangle (A) := \langle D \rangle_3 (A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2}) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

heißt *Klammerpolynom* des Verschlingungsdiagrammes D .

Wir haben alles so eingerichtet, dass $\langle D \rangle (A)$ sich bei Isotopie des Verschlingungsdiagrammes und bei Anwenden von Ω_2 nicht ändert. Zu Ω_3 :

$$\begin{aligned} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 10}} \right\rangle &= A \left\langle \textcircled{\text{Diagram 11}} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 12}} \right\rangle \\ &\stackrel{\Omega_2}{=} A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 13}} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 14}} \right\rangle, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 15}} \right\rangle &= A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 16}} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 17}} \right\rangle \\ &\stackrel{\Omega_2}{=} A \cdot \left\langle \textcircled{\text{Diagram 18}} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \textcircled{\text{Diagram 19}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Also ändert sich $\langle D \rangle$ auch bei Anwenden von Ω_3 nicht. Nun zu Ω_1 :

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Knoten} \rangle &= A \cdot \langle \text{Knoten} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \\
 &= (A + A^{-1}) \langle \text{Knoten} \rangle \\
 &= (A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}) \langle \text{Knoten} \rangle \\
 &= -A^3 \cdot \langle \text{Knoten} \rangle
 \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\langle \text{Knoten} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Knoten} \rangle$$

Das Klammerpolynom ändert sich also nicht bei Isotopie von Diagrammen und bei Ω_2, Ω_3 , wohl aber bei Ω_1 ! Dies müssen wir noch korrigieren.

Bemerkung 6.4.5 Bislang hat die Orientierung des Verschlingungsdiagrammes keine Rolle gespielt: Kehrt man die Orientierung einer oder mehrerer Komponenten um, so ändern sich $\langle D \rangle_3$ und $\langle D \rangle$ nicht.

Definition 6.4.6 Die *Verwindung* von D ist definiert durch

$$w(D) := \sum_{\substack{\text{Doppelpunkte} \\ p \text{ von } D}} \text{sign}(p).$$

Beispiel 6.4.7

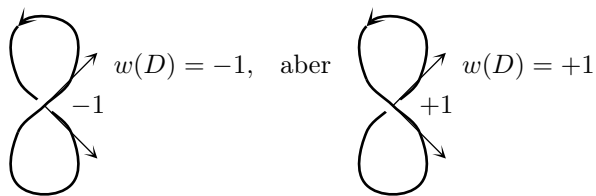


Abb. 292

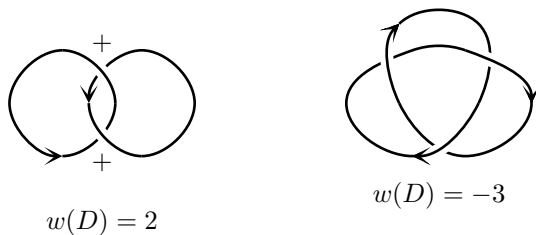


Abb. 293

Definition 6.4.8 Für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm D ist das *Kauffman-Polynom* von D definiert durch

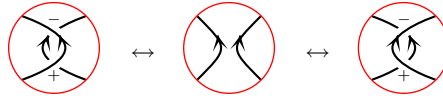
$$\mathcal{L}_D := (-A)^{-3w(D)} \cdot \langle D \rangle.$$

Satz 6.4.9 Seien D und D' Verschlingungsdiagramme der orientierten Verschlingungen \mathcal{C} und \mathcal{C}' . Sind \mathcal{C} und \mathcal{C}' isotop, so gilt

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{D'}.$$

Beweis. Nach dem Satz von Reidemeister lässt sich D' aus D durch endlich viele Diagrammisotopien und Reidemeister-Bewegungen erzeugen. Bei Diagrammisotopien ändern sich weder $\langle \cdot \rangle$ noch w . Zu den Reidemeister-Bewegungen:

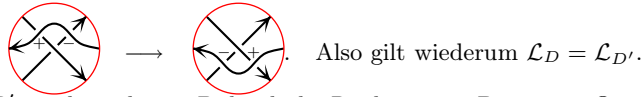
Ω_2 : D' ergebe sich aus D durch die Reidemeister-Bewegung Ω_2 . Wir wissen bereits, dass dann $\langle D \rangle = \langle D' \rangle$. Die bei Ω_2 auftretenden beiden neuen Doppelpunkte haben entgegengesetztes Vorzeichen. Also ändert sich die Verwirrung nicht, $w(D) = w(D')$.



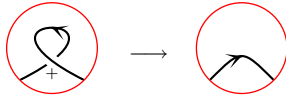
Somit gilt

$$\mathcal{L}_D = (-A)^{-3w(D)} \cdot \langle D \rangle = (-A)^{-3w(D')} \cdot \langle D' \rangle = \mathcal{L}_{D'}$$

Ω_3 : D' ergebe sich aus D durch die Reidemeister-Bewegung Ω_3 . Wir wissen $\langle D \rangle = \langle D' \rangle$. Auch hier gilt $w(D) = w(D')$, siehe z.B.



Ω_1 : D' ergebe sich aus D durch die Reidemeister-Bewegung Ω_1 .



Es gilt $\langle D \rangle = -A^3 \langle D' \rangle$ sowie $w(D) = w(D') + 1$.

Also folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle = (-A)^{-3(w(D')+1)} \cdot (-A^3) \langle D' \rangle \\ &= (-A)^{-3w(D')} \langle D' \rangle = \mathcal{L}_{D'}. \end{aligned}$$

□

Korollar 6.4.10 Definiert man für orientierte Verschlingungen \mathcal{C} das *Kauffman-Polynom* \mathcal{L}_C durch

$$\mathcal{L}_C := \mathcal{L}_D,$$

wobei D ein Verschlingungsdiagramm von \mathcal{C} ist, dann ist dies wohldefiniert, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl von D , und liefert für isotope orientierte Verschlingungen dasselbe Polynom. □

Beispiel 6.4.11 $\langle \bigcirc \rangle = 1, w(\bigcirc) = 0, \mathcal{L}_{\bigcirc}(A) = (-A)^{-3 \cdot 0} \cdot 1 = 1$

Beispiel 6.4.12

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle_3 &= A + BC \\ \langle \infty \rangle &= A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = A - A - A^{-3} \\ &= -A^{-3} \\ w(\infty) &= -1 \\ \mathcal{L}_{\infty}(A) &= (-A)^{-3 \cdot (-1)} \cdot \langle \infty \rangle \\ &= (-A)^3 \cdot (-A^{-3}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dies muss auch so sein, da ∞ der Unknoten ist.

Beispiel 6.4.13 Hopf-Verschlingung

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= A \cdot \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \cdot \langle \infty \rangle \\ &= A \cdot \left(A \cdot \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \cdot \langle \infty \rangle \right) \\ &\quad + A^{-1} \cdot \left(A \cdot \langle \infty \rangle + A^{-1} \cdot \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \right) \\ &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) \\ &= -A^4 - 1 + 1 + 1 - 1 - A^{-4} \\ &= -A^4 - A^{-4} \\ w(\bigcirc \bigcirc) &= 2 \\ \mathcal{L}_{\bigcirc \bigcirc}(A) &= (-A)^{-3 \cdot 2}(-A^4 - A^{-4}) \\ &= A^{-6}(-A^4 - A^{-4}) \\ &= -A^{-2} - A^{-10} \end{aligned}$$

Beispiel 6.4.14 Triviale Verschlingung mit k Komponenten

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{\bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc}_k \rangle &= (-A^2 - A^{-2})^{k-1} \langle \bigcirc \rangle \\ &= (-A^2 - A^{-2})^{k-1} \\ w(\bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\bigcirc \cdots \bigcirc}(A) &= (-A^2 - A^{-2})^{k-1} \end{aligned}$$

Insbesondere für $k = 2$ ist

$$\mathcal{L}_{\circ\circ}(A) = -A^2 - A^{-2}.$$

Es gilt somit $\mathcal{L}_{\circ\circ} \neq \mathcal{L}_{\otimes}$, also kann die Hopf-Verschlingung nicht trivial sein.

Beispiel 6.4.15 Für die Kleeblattschlinge aus Abbildung 293 ist

$$\mathcal{L}(C) = -A^{16} + A^{12} + A^4.$$

(Übung!)

Die Kleeblattschlinge ist also nicht isotop zum Unknoten.

Bemerkung 6.4.16 Kehrt man in einer orientierten Verschlingung die Orientierung *aller* Komponenten um, so ändern sich die Vorzeichen der Doppelpunkte nicht, da

$$\det(-\dot{c}_{j_i}(t_i), -\dot{c}_{j'_i}(t'_i)) = \det(\dot{c}_{j_i}(t_i), \dot{c}_{j'_i}(t'_i)).$$

Also ist $w = w'$ und somit $\mathcal{L}_D(A) = \mathcal{L}_{D'}(A')$.

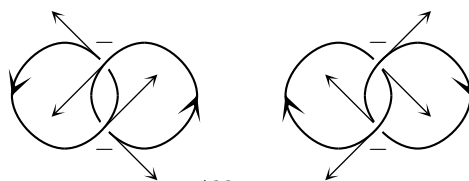
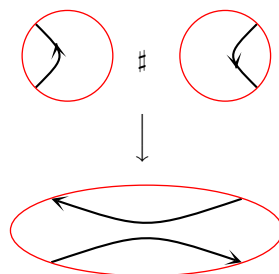


Abb. 294

Also ändert sich auch die Verwindung und damit auch das Kauffman-Polynom nicht. Insbesondere ist das Kauffman-Polynom eines *Knotens* unabhängig von der Orientierung.

Wir wissen nun, dass verschiedene Kauffman-Polynome immer zu nicht isotopen Verschlingungen gehören. Aber haben isotope Verschlingungen in jedem Falle dasselbe Kauffman-Polynom? Die Beantwortung dieser Frage beschäftigt uns im Rest dieses Abschnittes.

Definition 6.4.17 Seien D_1 und D_2 zwei orientierte Verschlingungsdiagramme. Die *Summe der Diagramme* $D_1 \# D_2$ entsteht aus der disjunkten Vereinigung der Diagramme wie folgt:



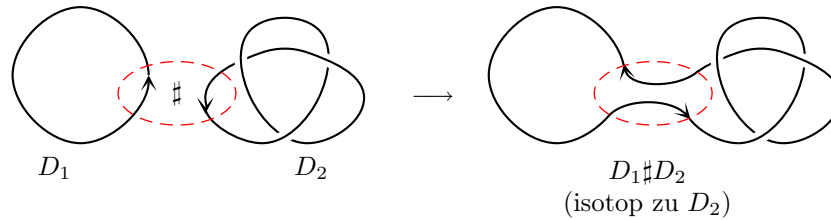
Beispiel 6.4.18

Abb. 295

Im weiteren Verlauf geben wir die Summe zweier Verschlingungsdiagramme nur bis auf Diagrammisotopie an.

