Une caractrisation de champs gibbsiens sur un espace de trajectoires

Sylvie Roelly et Hans Zessin

October 3, 2007

Résumé - Les champs gibbsiens (lois de processus ponctuels de Gibbs) sur l'espace des trajectoires $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$ sont caractriss comme solution d'une formule d'intgration par parties.

A characterization of Gibbsian fields on pathspace

Abstract - *Gibbs fields (more precisely Gibbs random point fields) in the pathspace $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$ are characterized as solution of an integration by parts formula on the pathspace.*

Abridged English Version – In [6], Gibbs measures on $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$ are characterized as the probability measures which satisfy a certain infinite dimensional integration by parts formula on the pathspace. In this note we propose an extension of this characterization to Gibbs fields in $\mathcal{C} := \mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$ in the sense of definition 1 below.

Definition 1 *Let $V : \mathcal{C} \times \Omega \longrightarrow]0,+\infty[$ be a local energy in the sense of Dfinition 1 and λ a Radon measure on $\mathcal{C}$. A point process Q in $\mathcal{C}$ is called a (V,λ)-Gibbs field in $\mathcal{C}$ if the reduced Campbell measure of Q has density V with respect to the product measure $\lambda \otimes Q$.*

This definition is equivalent to the one given by Dobrushin, Lanford and Ruelle in terms of the conditional probabilities (see Dfinition 2 below).

Our first result is a characterization for the special case $V \equiv 1$, i.e. in the situation where there is no interaction.

Theorem 1 *Let Q be a point process in $\mathcal{C}$ with an intensity ν_Q^1 which we assume to be a probability measure on $\mathcal{C}$ satisfying $\nu_Q^1(|x_t|) < +\infty$ for each $t \geq 0$. Then Q is the Poisson process P_ρ with the Wiener measure ρ on $\mathcal{C}$ as intensity if and only if the following integration by parts formula holds :*
for all $f \in \mathcal{W}(\mathcal{C}), G \in L^\infty(\Omega)$, (see notations below) and simple functions φ on $[0,T]$,

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)G(\mu)\int_0^T \varphi_s dx_s C_Q^!(dx,d\mu) = \nu_Q^1(D_\varphi f)Q(G).$$

Here dx_s denotes the stochastic integration in the sense of It and $D_\varphi f$ the Malliavin derivative of f.

This result enables us to derive an analogous result for the case with interaction :

Theorem 2 *Let V be a local energy, ρ the Wiener measure and Q be a tempered (in the sense below) point process in $\mathcal{C}$. Suppose that*

$$\nu_Q^1(1/r) = 1 \text{ where } r(x) =: \int_\Omega V(x;\mu)Q(d\mu), x \in \mathcal{C}.$$

Then Q is a (V,ρ)-Gibbs field in $\mathcal{C}$ if and only if for all $f \in W^{1,\infty}(\mathcal{C}), G \in L^\infty(\Omega)$, and simple functions φ on $[0,T]$,

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} V(x;\mu)^{-1} f(x)G(\mu) \int_0^T \varphi_s dx_s \; C_Q^!(dx,d\mu) = \nu_Q^1(r^{-1}D_\varphi f)Q(G).$$

O. INTRODUCTION

Dans [6], nous avons caractris les mesures de Gibbs sur l'espace produit $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$ comme les solutions d'une quation fonctionnelle correspondant une version infini-dimensionnelle de la formule d'intgration par parties du calcul de Malliavin. C'est le cadre d'un systme rticul (index par $\mathbb{Z}^d$) o chaque spin prend ses valeurs dans $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$.

Dans cette note nous tendons ce type de caractrisation au cas d'un champ gibbsien, i.e. un processus ponctuel sur $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$ avec une interaction de type gibbsienne.

Cette caractrisation nous sert identifier dans [7] la loi de systmes gradients stochastiques continus (diffusions infini-dimensionnelles en interaction) comme des champs gibbsiens sur $\mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$.

