

Universität Potsdam  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik

# Masterarbeit

## Stochastisches Kalkül in diskreter Zeit

vorgelegt von  
Anselm Mantei  
Februar 2015

betreut von  
Prof. Dr. Sylvie Roelly

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Stochastische Integration</b>	<b>4</b>
2.1	Einführung . . . . .	4
2.2	Das diskrete stochastische Integral . . . . .	5
2.3	Das multiple diskrete stochastische Integral . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Die Rolle des Bernoulliprozesses</b>	<b>16</b>
3.1	Diskrete Strukturgleichung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Repräsentationseigenschaft</b>	<b>27</b>
4.1	PRP und CRP . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Der Gradient Operator und die Clark-Ocone Formula</b>	<b>34</b>
5.1	Der Gradient Operator . . . . .	34
5.2	Die Clark-Ocone Formula . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Der Divergenzoperator</b>	<b>49</b>
6.1	Das Skorohodintegral . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Optionshedging im Cox-Ross-Rubinstein-Modell</b>	<b>62</b>
7.1	Austausch der Variablen . . . . .	62
7.2	Hedging im CRR Modell . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Quellcodeverzeichnis</b>	<b>80</b>

# 1 Einleitung

Die Stochastische Integration befasst sich mit der Integration von Prozessen, die nicht im Sinne von Lebesgue und Stieltjes integrierbar sind, dies sind stochastische Prozesse mit unendlicher Variation. Entwickelt wurde diese Theorie in den 1940er Jahren von dem japanischen Mathematiker Itô Kiyoshi, welcher die Wahrscheinlichkeitstheorie mit diesem Durchbruch revolutionierte. Im Jahre 2000 erschien allerdings der versiegelte Brief „Sur l'équation de Kolmogoroff“ vom bereits 1940 verstorbenen Wolfgang Döblin, der einige Resultate über Stochastische Integration von Itô vorwegnahm, daher wird diese Theorie auch Itô-Döblin-Kalkül genannt. Nun stellt sich die Frage, inwieweit sich diese Theorien auch in diskreter Zeit übertragen lassen und inwiefern sich die Ergebnisse von der stetigen Version unterscheiden. Diesen Problemstellungen wird in der vorliegenden Arbeit nachgegangen.

Die wesentliche Grundlage für die Untersuchung bildet der Beitrag von Privault [12], welcher Funktionale von diskreten Normalmartingalen auf Basis des Malliavin Kalküls betrachtet und die Basisoperatoren der stochastischen Analysis (Gradient und Divergenz) für Bernoulli-Prozesse in diskreter Zeit einführt. Wang et al. [18] präsentieren dazu einen alternativen Ansatz, im Gegensatz zu Privault arbeiten sie auf einem komplizierteren Raum  $\ell^2(\Gamma)$  ( $\Gamma$  ist die endliche Potenzmenge von  $\mathbb{N}$ ), allerdings erhalten viele Ergebnisse durch kombinatorische Eigenschaften von  $\ell^2(\Gamma)$  eine sehr einfache und umgängliche Form. Es werden auch Gradient- und Divergenzoperator vorgestellt, wobei besonders letzterer unter diskreter Fouriertransformation sehr zugänglich zu handhaben ist. Interessante Beiträge liefert auch Leitz-Martini [10], der seine Untersuchungen auf einer diskreten Version des Intervalls  $[0, 1]$  durchführt und diese mit einem Maß versieht. Er entwickelt eine Beziehung zwischen diskreter Brownscher Bewegung und diskretem weißen Rauschen, wobei die Theorie des Wickprodukts und der Walshzerlegung eine zentrale Rolle spielen.

Die vorliegende Arbeit ist in 6 Kapitel untergliedert, dabei wird zunächst eine Familie von diskreten Normalmartingalen betrachtet, auf Grundlage derer wir im Anschluss das diskrete stochastische Integral für vorhersehbare, quadratintegrierbare Prozesse konstruieren. Unser Augenmerk wird darauffolgend auf einer diskreten Version der Itô-Isometrie liegen, anschließend führen wir das multiple diskrete stochastische Integral für symmetrische Funktionen auf  $\mathbb{N}^n$  ein und untersuchen diese auf Isometrie- und Martingaleigenschaften. In Kapitel 3 spezifizieren wir die Anforderungen an die Klasse der Normalmartingale, die Erfüllung einer Strukturgleichung bringt sie in Verbindung mit Bernoulli-Prozessen. Darauf folgend führen wir Chaos- und vorhersehbare Repräsentation von Zufallsvariablen ein und zeigen, dass diese Darstellungen unter den Bedingungen aus Kapitel 3 existieren.