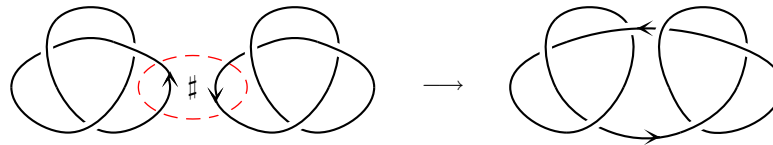
Beispiel 6.4.19 *Summe zweier Kleeblattschlingen*

Abb. 296

Bemerkung 6.4.20 Die Summe zweier Verschlingungsdiagramme ist kein wohldefiniertes Diagramm: Es kommt darauf an, auf welche beiden Stränge die Definition 6.4.17 angewandt wird.

Lemma 6.4.21 *Sind D_1 und D_2 orientierte Verschlingungsdiagramme, so gilt*

$$w(D_1 \# D_2) = w(D_1) + w(D_2),$$

denn durch die Anwendung von Definition 6.4.17 kommen weder Doppelpunkte hinzu, noch fallen solche weg. \square

Lemma 6.4.22 *Für zwei Verschlingungsdiagramme D_1 und D_2 ist*

$$\langle D_1 \# D_2 \rangle_3 = \langle D_1 \rangle_3 \cdot \langle D_2 \rangle_3.$$

Beweis (mit Zustandssummen). Wir wollen zunächst die Zustände von $D_1 \# D_2$ mit denen von D_1 und von D_2 in Verbindung bringen. Dabei erkennen wir, dass für die Doppelpunkte der Diagramme gilt:

$$\{\text{Doppelpunkte von } D_1 \# D_2\} = \{\text{Doppelpunkte von } D_1\} \dot{\cup} \{\text{Doppelpunkte von } D_2\}.$$

Somit kann einem Zustand Z von $D_1 \# D_2$ ein Paar von Zuständen Z_1 von D_1 und Z_2 von D_2 derart zugeordnet werden, dass

$$Z_1(P) = Z(P) \forall P \text{ Doppelpunkt von } D_1$$

und

$$Z_2(P) = Z(P) \forall P \text{ Doppelpunkt von } D_2.$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv: Die Umkehrabbildung hat die Vorschrift

$$Z(P) = \begin{cases} Z_1(P), & \text{falls } P \text{ Doppelpunkt von } D_1; \\ Z_2(P), & \text{falls } P \text{ Doppelpunkt von } D_2. \end{cases}$$

Um nun die Zustandssumme zu bilden, müssen wir die Doppelpunkte P zählen mit $Z(P) = a$. Dazu nehmen wir erst die $P \in D_1$ mit $Z(P) = Z_1(P) = a$, und hinzu kommen die $P \in D_2$ mit $Z(P) = Z_2(P) = a$. Insgesamt erhalten wir also

$$\alpha(Z) = \alpha(Z_1) + \alpha(Z_2),$$

und analog

$$\beta(Z) = \beta(Z_1) + \beta(Z_2).$$

Schließlich interessiert noch $\gamma(Z)$, also die Anzahl der Zusammenhangskomponenten, in die $D_1 \# D_2$ nach Anwendung der Transformationen aus den Abbildungen 288 und 289 zerfällt. $\gamma(Z_1)$ und $\gamma(Z_2)$ liefern die entsprechende Anzahl der Zusammenhangskomponenten bei D_1 bzw. D_2 ; da wir aber durch Anwendung der Definition 6.4.17 erhalten:

$$\bigcirc \# \bigcirc \longrightarrow \bigcirc,$$

geht eine Zusammenhangskomponente wieder verloren, also

$$\gamma(Z) = \gamma(Z_1) + \gamma(Z_2) - 1.$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle D_1 \# D_2 \rangle_3 &= \sum_Z A^{\alpha(Z)} B^{\beta(Z)} C^{\gamma(Z)-1} \\ &= \sum_{Z_1} \sum_{Z_2} A^{\alpha(Z_1)+\alpha(Z_2)} B^{\beta(Z_1)+\beta(Z_2)} C^{\gamma(Z_1)+\gamma(Z_2)-1-1} \\ &= \sum_{Z_1} \sum_{Z_2} A^{\alpha(Z_1)} B^{\beta(Z_1)} C^{\gamma(Z_1)-1} \cdot A^{\alpha(Z_2)} B^{\beta(Z_2)} C^{\gamma(Z_2)-1} \\ &= \langle D_1 \rangle_3 \cdot \langle D_2 \rangle_3. \end{aligned}$$

□

Satz 6.4.23 $\mathcal{L}_{D_1 \# D_2} = \mathcal{L}_{D_1} \cdot \mathcal{L}_{D_2}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D_1 \# D_2} &= (-A)^{-3w(D_1 \# D_2)} \langle D_1 \# D_2 \rangle \\ &= (-A)^{-3(w(D_1)+w(D_2))} \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle \\ &= (-A)^{-3w(D_1)} \langle D_1 \rangle \cdot (-A)^{-3w(D_2)} \langle D_2 \rangle \\ &= \mathcal{L}_{D_1} \cdot \mathcal{L}_{D_2} \end{aligned}$$

□

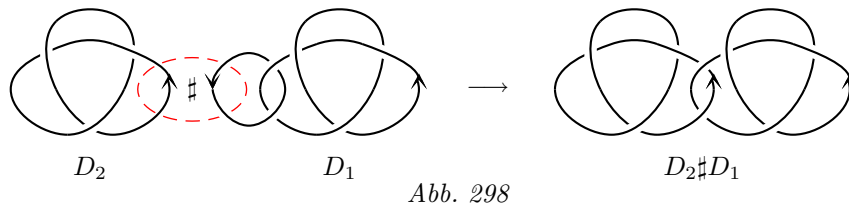
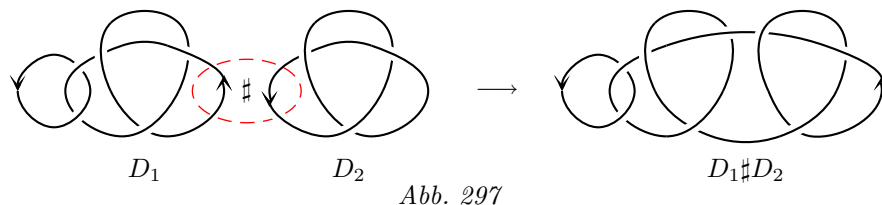
Dieser Zusammenhang erlaubt es uns, für zahlreiche Verschlingungen das Kauffman-Polynom auf einfache Weise zu bestimmen.

Beispiel 6.4.24 Das „Doppelkleeblatt“ aus Beispiel 6.4.19 besitzt das Kauffman-Polynom

$$\mathcal{L}(C) = (-A^{16} + A^{12} + A^4)^2 = A^{32} - 2A^{28} + A^{24} - 2A^{20} + 2A^{16} + A^8.$$

Gegenüber dem Ausrechnen „zu Fuß“ erspart das eine Menge Arbeit!

Wir kehren nun zur ursprünglichen Frage zurück: Gibt es Verschlingungen, die nicht isotop sind und dennoch dasselbe Kauffman-Polynom besitzen? Betrachte dazu folgende Verschlingungsdiagramme:



Ohne das Kauffman-Polynom von D_1 explizit zu kennen, wissen wir doch, dass

$$\mathcal{L}(D_1 \# D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2) = \mathcal{L}(D_2) \cdot \mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(D_2 \# D_1);$$

die Kauffman-Polynome sind also identisch.

Die Verschlingungen zu den Diagrammen $D_1 \# D_2$ und $D_2 \# D_1$ sind jedoch nicht isotop, denn $D_1 \# D_2$ besteht aus einem Kreis und einem Doppelkleeblatt, während $D_2 \# D_1$ aus zwei Kleeblattschlingen zusammengesetzt ist. Wären die beiden Verschlingungen isotop, so müsste deshalb eine Isotopie existieren, die den Unknoten aus $D_1 \# D_2$ in eines der Kleeblätter aus $D_2 \# D_1$ überführt, und dies ist wegen Beispiel 6.4.15 nicht der Fall.

Bei diesem Beispiel konnten wir noch mit einfachen Mitteln erkennen, dass es sich nicht um isotope Verschlingungen handelt. Es gibt jedoch auch Verschlingungen mit nur einer Komponente, die nicht isotop sind, aber dasselbe Kauffman-Polynom besitzen. Um solche zu unterscheiden, existieren noch weitere Invarianten, die hier jedoch nicht behandelt werden sollen. Es sei auf die angegebene Literatur zu Knoten verwiesen.

6.5 Das Jones-Polynom

Definition 6.5.1 Sei \mathcal{C} eine orientierte Verschlingung. Dann heißt

$$J_{\mathcal{C}}(q) := \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(q^{-1/4}) \in \mathbb{Z} [q^{1/4}, q^{-1/4}]$$

Jones-Polynom von \mathcal{C} .

Bemerkung 6.5.2 Das Kauffman-Polynom $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(A)$ und das Jones-Polynom $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(q)$ enthalten dieselbe Information über \mathcal{C} , da sie durch die Substitution $A = q^{-1/4}$ auseinander hervorgehen:

$$J_{\mathcal{C}}(q) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(q^{-1/4}) \text{ und } \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(A) = J_{\mathcal{C}}(A^{-4}).$$

Die Informationen, die wir über das Kauffman-Polynom bereits haben, übersetzen sich dann für das Jones-Polynom wie folgt:

Satz 6.5.3 Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' orientierte Verschlingungen. Sind \mathcal{C} und \mathcal{C}' isotop, so gilt

$$J_{\mathcal{C}} = J_{\mathcal{C}'}$$

Ist \mathcal{C} ein Unknoten, so ist

$$J_{\mathcal{C}} = 1.$$

Entsteht \mathcal{C}' aus \mathcal{C} durch Hinzunahme einer weiteren Komponente, derart dass es eine für \mathcal{C}' (und damit auch für \mathcal{C}) zulässige Projektion gibt, so dass für die zugehörigen Diagramme D und D' gilt $D' = D \dot{\cup} O$, dann ist

$$J_{\mathcal{C}'} = (-q^{-1/2} - q^{1/2}) \cdot J_{\mathcal{C}}.$$

Beispiel 6.5.4 Aus diesem Satz ergibt sich direkt, dass eine triviale Verschlingung \mathcal{C} mit k Komponenten das Jones-Polynom

$$J_{\mathcal{C}} = (-q^{-1/2} - q^{1/2})^{k-1}$$

hat.

Wir führen das Jones-Polynom ein, da die folgende Relation die Berechnung von Beispielen stark vereinfachen kann.