NOTATIONS ET CADRE DU PROBLÈME

Les espaces d'tats ; leurs probabilits

– $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0,T;\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions relles continues de [0,T] dans $\mathbb{R}$, muni de $\sigma(\mathcal{C})$, la tribu gnre par les ensembles cylindriques $\{x \in \mathcal{C}, x_{t_1} \in A_1, ..., x_{t_n} \in A_n\}, 0 \le t_i \le T, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

– $\Omega = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, l'ensemble des mesures positives ponctuelles de Radon sur $\mathcal{C}$, est muni de la tribu $\sigma(\Omega)$ gnre par les ensembles $\{\mu \in \Omega, \mu(B) = n\}, n \in \mathbb{N}, B \in \sigma(\mathcal{C})$.

Pour $B \in \sigma(\mathcal{C}), \mathcal{M}_B(\mathcal{C})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des mesures support dans B, et $\mathcal{M}_f(\mathcal{C})$ le sous-ensemble des mesures finies de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.

– Pour $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des probabilits sur Ω, on dfinit, comme habituellement en thorie des mesures ponctuelles, la **mesure de Campbell rduite** $C_Q{}^!$ sur $\mathcal{C} \otimes \Omega$ par

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)G(\mu)C_Q{}^!(dx,d\mu) = \int_\Omega \int_{\mathcal{C}} f(x)G(\mu - \varepsilon_x)\mu(dx)Q(d\mu),$$

o ε_x dsigne la mesure de Dirac en x.

On note ν_Q^1 la mesure positive sur $\mathcal{C}$ dite **intensit**, ou premier moment de Q, dfinie par

$$\nu_Q^1(dx) = \int_\Omega \mu(dx)Q(d\mu).$$

– Sur $\mathcal{C}$, la probabilit de rfrence est la mesure de Wiener note ρ.
– Sur Ω, la probabilit de rfrence est $P_\rho \in \mathcal{P}(\Omega)$, le processus ponctuel de Poisson d'intensit ρ. Pour $B \in \sigma(\mathcal{C})$ on note $P_{\rho,B} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_B(\mathcal{C}))$ le processus de Poisson d'intensit $\rho_{|B}$.

Les espaces de fonctionnelles

– $W^{1,2}(\mathcal{C}) = \{f \in L^2(\mathcal{C}), \forall \varphi \in L^2(0,T)\,, \exists D_\varphi f(x) =: \lim_{\varepsilon\to 0}[f(x+\varepsilon\int_0^\cdot \varphi_s ds) - f(x)]/\varepsilon \in L^2(\mathcal{C})\}$
– $W^{1,\infty}(\mathcal{C}) = \{f \in W^{1,2}(\mathcal{C}), f \text{ borne et } D_\varphi f(x) \in L^\infty(\mathcal{C}) \forall \varphi \in L^2(0,T)\}$
– $\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \{f \in W^{1,\infty}(\mathcal{C}), f(x) = \Phi(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}), t_i \in [0,T], \Phi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ support compact$\}$.

1. CARACTÉRISATION DE P_ρ, LE PROCESSUS DE POISSON SUR $\mathcal{C}$ D'INTENSITÉ LA MESURE DE WIENER ρ

Il est bien connu, cf [3], que tout processus de Poisson P satisfait l'quation

$$C_P^! = \nu_P^1 \otimes P.$$

En particulier,

$$C_{P_\rho}^! = \rho \otimes P_\rho.$$

En utilisant de plus la formule d'intgration par parties du Calcul de Malliavin (cf [1]), on obtient :

Proposition 1 *Pour tout $\varphi \in L^2(0,T), f \in W^{1,2}(\mathcal{C})$ et $G \in L^\infty(\Omega)$*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)G(\mu)\int_0^T \varphi_s dx_s \; C_{P_\rho}^!(dx,d\mu) &= (\int f(x)\int_0^T \varphi_s dx_s \; \rho(dx))P_\rho(G) \\ &= \rho(D_\varphi f)P_\rho(G) \\ &= \nu_{P_\rho}^1(D_\varphi f)P_\rho(G), \end{aligned} \tag{1}$$

o $\int .dx_s$ reprsente l'intgrale stochastique au sens de It.