Im darauffolgenden Abschnitt bestimmen wir diese Darstellung dann explizit, dieses zentrale Ergebnis ist auch bekannt als Clark-Ocone Formula. Um dieses Resultat zu erreichen führen wir einen Gradient Operator  $D$  ein, der eine Art diskrete Malliavin Ableitung ist und als endlicher Differenzoperator für stochastische Integrale fungiert. Der Divergenzoperator  $\delta$  wird im darauffolgenden Abschnitt als adjungierte von  $D$  ein-

geführt, er stellt eine Erweiterung des diskreten stochastischen Integrals aus Kapitel 2 dar und mit ihm ist es nun möglich, nicht vorhersehbare Prozesse zu integrieren. Der Divergenzoperator, auch Skorohodintegral genannt, wird mit dem stochastischen Integral verglichen und Unterschiede in Darstellung und Isometrie erarbeitet. Im letzten Kapitel wird eine diskrete Version von Itô's Lemma vorgestellt, welche im Anschluss zusammen mit der Clark-Ocone Formula im Cox-Ross-Rubinstein-Modell angewandt wird. Wir konstruieren eine Hedgingstrategie für einen beliebigen Claim und wenden diese auf eine europäische Put-Option an.

## 2 Stochastische Integration

### 2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden wir nach ein paar grundlegenden Einführungen, den Begriff des diskreten stochastischen Integrals in Abschnitt 2.2, sowie den des multiplen diskreten stochastischen Integrals in Abschnitt 2.3, vorstellen und analysieren. Unser Augenmerk wird dabei jeweils auf einer diskreten Version der Itô Isometrie, sowie der Martingaleigenschaft des stochastischen Integrals liegen.

Sei  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Zustandsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und sei  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq -1}$  die Filtration, die von  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugt wird, also

$$\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\},$$

und

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n), n \geq 0.$$

Wir wollen nun das diskrete Normalmartingal einführen, dafür wird noch einmal an den Begriff der Messbarkeit erinnert. Eine Zufallsvariable  $X$  ist  $\mathcal{F}_n$ -messbar, wenn sie als eine Funktion

$$X = f_n(Y_0, \dots, Y_n)$$

von  $Y_0, \dots, Y_n$  geschrieben werden kann, wobei  $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 2.1.** Ein quadratintegrierbarer Prozess  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  welcher  $\mathcal{F}_n$ -messbar ist, heißt diskretes Normalmartingal, wenn er

- i)  $\mathbb{E}[M_0 | \mathcal{F}_{-1}] = 0$  und  $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$  für  $n \geq 1$ , sowie
- ii)  $\mathbb{E}[M_0^2 | \mathcal{F}_{-1}] = 1$  und  $\mathbb{E}[M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}^2 + 1$  für  $n \geq 1$

erfüllt.

**Beispiel 2.2.** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1, 1\}$  eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $X_0 \sim \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$ ,  $M_n = \sum_{i=0}^n X_i$  und  $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$ . Dann erhalten wir

$$\mathbb{E}[M_0 | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[X_0 | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[M_{n-1} + X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1} + \mathbb{E}[X_n] \\ &= M_{n-1}, \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbb{E}[M_0^2 | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[X_0^2 | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[X_0^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_{n-1} + X_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1}^2 + 2M_{n-1} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1}^2 + 2M_{n-1} \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_n^2] \\ &= M_{n-1}^2 + 1, \end{aligned}$$

somit ist  $M_n$  ein diskretes Normalmartingal.

Im folgenden Abschnitt werden wir das diskrete stochastische Integral einführen, wobei diskrete Normalmartingale die Rolle des Integranden übernehmen werden.

## 2.2 Das diskrete stochastische Integral

Wir wollen nun das diskrete Stochastische Integral einführen, welches analog zum stetigen stochastischen Integral definiert ist. Sei dazu  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein adaptierter Prozess und  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein diskretes Normalmartingal, dann ist das Stochastische Integral von  $u$  bezüglich  $M$  als

$$\int_0^\infty u dM := \sum_{k=0}^{\infty} u_k (M_k - M_{k-1})$$

definiert (vgl. [14]).