Satz 6.5.5 (Skein-Relation) Seien $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^+$ und \mathcal{C}^- orientierte Verschlingungen, die Verschlingungsdiagramme D^0, D^+ und D^- besitzen, welche sich nur in einer Scheibe wie folgt unterscheiden:

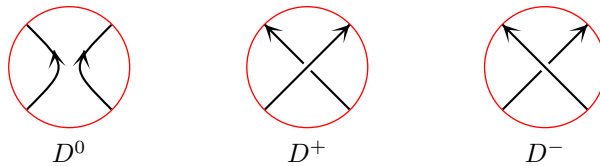


Abb. 299

Dann gilt:

$$q^{-1} \cdot J_{\mathcal{C}^+} - q \cdot J_{\mathcal{C}^-} = (q^{1/2} - q^{-1/2}) J_{\mathcal{C}^0}.$$

Beweis. Betrachten wir zusätzlich das (irgendwie orientierte) Verschlingungsdiagramm D^1

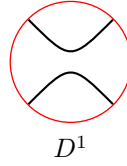


Abb. 300

zur Verschlingung \mathcal{C}^1 . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle D^+ \rangle &= A \cdot \langle D^0 \rangle + A^{-1} \langle D^1 \rangle \\ w(D^+) &= 1 + w(D^0), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D^+} &= (-A)^{-3w(D^+)} \langle D^+ \rangle \\ &= (-A)^{-3w(D^0)-3} \cdot (A \cdot \langle D^0 \rangle + A^{-1} \langle D^1 \rangle) \\ &= -A^{-2} \cdot \mathcal{L}_{D^0}(A) - (-A)^{-3w(D^0)-4} \langle D^1 \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $-(-A)^{-3w(D^0)} \langle D^1 \rangle = A^4 \mathcal{L}_{D^+}(A) + A^2 \mathcal{L}_{D^0}(A)$. Analog sehen wir

$$\begin{aligned} \langle D^- \rangle &= A \cdot \langle D^1 \rangle + A^{-1} \langle D^0 \rangle, \\ w(D^-) &= w(D^0) - 1, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{L}_{D^-}(A) = -A^2 \mathcal{L}_{D^0}(A) - (-A)^{-3w(D^0)+4} \langle D^1 \rangle,$$

und somit

$$-(-A)^{-3w(D^0)} \langle D^1 \rangle = A^{-4} \mathcal{L}_{D^-}(A) - A^{-2} \mathcal{L}_{D^0}(A).$$

Es folgt

$$A^4 \mathcal{L}_{D^+}(A) + A^2 \mathcal{L}_{D^0}(A) = A^{-4} \mathcal{L}_{D^-}(A) + A^{-2} \mathcal{L}_{D^0}(A),$$

d.h.

$$A^4 \mathcal{L}_{D^+}(A) - A^{-4} \mathcal{L}_{D^-}(A) = (A^{-2} - A^2) \mathcal{L}_{D^0}(A).$$

Die Substitution $A = q^{-1/4}$ liefert die Behauptung. □

Beispiel 6.5.6 Wir berechnen das Jones-Polynom der Hopf-Verschlingung. Es ist

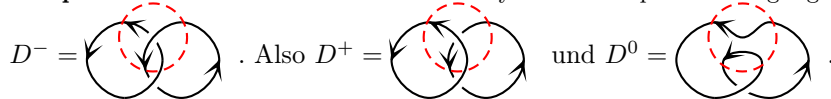


Abb. 301

Die zugehörigen Verschlingungen \mathcal{C}^+ und \mathcal{C}^0 sind trivial. Es gilt also

$$J_{\mathcal{C}^0}(q) = 1, \quad J_{\mathcal{C}^+}(q) = -(q^{-1/2} + q^{1/2}).$$

Aus dem Satz folgt

$$q^{-1} \cdot (-q^{-1/2} - q^{1/2}) - q \cdot J_{C^-}(q) = (q^{1/2} - q^{-1/2}) \cdot 1,$$

d.h.

$$-q \cdot J_{C^-}(q) = q^{1/2} - q^{-1/2} + q^{-3/2} + q^{-1/2} = q^{1/2} + q^{-3/2}$$

und somit

$$J_{C^-}(q) = -q^{-1/2} - q^{-5/2}.$$

Beispiel 6.5.7 Nun zur Kleeblattschlinge. Es sei

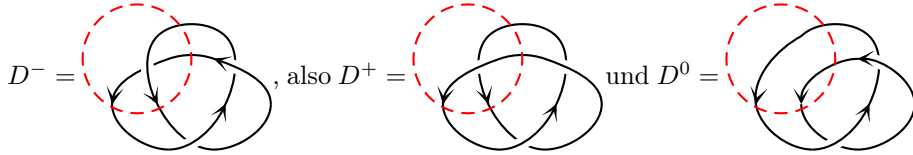


Abb. 302

Wir sehen, dass D^+ Verschlingungsdiagramm des Unknotens C^+ ist und D^0 das Diagramm der Hopf-Verschlingung wie im Beispiel 6.5.6. Es gilt also

$$\begin{aligned} q^{-1} \cdot 1 - q \cdot J_{C^-}(q) &= (q^{1/2} - q^{-1/2})(-q^{-1/2} - q^{-5/2}) \\ &= -1 - q^{-2} + q^{-1} + q^{-3}, \end{aligned}$$

d.h.

$$-q \cdot J_{C^-}(q) = -1 - q^{-2} + q^{-3}$$

und somit

$$J_{C^-}(q) = q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}.$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem aus Beispiel 6.4.15.

Beispiel 6.5.8 Wir betrachten den Achterknoten C^+ :

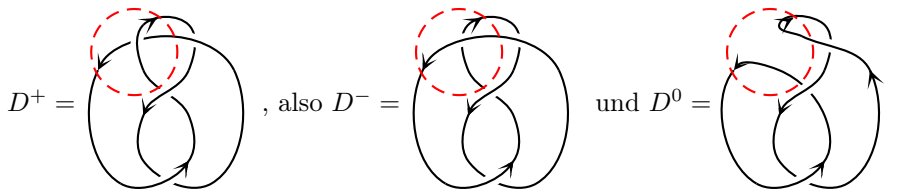


Abb. 303

Dann ist C^- der Unknoten, d.h. $J_{C^-}(q) = 1$, und C^0 ist isotop zur Hopf-Verschlingung aus Beispiel 6.5.6, somit $J_{C^0}(q) = -q^{-1/2} - q^{-5/2}$. Nach Satz 6.5.5 gilt

$$\begin{aligned} q^{-1} J_{C^+}(q) - q \cdot 1 &= (q^{1/2} - q^{-1/2})(-q^{-1/2} - q^{-5/2}) \\ &= -1 - q^{-2} + q^{-1} + q^{-3}, \end{aligned}$$

d.h.

$$q^{-1} \cdot J_{C^+}(q) = q - 1 + q^{-1} - q^{-2} + q^{-3}$$

und somit

$$J_{C_+}(q) = q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}.$$

Der Achterknoten ist somit weder der Unknoten noch isotop zur Kleeblattschlinge.

Übung: Bestimmen Sie das Jones-Polynom der Verschlingung aus Beispiel 6.3.11 sowie das der Borromeo-Ringe (Beispiel 6.1.11)!

Bemerkung 6.5.9 Einer der Gründe, warum die Berechnung des Jones-Polynoms mittels Skein-Relation für viele Beispiele mit sehr viel weniger Rechenaufwand zum Ziel führt als die Berechnung des Kauffman-Polynoms mittels der Relationen für das Klammerpolynom, besteht darin, dass das Jones-Polynom im Gegensatz zum Klammerpolynom sich bei Reidemeister-Bewegungen des Diagramms nicht verändert. Wenn wir also im Laufe der Rechnung ein Diagramm zu behandeln haben, von dem wir sehen, dass es sich durch Reidemeister-Bewegungen in eines überführen lässt, für das wir das Jones-Polynom bereits kennen, so können wir dies gleich in die Rechnung einsetzen. Beim Klammerpolynom hingegen müssen wir mittels der Relationen weiterrechnen, was oft viel aufwändiger ist.

Allerdings stellt sich die Frage, ob es mittels der Skein-Relation überhaupt möglich ist, das Jones-Polynom für jede Verschlingung zu berechnen. Beim Klammerpolynom sind die Relationen so, dass sich die Berechnung für ein Diagramm mit n Doppelpunkten auf die Berechnung für zwei Diagramme mit $n - 1$ Doppelpunkten zurückführen lässt. Irgendwann sind alle Doppelpunkte eliminiert und wir haben unsere Rechnung abgeschlossen. Bei den Skein-Relationen dagegen haben wir die Berechnung auf die Berechnung für ein Diagramm mit $n - 1$ Doppelpunkten und eines mit n Doppelpunkten zurückgeführt. Dabei entsteht das Diagramm mit derselben Anzahl von Doppelpunkten aus dem gegebenen durch einen Überkreuzungswechsel. Warum endet die Rechnung mittels solcher Relationen überhaupt irgendwann?

Dazu muss man beobachten, dass man ein gegebenes orientiertes Verschlingungsdiagramm durch die richtigen Überkreuzungswechsel in eines überführen kann, das zu einer trivialen Verschlingung gehört.

Betrachten wir dazu zunächst den Fall eines Knotens c . Sei $(\bar{c}, \{t_1, \dots, t_n\})$ ein orientiertes Knotendiagramm von c bzgl. der Projektion Π . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\Pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Wähle einen Punkt $\bar{c}(t_0)$ so, dass \bar{c} ganz auf einer Seite der Tangente in diesem Punkt liegt.

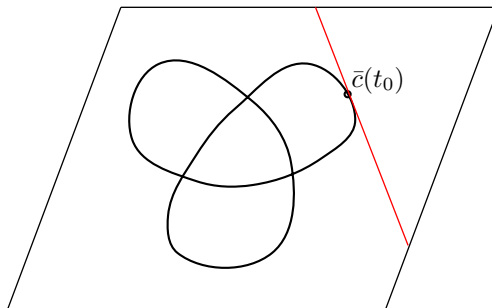


Abb. 304

Insbesondere ist $\bar{c}(t)$ für jedes $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ kein Doppelpunkt. Sorge nun notfalls durch Überkreuzungswechsel dafür, dass beim ersten Erreichen eines jeden Doppelpunktes eine Überkreuzung vorliegt, d. h. t_j ist das kleinste $t > t_0$ mit $\bar{c}(t) = \bar{c}(t_j)$.

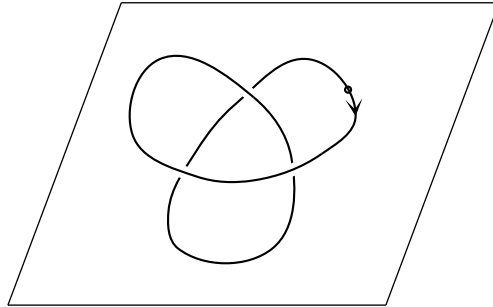


Abb. 305

Sei L die Periode von c , sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit derselben Periode L , die im Intervall $[t_0 + \varepsilon, t_0 - \varepsilon + L]$ streng monoton fällt.