Nous allons montrer que l'quation (1) caractrise P_ρ.

Théorème 1 *Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ d'intensit une probabilit ν_Q^1 telle que $\nu_Q^1(|x_t|) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$, et pour tout $f \in \mathcal{W}(\mathcal{C}), G \in L^\infty(\Omega)$, et φ en escalier sur $[0,T]$,*

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)G(\mu)\int_0^T \varphi_s dx_s \, C_Q^!(dx,d\mu) = \nu_Q^1(D_\varphi f)Q(G). \tag{2}$$

Alors Q est gal P_ρ, le processus de Poisson sur $\mathcal{C}$ d'intensit la mesure de Wiener ρ.

Preuve : Sous l'hypothse sur ν_Q^1 les deux membres de (2) sont bien finis.
Premire tape : En prenant $G \equiv 1$ dans (2) on vrifie que ν_Q^1 satisfait :
pour tout $f \in \mathcal{W}(\mathcal{C})$, et φ en escalier sur $[0, T]$

$$\int f(x) \int_0^T \varphi_s dx_s \, \nu_Q^1(dx) = \nu_Q^1(D_\varphi f),$$

ce qui caractrise ρ une constante prs, d'aprs [6] Thorme 1.2.
Comme ν_Q^1 est une probabilit, $\nu_Q^1 = \rho$.
Deuxime tape : Soit $\tilde{Q}$ la fonctionnelle caractristique de Q dfinie par

$$\tilde{Q}(f) = \int_\Omega e^{i \int f(x)\mu(dx)} Q(d\mu), \; f \in \mathcal{W}(\mathcal{C}).$$

Elle caractrise Q. En particulier, la connaissance de $\tilde{Q}$ sur $\{f_\varphi(x) = e^{i\int_0^T \varphi_s dx_s}, \varphi$ en escalier sur $[0, T]\}$, suffit dterminer Q. On note $f_k = f_{k\varphi}, \varphi$ fix, $k \in \mathbb{R}$, et l'on cherche une quation diffrentielle en k satisfaite par $\tilde{Q}(f_k)$:

$$\begin{aligned}
d\tilde{Q}(f_k)/dk &= -\int_\Omega \int_{\mathcal{C}} f_k(x) \int_0^T \varphi_s dx_s \, \mu(dx) e^{i \int f_k d\mu} \, Q(d\mu) \\
&= -\int_{\mathcal{C} \otimes \Omega} (f_k e^{i f_k})(x) \int_0^T \varphi_s dx_s \; e^{i \int f_k d\mu} \; C_Q^!(dx, d\mu) \\
&= -\rho(D_\varphi(f_k e^{i f_k})) Q(e^{i \int f_k d\mu}) \qquad (\text{ par } (2)) \\
&= -w(k)\tilde{Q}(f_k)
\end{aligned}$$

o $w(k) =: \rho(D_\varphi(f_k e^{i f_k})) = ik \| \varphi \|_2^2 \rho(f_k(1 + i f_k))$. Mais $\tilde{P}_\rho(f_k)$ est solution de la mme quation diffrentielle et par consquent $\tilde{Q}(f_k) = \tilde{P}_{c\rho}(f_k)$, pour un $c \in \mathbb{R}$. Donc $Q = P_{c\rho}$ et $\nu_Q^1 = c\rho$. Mais ν_Q^1 tant une probabilit cela entrane $c = 1$. ■

Nous tendons maintenant ce rsultat la caractrisation de processus ponctuels avec interaction gibbsienne.

2. CARACTÉRISATION D'UN CHAMP GIBBSIEN SUR $\mathcal{C}$

L'on trouve dans [4] une gnralisation de la caractrisation de Mecke d'un processus de Poisson via sa mesure de Campbell, des champs interactifs de type gibbsien. Nous raffinons ici ce critre dans le cas o l'intensit du processus de Poisson de rfrence est la mesure de Wiener.
Rappelons le concept gnral de champ gibbsien (sur $\mathcal{C}$), dfini grce un noyau appel nergie locale ([2],[4],[8]) (La dfinition qui suit englobe les premires dfinitions donnes par Dobrushin, Lanford et Ruelle via un potentiel d'interaction ([5])).

Définition 1 *Une* **nergie locale au point** $x \in \mathcal{C}$ **sous la configuration** $\mu \in \Omega$ *est une famille de fonctions strictement positives* $V(x; \mu)$ *vrifiant :*
i) Pour tout $x \in \mathcal{C}, \mu \longrightarrow V(x; \mu)$ *est* $\sigma(\mathcal{M}(\mathcal{C} - \{x\}))$*-mesurable*
ii) $x \longrightarrow V(x; \mu) \in W^{1,\infty}(\mathcal{C})$ *uniformment en* $\mu \in \Omega$
iii) $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall \mu \in \Omega, V(x_1; \mu)V(x_2; \mu + \varepsilon_{x_1}) = V(x_2; \mu)V(x_1; \mu + \varepsilon_{x_2})$.

Cette dernire galit permet de dfinir pour tout B born de $\sigma(\mathcal{C})$ une fonction d'**nergie conditionne sur** B sachant la configuration extrieure $\xi \in \mathcal{M}_{B^c}(\mathcal{C})$ par

$$\begin{aligned} V_B(0+\xi) &= 1 \\ V_B(\zeta+\xi) &= V(x_1;\xi)V(x_2;\xi+\varepsilon_{x_1})...V(x_n;\xi+\varepsilon_{x_1}+\ldots+\varepsilon_{x_{n-1}}) \end{aligned} \quad (3)$$

pour tout $\zeta = \varepsilon_{x_1}+\ldots+\varepsilon_{x_n} \in \mathcal{M}_B(\mathcal{C})$ et $\xi \in \mathcal{M}_{B^c}(\mathcal{C})$.
On supposera

$$\mathcal{M}_0 = \{\mu \in \Omega, \forall B \text{ born de } \sigma(\mathcal{C}), \int_{\mathcal{M}_B(\mathcal{C})} V_B(\zeta+\mu_{|B^c})P_{\rho,B}(d\zeta) < +\infty\} \neq \phi$$

et l'on dira que $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ est **tempre** si $Q(\mathcal{M}_0) = 1$.

Définition 2 *$\mathcal{G}(V,\rho)$, l'ensemble des champs gibbsiens d'nergie V par rapport P_ρ, est l'ensemble des $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ tempres satisfaisant pour tout B born de $\sigma(\mathcal{C})$ et $\mu \in \Omega$:*

$$Q(d\zeta/\mu_{|B^c}) = cte(B,\mu)V_B(\zeta+\mu_{|B^c})P_{\rho,B}(d\zeta)\, Q-p.s. \quad (4)$$

Notre rsultat s'nonce alors ainsi :

Théorème 2 *Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ tempre telle que*

$$\nu_Q^1(1/r) = 1 \text{ o } r(x) =: \int_\Omega V(x;\mu)Q(d\mu), x \in \mathcal{C}. \quad (5)$$

Alors $Q \in \mathcal{G}(V,\rho)$ si et seulement si pour tout $f \in W^{1,\infty}(\mathcal{C}), G \in L^\infty(\Omega)$, et φ en escalier sur $[0,T]$

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} V(x;\mu)^{-1}f(x)G(\mu)\int_0^T \varphi_s dx_s\, C_Q^!(dx,d\mu) = \nu_Q^1(r^{-1}D_\varphi f)Q(G). \quad (6)$$

Preuve : D'aprs [4] Theorem 2, Q est un champ gibbsien d'nergie V par rapport P_ρ si et seulement si

$$C_Q^!(dx,d\mu) = V(x;\mu)Q(d\mu)\rho(dx).$$

Supposons $Q \in \mathcal{G}(V,\rho)$; alors

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} V(x;\mu)^{-1}f(x)G(\mu)\int_0^T \varphi_s dx_s C_Q^!(dx,d\mu) = \rho(f\int_0^T \varphi_s dx_s)Q(G) = \rho(D_\varphi f)Q(G).$$