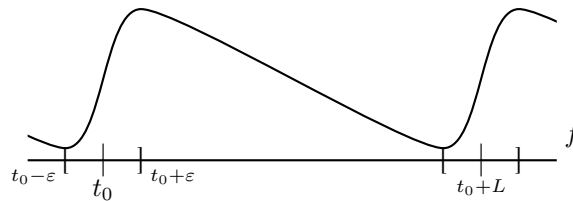


Abb. 306

Dann finden wir eine Kurve $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Pi(\tilde{c}(t)) = \bar{c}(t) := (\bar{c}_1(t), \bar{c}_2(t), f(t))$. Da die x_3 -Komponente von \tilde{c} von Doppelpunkt zu Doppelpunkt immer kleiner wird, findet in der Tat bei jedem ersten Erreichen eines Doppelpunktes eine Überkreuzung statt.

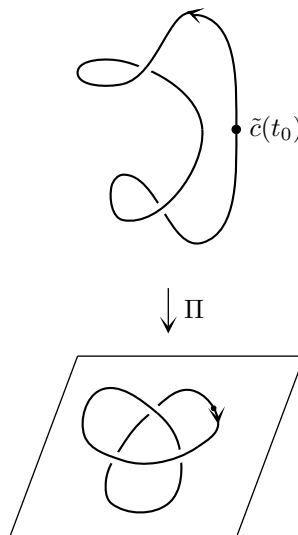


Abb. 307

Die Kurve \tilde{c} ist tatsächlich ein Unknoten mit dem gegebenen Knotendiagramm.

Hat man eine orientierte Verschlingung mit mehreren Komponenten \bar{c}_1 bis \bar{c}_k , so sorgt man durch Überkreuzungswechsel dafür, dass \bar{c}_1 stets unter allen anderen Komponenten verläuft, \bar{c}_2 über \bar{c}_1 , aber unter allen anderen Komponenten usw., bis schließlich \bar{c}_k über allen anderen Komponenten verläuft. Dann kann man zu diesem Diagramm eine Verschlingung finden, so dass jede Komponente \tilde{c}_1 bis \tilde{c}_k in einer anderen „Höhenschicht“ verläuft, z. B. liege die x_3 -Komponente von \tilde{c}_1 im Intervall $(0, 1)$, die von \tilde{c}_2 in $(1, 2)$ usw. Dann kann man durch Isotopie die Komponenten horizontal so verschieben, dass ihre Bilder unter Π disjunkt werden.

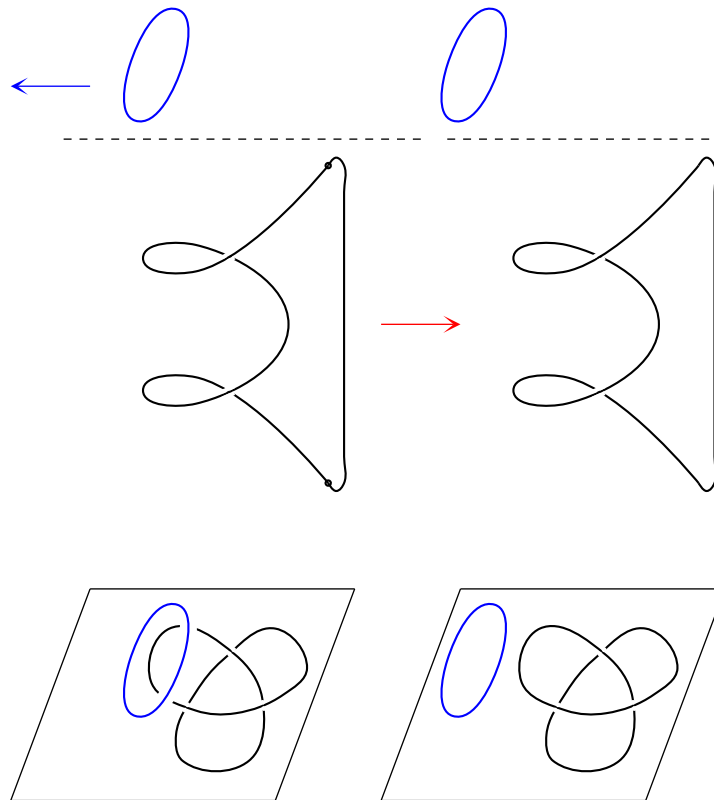


Abb. 308

Anschließend verarztet man die einzelnen Komponenten wie im Fall eines Knotens.

Satz 6.5.10 Sei C eine orientierte Verschlingung mit k Komponenten. Dann gilt für das Jones-Polynom:

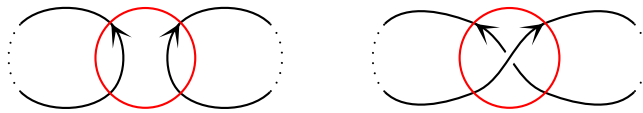
- (i) Ist k ungerade, z.B. falls C ein Knoten ist, so enthält $J_C(q)$ nur ganzzahlige Potenzen von q .
- (ii) Ist k gerade, so enthält $J_C(q)$ nur Potenzen der Form $q^{\frac{2m+1}{2}}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Ist \mathcal{C} eine triviale Verschlingung, so gilt

$$J_{\mathcal{C}}(q) = (-q^{-1/2} - q^{1/2})^{k-1} = q^{\frac{k-1}{2}} (-q^{-1} - 1)^{k-1}.$$

Die Aussage gilt also in diesem Fall. Seien nun $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ und \mathcal{C}^0 wie im letzten Satz. Sei k^+, k^- und k^0 die jeweilige Anzahl der Komponenten. Dann gilt $k^+ = k^-$ und $k^0 = k^+ \pm 1$, denn:

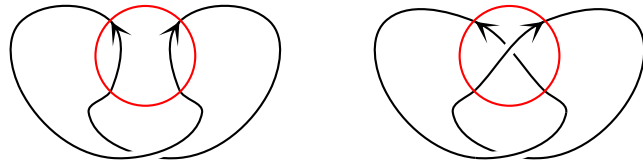
1. *Fall:* Die beiden Stränge in der Scheibe gehören in \mathcal{C}^0 zu zwei verschiedenen Komponenten. Durch den Übergang zu einer Überkreuzung werden diese beiden Komponenten zu einer zusammengefügt.



$$k^0 = k^+ + 1$$

Abb. 309

2. *Fall:* Die beiden Stränge in der Scheibe gehören in \mathcal{C}^0 zu derselben Komponente. Durch den Übergang zu einer Überkreuzung wird diese Komponente in zwei Komponenten aufgetrennt.



$$k^0 = k^+ - 1$$

Abb. 310

Die Relation $q^{-1} \cdot J_{\mathcal{C}^+}(q) - q \cdot J_{\mathcal{C}^-}(q) = (q^{1/2} - q^{-1/2})J_{\mathcal{C}^0}(q)$ zeigt, dass der Satz für eine der drei Verschlingung $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ und \mathcal{C}^0 gilt, falls er auch für die beiden anderen gilt.

Nun können wir die Behauptung durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Doppelpunkte zeigen:

- $n = 0$. In diesem Fall liegt eine triviale Verschlingung bereits vor – wir haben nichts mehr zu zeigen.
- $n \rightarrow n + 1$. Die Behauptung gelte für alle Verschlingungsdiagramme mit höchstens n Doppelpunkten. Das Diagramm D , zu dem das Jones-Polynom bestimmt werden soll, habe $n + 1$ Doppelpunkte. Überführe D nun durch geeignete Überkreuzungswechsel gemäß Bemerkung 6.5.9 in eine triviale Verschlingung. Die dabei tatsächlich durch Überkreuzungswechsel entstehenden Diagramme seien mit D_1, \dots, D_l bezeichnet; diejenigen, die durch Auflösung der Überkreuzung entstehen, mit D_1^0, \dots, D_l^0 . Letztere haben offensichtlich höchstens n Doppelpunkte – für sie gilt also die Behauptung.

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \text{---} & D_1 & \text{---} & D_2 & \text{---} & \cdots & \text{---} & D_{l-1} & \text{---} & D_l \\
 & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \\
 & & D_1^0 & & D_2^0 & & \cdots & & D_{l-1}^0 & & D_l^0
 \end{array}$$

D_l ist eine triviale Verschlingung, für die die Behauptung gilt; eben haben wir bereits festgestellt, dass sie auch für D_l^0 gültig ist – und somit wegen der Skein-Relation auch für D_{l-1} . Damit und mit der Behauptung für D_{l-1}^0 als Prämisse zeigt man nun die Gültigkeit der Behauptung für D_{l-2} und fährt so fort, bis man schließlich von D_1 und D_1^0 auf D schließen kann. \square

6.6 Totalkrümmung von Knoten

Wir definieren einen weiteren Begriff der Kurventheorie, die Brückenzahl einer geschlossenen Raumkurve. Dazu sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine periodische parametrisierte Raumkurve mit Periode L , und sei $e \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Die Funktion

$$b_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_e(t) = \langle c(t), e \rangle$$

ist dann beliebig oft differenzierbar und damit insbesondere stetig. Ist e einer der drei Standardbasisvektoren des \mathbb{R}^3 , $e = e_j$, so ist $b_{e_j} = c_j$ einfach die j -te Komponente von c .

Bezeichnen wir mit $\mu(c, e)$ die Anzahl der lokalen Maxima der Funktion b_e in einem Periodenintervall. Es gilt $\mu(c, e) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

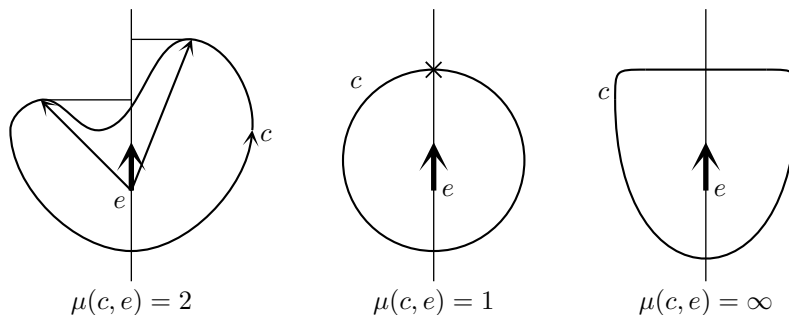


Abb. 311

Bemerkung 6.6.1 Bei jeder stetigen periodischen Funktion muss zwischen zwei lokalen Maxima ein lokales Minimum liegen und umgekehrt. Es gibt also gleich viele lokale Maxima wie lokale Minima. Nun sind die lokalen Minima von b_e die lokalen Maxima von $-b_e = b_{-e}$. Es gilt also

$$\mu(c, e) = \mu(c, -e).$$

Die Zahl $\mu(c, e)$ hängt aber durchaus vom Vektor e ab. Bei der Kurve in nachstehender Abbildung gilt $\mu(c, e_1) = 1$, $\mu(c, e_2) = 2$ und schließlich $\mu(c, e_3) = \infty$.

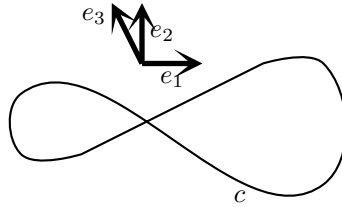


Abb. 312

Definition 6.6.2 Ist c eine periodische parametrisierte Raumkurve mit Periode L , dann heißt das Minimum von $\mu(c, e)$ für $e \in S^2$

$$\mu(c) = \min_{e \in S^2} \mu(c, e)$$

die *Brückenzahl* von c .