Pour retrouver (6) il suffit de remarquer que $\nu_Q^1(dx) = r(x).\rho(dx)$.
Rciproquement, supposons l'quation (6) satisfaite.
Premire tape : Identification de la probabilit $r(x)^{-1}\nu_Q^1(dx)$.
L'galit (6) est encore valable pour des fonctions G dpendant rgulirement de x.
En particulier, pour $G(x,\mu) = V(x;\mu)/r(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)\int_0^T \varphi_s dx_s/r(x)\; C_Q^!(dx,d\mu) &= \int_\Omega\int_{\mathcal{C}} D_\varphi(V(.;\mu)f/r)(x)\nu_Q^1(dx)Q(d\mu) \\ \text{d'o } \int_{\mathcal{C}} f(x)\int_0^T \varphi_s dx_s\,/r(x)\; \nu_Q^1(dx) &= \int_{\mathcal{C}} D_\varphi f(x)\nu_Q^1(dx), \end{aligned}$$

car le terme de droite provenant du dveloppement de $fD_\varphi(V(.;\mu)/r)$ s'annule. Donc d'aprs [6] Thorme 1.2, $r^{-1}.d\nu_Q^1$ est gale la mesure de Wiener ρ sur $\mathcal{C}$.
Deuxime tape : Identification de $Q^{B,\mu}(d\zeta) =: V_B(\zeta+\mu_{|B^c})^{-1}.Q(d\zeta/\mu_{|B^c})$ pour B born et $\mu \in \mathcal{M}_0$. En appliquant (6) des fonctions tests de la forme

$$f(x)G(\zeta)\tilde{G}(\mu_{|B^c})V_B(\zeta+\mu_{|B^c})^{-1} \text{ o } f|_{B^c} = 0 \text{ et } \zeta \in \mathcal{M}_B$$

et en utilisant l'identit suivante dcoulant de (3) : si $x \in B$,

$$V_B(\zeta+\mu_{|B^c}) = V(x;\zeta+\mu_{|B^c}).V_B(\zeta-\varepsilon_x+\mu_{|B^c})$$

on obtient

$$\int_{\mathcal{C}\otimes\Omega} f(x)G(\zeta)\int_0^T \varphi_s dx_s \; C^!_{Q^{B,\mu}}(dx,d\zeta) = \rho(D_\varphi f)Q^{B,\mu}(G).$$

D'aprs le Thorme 2, cela implique que $Q^{B,\mu}$ renormalise est le processus de Poisson sur B d'intensit ρ. ■

References

[1] B. Gaveau et Ph. Trauber, L'intgrale stochastique comme oprateur de divergence dans l'espace fonctionnel, J. of Funct. Analysis 46 (1982), 230–238.

[2] F. Ledrappier, Energie locale pour les systmes continus, Prpublication (1976)

[3] I. Mecke, Stationre zufllige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen, Zeitschr. fr Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 9 (1967), 36–58

[4] X.X. Nguyen, H. Zessin, Integral and Differential Characterizations of the Gibbs Process, Math. Nachr. 88 (1979), 105–115.

[5] C. J. Preston, Random Fields. Lecture Notes in Mathematics, Vol.354 Springer Verlag (1976)

[6] S. Roelly, H. Zessin, Une caractrisation des mesures de Gibbs sur $C(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques, Ann. Inst. Henri Poincaré 29-3 (1993), 327-338.

[7] S. Roelly, H. Zessin, Analyse gibbsienne de la loi d'un systme infini-dimensionnel continu de diffusions interactives, en prparation

[8] Y. Takahashi, Characterization of Gibbsian measures, Prpublication (1976)

S. Roelly: *URA CNRS Gomtrie, Algbre et Topologie*
UFR de Mathmatiques pures et appliques, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
H. Zessin: *Laboratoire de Statistique et Probabilités, UFR de Mathmatiques pures et appliques,*
Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.