Bemerkung 6.6.3 Da sich $\mu(c, e)$ bei Umparametrisierungen nicht ändert, gilt dies auch für die Brückenzahl $\mu(c)$. Außerdem benötigen wir zur Definition von $\mu(c, e)$ lediglich die Stetigkeit von c , die Parametrisierung musste also nicht notwendig regulär sein. Die Brückenzahl kann somit auch für geschlossene Polygone definiert werden. Dazu parametrisieren wir das Polygon $P = (a_0, \dots, a_n)$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ durch

$$c(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot a_{j+1} + \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} \cdot a_j. \quad (6.2)$$

Für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ stellt $c(t)$ das Geradensegment zwischen $c(t_j) = a_j$ und $c(t_{j+1}) = a_{j+1}$ dar.

Einen ersten Zusammenhang zwischen dem Begriff der Brückenzahl und der Isotopie von geschlossenen Raumkurven liefert das folgende Lemma.

Lemma 6.6.4 Ist c eine einfach geschlossene Raumkurve (d. h. ein Knoten) und gilt $\mu(c) = 1$, dann ist c isotop zum Unknoten.

Beweis. Es sei c eine reguläre parametrisierte Raumkurve. Gilt $\mu(c) = 1$, dann existiert ein Einheitsvektor e mit $\mu(c, e) = 1$. Somit existiert genau ein lokales Maximum b_{max} und ein lokales Minimum b_{min} der Funktion $b_e(t)$. Mit $b_{max} = \langle c(t_1), e \rangle$ und $b_{min} = \langle c(t_2), e \rangle$ gilt dann für die beiden Teilkurven $c_L(t)$ und $c_R(t)$ zwischen den Punkten $c(t_1)$ und $c(t_2)$, dass die Funktionen $\langle c_L(t), e \rangle$ und $\langle c_R(t), e \rangle$ jeweils streng monoton sind.

Wir wählen¹ nun einen zu e orthogonalen Einheitsvektor v , für den $\Pi_{e,v}$ eine zulässige Projektion des Knotens c im Sinne der Definition 6.1.14 ist. Da die Projektion senkrecht zu e erfolgt, hat nun auch die Funktion $\langle \bar{c}(t), e \rangle$ genau ein Maximum im Punkt $\bar{c}(t_1)$ und genau ein Minimum im Punkt $\bar{c}(t_2)$. Wiederrum ist die Funktion $\bar{b}_e(t) = \langle \bar{c}(t), e \rangle$ auf beiden Teilintervallen zwischen t_1 und t_2 streng monoton. Somit haben die beiden Teilkurven $\bar{c}_L(t)$ und $\bar{c}_R(t)$ keine Selbstüberkreuzungen. Zu jedem Wert s zwischen $\langle \bar{c}(t_1), e \rangle$ und $\langle \bar{c}(t_2), e \rangle$ gibt es Punkte p_L und p_R mit $p_L \in \bar{c}_L$, $p_R \in \bar{c}_R$ und $\langle p_L, e \rangle = \langle p_R, e \rangle = s$.

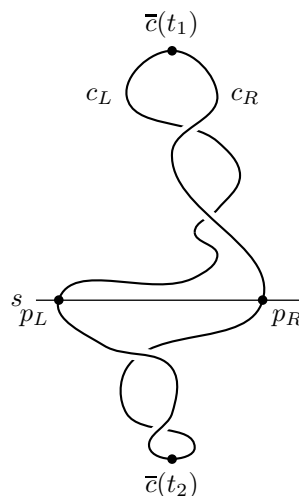


Abb. 313

Eventuell noch existierende Überkreuzungen von \bar{c}_L mit \bar{c}_R (im Fall $p_L = p_R$) können sukzessive durch Reidemeister-Bewegungen des Typs Ω_1 beseitigt werden. Es entsteht ein Knotendiagramm ohne Doppelpunkte, c ist somit isotop zum trivialen Knoten. \square

Wie bereits in obiger Bemerkung erwähnt, kann auch geschlossenen Polygonen eine Brückenzahl zugeordnet werden. Wir betrachten nun eine Folge P_m einer Raumkurve c einbeschriebener Polygone, deren Totalwinkel $\kappa(P_m)$ die Totalkrümmung $\kappa(c)$ der Kurve approximiert. Wir zeigen, dass dann auch eine analoge Aussage für die Brückenzahlen gilt.

Lemma 6.6.5 *Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Raumkurve mit Periode L . Sei U_m , $m \in \mathbb{N}$, eine Folge von Unterteilungen, so dass*

- (i) U_{m+1} ist Verfeinerung von U_m für alle m
- (ii) $\mathcal{F}(U_m) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Sei $P_m := P(U_m)$ das zugehörige einbeschriebene Polygon. Sei ferner $e \in S^2$ ein Vektor, der auf keiner der Strecken der Polygone P_m senkrecht steht.

Dann ist die Folge $\mu(P_m, e)$ monoton wachsend und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) = \mu(c, e).$$

Beweis. Wir parametrisieren P_m stückweise linear wie in (6.2) und bezeichnen die Parametrisierung mit $p_m(t)$. Da e auf keiner der Strecken von P_m senkrecht steht, kann die Funktion $t \mapsto \langle p_m(t), e \rangle$ nur in den Ecken lokale Extrema annehmen. Hat

¹Damit dies möglich ist, muss man eventuell e nochmal etwas abändern. Das ist aber nicht so wichtig und soll uns nicht weiter bekümmern.

$\langle p_m(t), e \rangle$ in der i -ten Ecke, d. h. für $t = t_i$, ein lokales Maximum, so muss auch die Funktion $\langle c(t), e \rangle$ im Intervall (t_{i-1}, t_{i+1}) ein lokales Maximum annehmen.

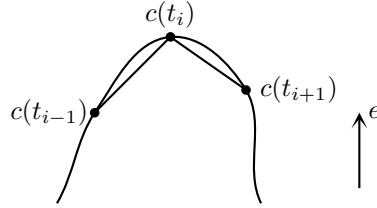


Abb. 314

Außerdem können zwei aufeinander folgende Ecken niemals beide lokale Maxima von $\langle p_m(t), e \rangle$ sein. Also hat $\langle c(t), e \rangle$ mindestens genauso viele lokale Maxima wie $\langle p_m(t), e \rangle$, d. h.

$$\mu(c, e) \geq \mu(P_m, e)$$

für alle m . Hinzunahme einer Ecke zu P_m kann die Anzahl der lokalen Maxima nicht verringern. Nimmt nämlich $\langle p_m(t), e \rangle$ in der i -ten Ecke ein lokales Maximum an und fügt man die neue Ecke zwischen der i -ten und der $(i+1)$ -ten Ecke ein, so bleibt entweder die i -te Ecke lokales Maximum oder die neue Ecke wird eines. Genauso verhält es sich, wenn man die neue Ecke vor einem lokalen Maximum einfügt. Fügt man die neue Ecke woanders ein, also zwischen zwei Ecken, in denen $\langle p_m(t), e \rangle$ kein lokales Maximum annimmt, so bleiben alle bisherigen lokalen Maxima auch für das neue Polygon solche. Da wegen Bedingung (i) jedes P_{m+1} aus P_m durch Hinzunahme von Ecken entsteht, gilt somit

$$\mu(P_{m+1}, e) \geq \mu(P_m, e) \quad (6.3)$$

für alle m . Somit existiert der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e)$ und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) \leq \mu(c, e).$$

Bleibt zu zeigen, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e)$ nicht strikt kleiner als $\mu(c, e)$ sein kann. Dazu reicht es wegen (6.3), ein m zu finden, so dass $\mu(c, e) \leq \mu(P_m, e)$.

1. Fall: $\mu(c, e) < \infty$.

Die Funktion $t \mapsto \langle c(t), e \rangle$ nehme ihre lokalen Maxima in $t = t_j$ an, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < L$, $k = \mu(c, e)$. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden lokalen Maxima liegt genau ein lokales Minimum. Sei $\tau_j \in (t_j, t_{j+1})$ so, dass $\langle c(t), e \rangle$ in τ_j das lokale Minimum hat. Hier verwenden wir wieder die Konvention $t_{k+j} = t_j + L$. Es gilt $\langle c(t_j), e \rangle > \langle c(\tau_j), e \rangle$ und $\langle c(t_{j+1}), e \rangle > \langle c(\tau_j), e \rangle$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\langle c(t), e \rangle > \langle c(\tau), e \rangle$$

wann immer $t \in (t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon)$ oder $t \in (t_{j+1} - \varepsilon, t_{j+1} + \varepsilon)$ und $\tau \in (\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon)$. Nach Bedingung (ii) ist für hinreichend großes m die Feinheit $\mathcal{F}(U_m) < \varepsilon$. Dann kommt in jedem der Intervalle $(t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon)$ und $(\tau_j - \varepsilon, \tau_j + \varepsilon)$ mindestens ein Unterteilungspunkt zu liegen. Daher hat $\langle p_m(t), e \rangle$ mindestens k lokale Maxima, also $\mu(P_m, e) \geq k = \mu(c, e)$.

2. Fall: $\mu(c, e) = \infty$.

Die Funktion $\langle c(t), e \rangle$ kann auf keinem echten Teilintervall $[a, b] \subset [0, L]$, $a < b$, konstant sein, weil sonst für alle m , die so groß sind, dass die Feinheit $\mathcal{F}(U_m) < b - a$ ist, auch die Funktion $\langle p_m(t), e \rangle$ auf einem Teilintervall konstant sein müsste. Dazu müsste e senkrecht auf der entsprechenden Strecke von P_m stehen, was wir ausgeschlossen haben.

Wir fixieren $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen k paarweise verschiedene Werte $t_1, \dots, t_k \in (0, L)$, in denen $\langle c(t), e \rangle$ ein lokales Maximum hat. Dann gibt es paarweise disjunkte offene Intervalle I_1, \dots, I_k mit $t_j \in I_j$, so dass $\langle c(t_j), e \rangle \geq \langle c(t), e \rangle$ für alle $t \in I_j$. Da $\langle c(t), e \rangle$ auf keinem Teilintervall konstant ist, muss es $\tau_j, \tau'_j \in I_j$, $\tau_j < t_j < \tau'_j$, geben mit $\langle c(t_j), e \rangle > \langle c(\tau_j), e \rangle$ und $\langle c(t_j), e \rangle > \langle c(\tau'_j), e \rangle$.

Ähnlich wie im ersten Fall sieht man nun, dass für hinreichend großes m gilt

$$\mu(P_m, e) \geq k.$$

Daraus folgt $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) \geq k$. Da k beliebig ist, schließen wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) = \infty = \mu(c, e). \quad \square$$

Bemerkung 6.6.6 Wir haben für den Richtungsvektor $e \in S^2$ verlangt, dass er auf keiner Kante irgendeines der Polygone P_m senkrecht stehen darf. Haben wir dadurch signifikant viele Richtungsvektoren e ausgeschlossen?

Für eine Kante $\overline{a_i a_{i+1}}$ eines der P_m bildet die Menge der „verbotenen“ e einen Großkreis, nämlich $\{e \in S^2 \mid e \perp a_{i+1} - a_i\}$. Jedes der Polygone hat endlich viele Kanten, so dass wir insgesamt auf abzählbar unendlich viele Kanten kommen. Die Vereinigung abzählbar vieler Großkreise ist eine Nullmenge in S^2 . Das heißt, sie hat den Flächeninhalt 0. Insofern haben wir nicht viele e ausgeschlossen, obwohl es unendlich viele sind. Wir werden später über die S^2 integrieren. Dabei spielen dann die e aus einer Nullmenge keine Rolle.

Wir stellen noch den Begriff des sphärischen Bildes eines Polygons bereit.

Definition 6.6.7 Ist $P = (a_1, \dots, a_m)$ ein geschlossenes Polygon im \mathbb{R}^3 , dann heißt das durch $b_i := \frac{a_{i+1} - a_i}{\|a_{i+1} - a_i\|}$ definierte sphärische Polygon $Q = (b_1, \dots, b_m)$ das *sphärische Bild* von P . Dabei haben wir wieder die Konvention $a_{m+1} = a_1$ benutzt.

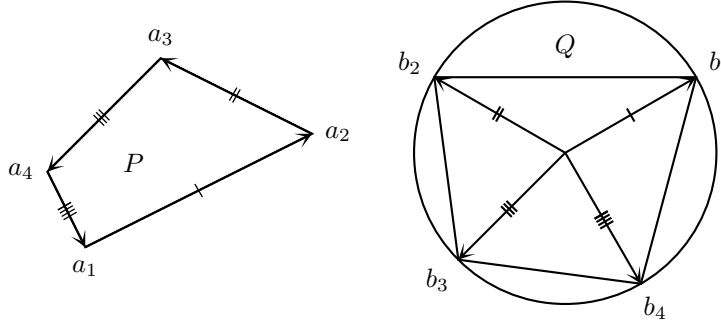


Abb. 315

Wir zeigen nun, dass man für geschlossene Polygone P durch Mittelung von $\mu(P, e)$ über alle Richtungen e den Totalwinkel von P erhält.

Proposition 6.6.8 Sei P ein geschlossenes Polygon im \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$\int_{S^2} \mu(P, e) dS(e) = 2 \cdot \kappa(P).$$

Beweis. Schreibe $P = (a_1, \dots, a_m)$. Sei $Q_0 = (b_1, \dots, b_m)$ das sphärische Bild von P . Für $e \in S^2$ sei nun S_e der Großkreis auf S^2 , der zu e orthogonal ist, d. h. $S_e = S^2 \cap e^\perp$. Der Großkreisbogen $\overline{b_{i-1}b_i}$ schneidet S_e genau dann, wenn $\langle b_{i-1}, e \rangle$ und $\langle b_i, e \rangle$ verschiedene Vorzeichen haben. Dies gilt genau dann, wenn $\langle a_i - a_{i-1}, e \rangle$ und $\langle a_{i+1} - a_i, e \rangle$ verschiedene Vorzeichen haben, also genau dann, wenn $\langle a_i, e \rangle$ ein lokaler Extremwert von $\langle p(t), e \rangle$ ist.

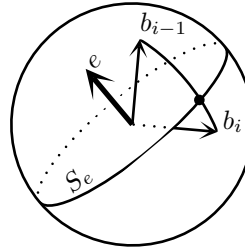


Abb. 316

Dabei ist $p(t)$ wieder eine Parametrisierung von P wie in (6.2).

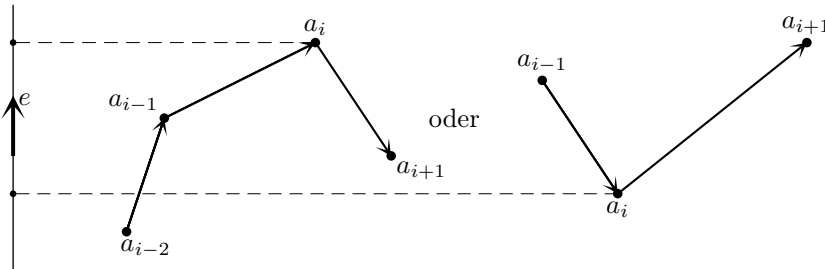


Abb. 317

Die Vereinigung der zu Q_0 gehörenden Großkreisbögen bezeichnen wir mit Q , d. h. $Q := \overline{b_2b_1} \cup \dots \cup \overline{b_mb_{m-1}} \cup \overline{b_1b_m}$. Da jeder Schnittpunkt von S_e mit einem Bogen $\overline{b_{i-1}b_i}$ genau einen Extremwert von $\langle p(t), e \rangle$ liefert und da es gleich viele lokale Maxima wie Minima gibt, gilt

$$|Q \cap S_e| = 2 \mu(P, e). \tag{6.4}$$

Da Q nur endlich viele Ecken b_i hat, erhalten wir als Menge aller e , für die S_e einen Eckpunkt von Q enthält, die Vereinigungsmenge $S^* := \bigcup S_{b_i}$ der endlich vielen Großkreise S_{b_1}, \dots, S_{b_m} , eine Menge vom Maße Null.

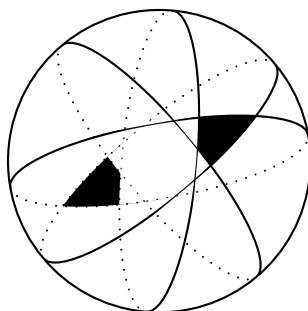


Abb. 318

Die Komplementärmenge $S^2 \setminus S^*$ zerfällt wiederum in endlich viele Kugelsegmente F_1, \dots, F_l . Der Wert von $\mu(P, e)$ kann sich bei Veränderung von e nur ändern, wenn S_e dabei eine Ecke von Q überstreicht. Auf den Kugelsegmenten F_j ist $\mu(P, e)$ somit konstant. Damit integrieren wir eine stückweise konstante Funktion, das Integral

$$\int_{S^2} \mu(P, e) dS(e) = \int_{S^2 \setminus S^*} \mu(P, e) dS(e)$$

existiert.

Wir kehren nun die Betrachtung um, indem wir zu einem gegebenen Bogen $\overline{b_{i-1}b_i}$ die Menge der Punkte $e \in S^2$ bestimmen, für die S_e diesen Bogen schneidet. Wir erhalten ein Gebiet K_i aus zwei Kugelteilflächen (zwei Kugelzweiecke, Doppelmond), das von zwei Großkreisen, nämlich S_{b_i} und $S_{b_{i-1}}$, begrenzt wird.

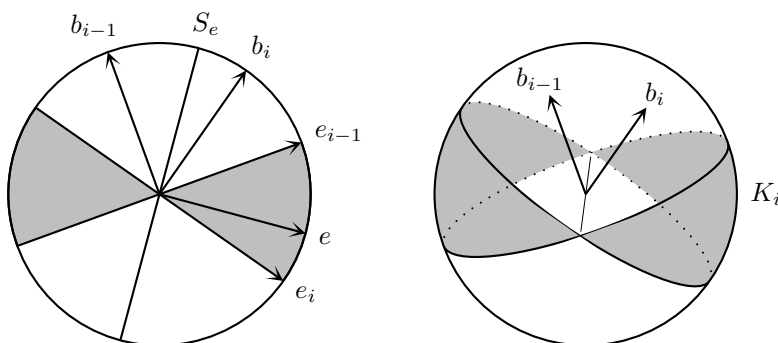


Abb. 319

Für die Winkelgröße α zwischen diesen Großkreisen gilt

$$\alpha = \sphericalangle(b_{i-1}, b_i) = \sphericalangle(a_i - a_{i-1}, a_{i+1} - a_i) = \alpha_i.$$

Für den Flächeninhalt $A[K_i]$ von K_i bedeutet dies

$$A[K_i] = 2 \cdot \frac{\alpha_i}{2\pi} A[S^2] = \frac{\alpha_i}{\pi} \cdot 4\pi = 4\alpha_i. \quad (6.5)$$

Nach Konstruktion ist $2\mu(P, e)$, also die Zahl der Extremalwerte von $\langle p(t), e \rangle$, genau die Anzahl der i mit $e \in K_i$. Daraus folgt

$$2 \int_{S^2} \mu(P, e) dS(e) = \sum_i A[K_i] \stackrel{(6.5)}{=} 4 \sum_i \alpha_i = 4 \kappa(P),$$

womit die Proposition bewiesen ist. \square

Satz 6.6.9 *Für jede einfach geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve c gilt*

$$\kappa(c) \geq 2\pi \cdot \mu(c).$$

Beweis. Sei c eine einfach geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Wir wählen eine Folge von Unterteilungen U_m wie in Lemma 6.6.5. Seien $P_m := P(U_m)$ die zugehörigen einbeschriebenen Polygone. Aus Lemma 6.6.5 und Bemerkung 6.6.6 wissen wir, dass für alle $e \in S^2 \setminus \mathcal{N}$ gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) = \mu(c, e), \quad (6.6)$$

wobei \mathcal{N} eine Nullmenge ist. Nach Proposition 5.6.14 gilt ferner

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa(P_m) = \kappa(c). \quad (6.7)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mu(c, e) dS(e) &= \int_{S^2 \setminus \mathcal{N}} \mu(c, e) dS(e) \\ &\stackrel{(6.6)}{=} \int_{S^2 \setminus \mathcal{N}} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(P_m, e) dS(e) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{S^2 \setminus \mathcal{N}} \mu(P_m, e) dS(e) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{S^2} \mu(P_m, e) dS(e) \\ &\stackrel{\text{Prop. 6.6.8}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \kappa(P_m) \\ &\stackrel{(6.7)}{=} 2 \kappa(c) \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integral und Grenzwert in Gleichung (*) ist gerechtfertigt, da die Funktionenfolge $\mu(P_m, e)$ gemäß Lemma 6.6.5 monoton ist (Konvergenzsatz von Levi [9, Abschn. 8.2]). Da $\mu(c)$ das Minimum aller Werte $\mu(c, e)$ ist, folgt

$$2 \kappa(c) = \int_{S^2} \mu(c, e) dS(e) \geq \int_{S^2} \mu(c) dS(e) = \mu(c) \cdot A[S^2] = 4\pi \mu(c)$$

und damit die Behauptung. \square

Als Folgerungen erhalten wir zwei sehr schöne Sätze über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven.

Satz 6.6.10 (Fenchel) *Ist c eine einfach geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, dann gilt:*

$$\kappa(c) \geq 2\pi.$$

Beweis. Da stets $\mu(c) \geq 1$ ist, gilt nach Satz 6.6.9

$$\kappa(c) \geq 2\pi \mu(c) \geq 2\pi. \quad \square$$

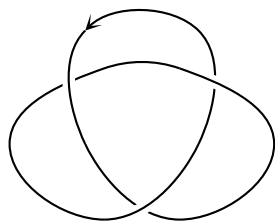
Diese untere Schranke an $\kappa(c)$ lässt sich ohne zusätzliche Annahmen an c nicht weiter verbessern, da z. B. für die Kreislinie $\kappa(c) = 2\pi$ gilt. Ist c jedoch verknotet, so gilt der folgende

Satz 6.6.11 (Fáry, Milnor) *Ist c eine einfach geschlossene verknotete nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, dann gilt:*

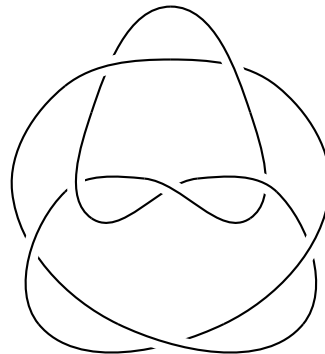
$$\kappa(c) \geq 4\pi.$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 6.6.4 und Satz 6.6.9. □

Beispiel 6.6.12 Für das Kleeblatt gilt $\mu(c) = 2$, also $\kappa(c) \geq 4\pi$. Der rechte Knoten ist ein Beispiel für $\mu(c) = 3$ und somit $\kappa(c) \geq 6\pi$.



$$\mu(c) = 2; \kappa(c) \geq 4\pi$$



$$\mu(c) = 3; \kappa(c) \geq 6\pi$$

Abb. 320

Literaturverzeichnis

- [1] I. Agricola, T. Friedrich. *Elementargeometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2005.
- [2] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.
- [3] C. Bär. *Elementargeometrie*. Vorlesung aus dem Wintersemester 2005/06.
- [4] M. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 3. Auflage, 1993.
- [5] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 9. Auflage, 1962.
- [6] L. Kauffman. *Knoten*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [7] M. Koecher, A. Krieg. *Ebene Geometrie*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 2007.
- [8] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 1995.
- [9] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 2000.
- [10] H. Knörrer. *Geometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2. Auflage, 2006.
- [11] C. Livingston. *Knotentheorie für Einsteiger*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [12] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. American Mathematical Society, Providence, 1997.

Index

- 2-Sphäre, 90
- abgeschlossener Halbraum, 164
- Abstand
 - euklidischer \sim , 89
 - hyperbolischer \sim , 189
 - sphärischer \sim , 90
 - zweier Mengen, 79, 92
- Abstandssphäre, 92
- Achsen
 - einer Ellipse, 68
 - einer Hyperbel, 74
- Achterknoten, 285
- Addierbarkeit von Strecken, 7
- affine Transformation, 59
- Ähnlichkeit
 - von Dreiecken, 60
 - von Mengen, 96
 - von n -Ecken, 96
- Ähnlichkeitsgruppe, 58, 96
- Ähnlichkeitssatz für Dreiecke, 62
- Ähnlichkeitstransformation, 95
 - in \mathbb{R}^n , 58
- angeordnete Zahlkörper, 13
- Anordnungsaxiome, 3, 137, 194–196
- Anti-Möbius-Transformation, 215
- antipodale Punkte, 129
- archimedisches Axiom, 13, 15
- Astronomie, 1
- Asymptote, 80
- axiomatischer Aufbau der Geometrie, 1
- Axiome der ebenen euklidischen Geometrie, 1

- Banach-Tarski-Paradoxon, 123
- Basis
 - eines Kegels, 107
 - eines schiefen Zylinders, 106
 - eines Zylinders, 105
- Baukunst, 1

- Beltrami-Klein-Modell, 209
- Berührkegel, 156
- Bewegung
 - euklidische \sim , 19
- Bewegungsgruppe, 19
- Bogenlängenparametrisierung einer Kurve, 238
- Bolyai, János, 13
- Boost, 183
- Borromeo-Ringe, 286, 295
- Brückenzahl, 317
- Brennpunkt
 - einer Ellipse, 68
 - einer Hyperbel, 74
 - einer Parabel, 84

- Cantor-Menge, 120
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 186
 - inverse \sim , 185
- Cavalieri'sches Prinzip,
 - verallgemeinertes, 103
- cosh, 77

- Dedekind'scher Schnitt, 23
- δ_{ij} (Kronecker-Delta), 93
- δ_{ij}^* , 180
- Desargues, Satz von, 35
- Descartes, René, 3, 15
- Diagonalensatz, 32
- Diagrammisotopie, 290
- Dimension
 - Hausdorff-, 118
- Dodekaeder, 173
- Doppelpunkt, 288
- Doppelverhältnis, 217
- Drehmatrix, 19
- Dreieck, 31
 - euklidisches \sim , 24
 - Winkelsumme, 26
 - hyperbolisches \sim , 197

- Flächeninhalt, 207
 - Winkelsumme, 201
- sphärisches \sim , 130
 - Flächeninhalt, 146
 - Winkelsumme, 132
- Dreiecksfläche, 1
- Durchlaufsin, 237

- ebene Kurve, 246
 - Krümmung, 246
- ebene orientierte Kurve, 246
- ebene parametrisierte Kurve, 246
- ebene reguläre parametrisierte Kurve, 246
- Ebene, hyperbolische, 188
- einbeschriebenes Polygon, 275
- Eindeutigkeit
 - der euklidischen Geometrie, 15
- einfach geschlossene Kurve, 114, 245
- Ellipse, 68, 227, 260
 - Flächeninhalt, 117
 - Halbachse, 72
 - Krümmung, 248
- elliptisches Integral, 249
- entartetes n -Eck, 31
- Erweiterung eines Modells der ebenen euklidischen Geometrie, 14
- euklidische Bewegung, 19
- euklidische Bewegungsgruppe, 19
- euklidische Geometrie, 1
 - Eindeutigkeit, 15
 - Erweiterung eines Modells, 14
 - kartesische Modell, 15
 - Modell, 14
 - räumliche \sim , 15
 - vorläufiges Modell, 14
- euklidische Isometrie, 94
- euklidische Norm, 89
- euklidischer Abstand, 89
- euklidischer Raum, 89
- euklidisches Dreieck, 24
 - Winkelsumme, 26
- euklidisches Skalarprodukt, 89
- Euler'scher Polyedersatz, 167
- Euler, Satz von, 51
- Euler-Gerade, 52
- Euler-Gleichung, 51
- Eulerformel für sphärische Graphen, 168
- Eulerwinkel, 140
- Exzentrizität, numerische, 74, 248

- Fáry, István, 324
- Fary-Milnor, Satz von, 324
- Feinheit einer Unterteilung, 241, 275
- Fenchel, Satz von, 324
- Feuerbach-Gleichung, 55
- Feuerbachkreis, 54
 - Satz vom \sim , 55
- Flächeninhalt
 - Ellipse, 117
 - euklidischer \sim , 114
 - Hyperbelkappe, 206
 - hyperbolischer \sim , 206
 - hyperbolisches Dreieck, 207
 - Kreisscheibe, 108, 118
 - Kugelkappe, 145
 - Rechteck, 104
 - sphärischer \sim , 144
 - sphärisches Dreieck, 146, 148
 - sphärisches n -Eck, 149
- flächentreu, 160
- Fraktal, 120
- Frenet-Gleichungen, 249

- Gammafunktion, 99
- Gauß, Carl Friedrich, 13
- Gegenwinkel, 11
- Gerade, 2, 3, 15, 203, 233
- geschlossene Kurve, 245
- geschlossenes Polygon, 272
- Grad
 - eines Polytops, 173
- Graph, sphärischer, 167
- Großhyperbel, 191
- Großhyperbelbogen, 193
 - Länge, 193
- Großkreis, 127
- Großkreisbogen, 128
 - kurzer \sim , 128
 - Länge, 128
 - langer \sim , 128
- Großhyperbel, 204

- Halbachse, 72
- Halbraum, abgeschlossener, 164
- Hausdorff-Dimension, 118
- Hausdorff-Maß, 100
- Hesse'sche Normalform, 16
- Hexaeder, 173
- Hilbert, David, 2, 14
- Höhe

- eines Dreiecks, 29, 136, 201
- eines schiefen Zylinders, 106
- eines Zylinders, 105
- Höhenformel
 - euklidisch, 30
 - hyperbolisch, 201
 - sphärisch, 136
- Höhensatz, 29
- Hopf-Verschlingung, 286
- Hyperbel, 74, 231
- Hyperbelast, 75
- Hyperbelkappe, 206
- hyperbolische Ebene, 188
- hyperbolische Funktionen, 77
- hyperbolische Geometrie, 13, 188
 - Beltrami-Klein-Modell
 - ↗ Klein'sches Modell, 208
 - ↗ Zentralprojektion, 195
 - Hyperboloidmodell, 188, 208
 - Klein'sches Modell, 208
 - ↗ Zentralprojektion, 195
 - konformes Scheibenmodell, 210
 - Poincaré-Scheibenmodell, 210
 - projektives Scheibenmodell
 - ↗ Klein'sches Modell, 208
 - ↗ Zentralprojektion, 195
- hyperbolische Isometrie, 191
- hyperbolischer Abstand, 189
- hyperbolisches Dreieck, 197
 - Flächeninhalt, 207
 - Winkelsumme, 201
- Hyperboloidmodell, 188, 208

- Ikosaeder, 166, 173
- Inkreis, 46
- Inversion am Kreis, 216
- Inzidenzaxiome, 2, 137, 194
- Isometrie, 92
 - euklidische \sim , 94
 - hyperbolische \sim , 191
 - sphärische \sim , 93, 127
- Isometriegruppe, 93
- isometrisch, 95
- Isoperimetrische Ungleichung, 266, 267
- isotop
 - Knoten, 283
 - Verschlingungen, 287
 - Verschlingungsdiagramme, 290
- Isotopie
 - zwischen Knoten, 283
 - zwischen Verschlingungen, 287
 - zwischen Verschlingungsdiagrammen, 290
- Jones-Polynom, 309
- kartesisches Modell, 3, 15
- Kartographie, 149
- Kauffman-Polynom, 303
- kausal, 178
- Kegel, 107, 109
- Kegelschnitte, 225, 226
- Klammerpolynom, 301
- Kleeblattschlinge, 285
- Klein'sches Modell, 209
- Klein, Felix, 209
- Knoten, orientierter, 283
- Knotendiagramm, 288
- Knotenlinie, 140
- Koch'sche Schneeflocke, 122
- Komponenten einer Verschlingung, 286
- konformes Scheibenmodell, 212
- kongruente Strecke, 6
 - Existenz, 6
- Kongruenz
 - der Gegenwinkel, 11
 - der Nebenwinkel, 10
 - von Dreiecken, 60
 - von Mengen, 96
 - von n -Ecken, 96
 - von Strecken, 6
- Kongruenzaxiome, 6, 202–203
- Kongruenzsatz für Dreiecke, 26, 60
- konstanter Kurs, 162
- Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, 15
- konvex, 257
- Körper, platonischer, 173
- Kosinussatz
 - euklidische Geometrie, 24
 - hyperbolische Geometrie
 - Seiten-, 200
 - Winkel-, 201
 - sphärische Geometrie
 - Seiten-, 134
 - Winkel-, 136
- Kreis, 40, 92, 155, 234
 - verallgemeinerter \sim , 218
- Kreisfläche, 108, 118
 - Näherungsformel, 1
- Kreiskegel, 109

- Kreislinie, 234, 245, 248, 251
 Kreisscheibe
 Hausdorff-Maß, 108, 118
 Kreistreue, 156
 Kreisumfang, 112
 Kremer, Gerhard, 161
 Kronecker-Delta, 93
 Krümmung
 Approximation durch Polygone, 275
 einer ebenen Kurve, 246
 einer Raumkurve, 270
 Kugel, 110
 Kugelkappe, 145
 Kugeloberfläche, 111
 Kugelschale, 110
 Kurs, konstanter, 162
 Kurve, 114, 233, 246
 ebene \sim , 246
 einfach geschlossene \sim , 114, 245
 geschlossene \sim , 245
 im Raum, 270
 \sim konstanten Kurses, 162
 Krümmung, 246, 270
 parametrisierte \sim , 233
 ebene \sim , 246
 periodisch parametrisierte \sim , 245
 reguläre parametrisierte \sim , 233
 ebene \sim , 246
 Spur, 238
 \sim zweiten Grades, 68
 kurzer Großkreisbogen, 128

 Lambert, Johann Heinrich, 159
 Lambert-Entwurf, 159
 Länge
 einer Kurve, 239
 Approximation durch Polygone,
 241
 eines Großhyperbelbogens, 193
 eines Großkreisbogens, 128
 eines Polygons, 240
 langer Großkreisbogen, 128
 Leitgerade, 84
 lichtartig
 affine Ebene, 226
 Untervektorraum, 225
 Vektor, 178, 225
 Lichtkegel, 225
 Liftungslemma, 254
 Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch
 (H. И. Лобачевский), 13
 logarithmische Spirale, 236
 Lorentz-Boost, 183
 Lorentz-Gruppe, 182
 Lorentz-orthonormale Basis, 180
 Lorentz-Transformation, 180
 zeitorientierungserhaltende \sim , 187

 maximales vorläufiges Modell der ebenen
 euklidischen Geometrie, 14
 Maximalitätsaxiom, 14
 Maßstab, 58, 95
 Mercator-Projektion, 161
 Messkunde, 1
 metrischer Raum, 89
 Milnor, John, 324
 Minkowski-Geometrie, 177
 Minkowski-Produkt, 177
 Mittelpunkt
 einer Ellipse, 68
 einer Hyperbel, 74
 einer Sphäre, 92
 eines Kreises, 40, 92
 Mittelsenkrechte, 48
 Möbius-Transformation, 214
 Modell
 der ebenen euklidischen Geometrie,
 14
 der hyperbolischen Geometrie, 208
 einer Geometrie, 95
 kartesisches \sim , 3, 15
 Morley, Satz von, 64
 Morley-Dreieck, 64

 n -Eck, 31
 regelmäßiges, 173
 sphärisches, 149, 171
 nach Bogenlänge parametrisierte Kurve,
 238
 Navigation, 1
 Nebenwinkel, 10
 Neil'sche Parabel, 235
 nichteuklidische Geometrie, 13
 Norm
 euklidische \sim , 89
 Normalenfeld einer ebenen Kurve, 247
 Normalenvektor einer Geraden, 16
 Normalform, 16
 numerische Exzentrizität, 74, 248

- Oktaeder, 166, 173
- orientalische Hochkulturen, 1
- orientierte Verschlingung, 286
- orientierungserhaltende Parametertransformation, 238
- orientierungsumkehrende Parametertransformation, 238
- orthogonale Matrix, 18

- Pappus von Alexandria, Satz von, 36
- Parabel, 84, 229
- Parallele, 12
 - Eindeutigkeit, 13
 - Existenz, 11
- Parallelenaxiom, 13, 137, 203, 205
- Parallelogramm, 32
- Parametertransformation, 237
 - orientierungserhaltende \sim , 238
 - orientierungsumkehrende \sim , 238
- parametrisierte Kurve, 233
 - im Raum, 270
- Parametrisierung einer Kurve, 237
- Pascal, Satz von, 37
- Passante, 42
- Periode, 245
- periodisch, 245
- platonischer Körper, 173
- Poincaré-Scheibenmodell, 212
- Polardreieck, 135
- Polarkoordinaten
 - eben, 73
 - sphärisch, 152
- Polar- n -Eck, 172
- Polyeder
 - \nearrow Polytop, 164
- Polyedersatz von Euler, 167
- Polygon, 240
 - \nearrow Polytop, 164
 - einbeschriebenes, 275
 - geschlossenes \sim , 272
 - sphärisches Bild, 320
- Polynome, 297
- Polytop, 164
 - Grad, 173
- Projektion
 - Lambert-Entwurf, 159
 - Mercator-, 161
 - stereographische \sim , 153
 - zulässige \sim , 287
- projektives Scheibenmodell, 209
- proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, 238
- Punkt, 2, 3, 15
- Pythagoras, Satz von, 25
- Quader, 104

- raumartig
 - affine Ebene, 226
 - Untervektorraum, 225
 - Vektor, 178, 225
- Raumkurve, 270
 - Krümmung, 270
- reguläre parametrisierte Kurve, 233
 - ebene \sim , 246
 - im Raum, 270
- Reidemeister, Satz von, 292
- Reidemeister-Bewegung, 291

- Satz vom Feuerbachkreis, 55
- Satz von Desargues, 35
- Satz von Euler, 51
- Satz von Morley, 64
- Satz von Pappus, 36
- Satz von Pascal, 37
- Scheibenmodell
 - konformes \sim , 212
 - Poincaré-, 212
 - projektives \sim , 208, 209
 - \nearrow Zentralprojektion, 195
- Scheitel, 260
 - eines Winkels, 8
- Scheitelpunkt, 85
- schiefer Zylinder, 106
- Schleppkurve, 235
- Schneeflocke, Koch'sche, 122
- Schraubenlinie, 234
- Schwerpunkt, 28
- Schwerpunktsatz, 28
- Sehnen-Tangenten-Satz, 44
- Sehnensatz, 43
- Seite
 - auf derselben \sim liegen, 6
 - einer Geraden in der Ebene, 6
 - eines Punktes auf einer Geraden, 6
 - eines sphärischen Dreiecks, 130
- Seiten
 - eines hyperbolischen Dreiecks, 197
- Seitenhalbierende, 28
- Seitenkosinussatz

- hyperbolischen Geometrie, 200
- sphärische Geometrie, 134
- Seitenlänge
 - hyperbolisches Dreieck, 197
- Seitenlänge
 - euklidisches Dreieck, 24
 - sphärisches Dreieck, 130
- Sekante, 41
- Selbstschnitt, 245
- Sierpinski-Teppich, 121
- \sinh , 77
- Sinussatz
 - euklidische Geometrie, 25
 - hyperbolische Geometrie, 201
 - sphärische Geometrie, 133
- Skalarprodukt
 - euklidisches \sim , 89
- Skein-Relation, 309
- sphärisches Bild eines Polygons, 320
- Sphäre, 90
 - Abstandssphäre, 92
 - sphärisch konvex, 170
 - sphärische Geometrie, 125
 - sphärische Isometrie, 93, 127
 - sphärischer Abstand, 90
 - sphärischer Graph, 167
 - sphärisches Dreieck, 130
 - Flächeninhalt, 146
 - Winkelsumme, 132
 - sphärisches n -Eck, 149, 171
 - Spiegelungsmatrix, 19
 - Spirale, 236
 - Spitze
 - eines Kegels, 107
- Spur einer parametrisierten Kurve, 238
- stereographische Projektion, 153
- sternförmig, 253
- Strahlensatz, 33
- Strecke, 4
 - Addierbarkeit, 7
 - Kongruenz, 6
- Streckenabtragung, 6
- Streckungsfaktor, 58, 95
- Summe
 - von Verschlingungsdiagrammen, 305
- Symmetrie, 96
- Symmetriegruppe, 96
- Tangente, 41
- Tangentenvektor
 - an Großhyperbel, 192
 - an Großkreis, 128
- Teppich, Sierpinski-, 121
- Tetraeder, 165, 173
- Totalkrümmung, 275
- Totalwinkel, 273
- Traktrix, 235
- Transformation
 - affine \sim , 59
- Translationsanteil, 19
- triviale Verschlingung, 286
- Überkreuzungspunkt, 288
 - Vorzeichen, 292
- Umkreis, 48
- Umlaufsatz, 253
- Umlaufzahl, 251
- Umparametrisierung, 237
- Unknoten, 284
- Unterteilung, 115, 241, 255, 275
- Vektorprodukt, 91
- verallgemeinerter Kreis, 218
- verallgemeinertes Cavalieri'sches Prinzip, 103
- vergangenheitsgerichtet
 - lichtartiger Vektor, 178
 - zeitartiger Vektor, 178
- Verschlingung, orientierte, 286
- Verschlingung, triviale, 286
- Verschlingungsdiagramm, 288
 - Summe, 305
 - Zustand, 298
- Verschlingungszahl, 293
- Verwringung, 302
- Viereck, 31
- Vierscheitelsatz, 261
- Vieta'scher Wurzelsatz, 40
- Vollständigkeitsaxiome, 13, 203
- vorläufiges Modell der ebenen euklidischen Geometrie, 14
- Vorzeichen eines Überkreuzungspunkts, 292
- Widerspruchsfreiheit, 23
- windschiefe Geraden, 21
- Winkel, 7
- Winkelabtragung, 8
- Winkelfunktion, 249
- Winkelgröße, 10

- euklidisches Dreieck, 24
- hyperbolisches Dreieck, 197
- sphärisches Dreieck, 130
- zwischen Großhyperbelbögen, 196
- zwischen Großkreisbögen, 130
- Winkelkosinussatz
 - hyperbolische Geometrie, 201
 - sphärische Geometrie, 136
- Winkelsumme
 - im euklidischen Dreieck, 26
 - im hyperbolischen Dreieck, 201
 - im sphärischen Dreieck, 132
- Winkeltreue
 - Mercator-Projektion, 162
 - stereographische Projektion, 153, 158
- Würfel, 166
- Wurzelsatz von Vieta, 40
- Zählmaß, 103
- zeitartig
 - affine Ebene, 226
 - Untervektorraum, 225
 - Vektor, 178, 225
- zeitorientierungserhaltend
 - Lorentz-Transformation, 187
- Zentralprojektion, 195
- zukunftsgerichtet
 - lichtartiger Vektor, 178
 - zeitartiger Vektor, 178
- zulässige Projektion, 287
- zusammenhängend
 - sphärischer Graph, 167
- Zustand eines Verschlingungsdiagramms, 298
- Zwei-Sehnen-Satz, 43
- Zylinder, 105
 - schiefes \sim , 106