Zur Anschauung interpretieren wir  $M_n$  als den Preis einer Ware zur Zeit  $n$  und  $u_n$  als die Anzahl an Wareneinheiten in unserem Besitz. Ändert sich nun zwischen  $n - 1$  und  $n$  der Wert unserer Ware, so ändert sich auch der Wert unseres Warenkorbes, und zwar um  $u_n(M_n - M_{n-1})$  Einheiten. Die Bilanz zwischen 0 und  $n$  lässt sich also dementsprechend als  $\sum_{k=0}^n u_k(M_k - M_{k-1})$  darstellen.

Diese Definition des stochastischen Integrals wird nun noch ein wenig modifiziert, dazu konstruieren wir mithilfe eines diskreten Normalmartingals  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt einen weiteren stochastischen Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$X_0 = M_0 \text{ and } X_n = M_n - M_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Für die beiden ersten bedingten Momente erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = M_n - M_{n-1} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[M_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - 2M_{n-1}\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[M_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M_{n-1}^2 + 1 - 2M_{n-1} + M_{n-1}^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Per Konstruktion ist der Prozess  $(X_0, \dots, X_n)_{n \geq 0}$  also ein diskretes Normalmartingal und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kann als Störungsgröße angesehen werden. Im folgenden stellen wir folgende Annahmen an unseren Ausgangsprozess  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

**Annahme 2.3.** *Wir machen die Annahme, dass der Prozess  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :*

*i) bedingt zentriert ist:*

$$\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.1}$$

*ii) und die bedingte quadratische Abweichung erfüllt:*

$$\mathbb{E}[Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = 1, \quad n \geq 0. \tag{2.2}$$

Mithilfe von  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ergibt sich nun eine weitere Definition des stochastischen Integrals, welche wir von nun an nutzen werden.

**Definition 2.4.** Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig beschränkte Folge von Zufallsvariablen mit endlichem Träger in  $\mathbb{N}$ , das heißt es existiert ein  $N \geq 0$ , sodass  $u_k = 0$  für alle  $k \geq N$ . Dann ist das stochastische Integral  $J(u)$  von  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definiert als

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k.$$

Man erkennt schnell, dass der stochastische Integraloperator linear ist, durch nachrechnen kommen wir auf

$$J(a \cdot u + b \cdot v) = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot u_k + b \cdot v_k) Y_k = a \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k + b \sum_{k=0}^{\infty} v_k Y_k = a \cdot J(u) + b \cdot J(v),$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig beschränkte Folgen von Zufallsvariablen mit endlichem Träger in  $\mathbb{N}$ .

Im Folgenden wollen wir den Begriff des diskreten stochastischen Integrals erweitern und einige Eigenschaften beweisen, die im Verlauf dieser Arbeit von äußerster Wichtigkeit sind. Folgender Satz kann als diskrete Version der Itô Isometrie angesehen werden, dazu sei daran erinnert, dass eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen  $\mathcal{F}_n$ -vorhersehbar ist, wenn  $u_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 2.5.** *Seien  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  quadratintegrierbarere, vorhersehbare Prozesse. Dann erweitert sich der stochastische Integraloperator  $J$  über die (bedingte) Isometrieformel zu*

$$\mathbb{E}[J(\mathbb{1}_{[n,\infty)}u)J(\mathbb{1}_{[n,\infty)}v)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\langle \mathbb{1}_{[n,\infty)}u, \mathbb{1}_{[n,\infty)}v \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} | \mathcal{F}_{n-1}], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

*Beweis:* Wir werden die Behauptung erst für beschränkte, vorhersehbare Prozesse, mit endlichem Träger in  $\mathbb{N}$ , zeigen und danach die Aussage auf quadratintegrierbare Prozesse in  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  erweitern.

Seien also  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte, vorhersehbare Prozesse mit endlichem Träger in  $\mathbb{N}$ , dann gilt  $u_k Y_k v_l$  ist für  $0 \leq k < l$   $\mathcal{F}_{l-1}$ -messbar, sowie  $u_k Y_l v_l$  ist  $\mathcal{F}_{k-1}$ -messbar für  $0 \leq l < k$ . Aus den Eigenschaften der bedingten Erwartung und Aufgrund unserer Annahmen an  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  folgt damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J(\mathbb{1}_{[n,\infty)}u)J(\mathbb{1}_{[n,\infty)}v)|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{\infty} u_k Y_k \sum_{l=n}^{\infty} v_l Y_l | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=n}^{\infty} u_k Y_k v_l Y_l | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{\infty} u_k v_k Y_k^2 + \sum_{n \leq k < l} u_k Y_k v_l Y_l + \sum_{n \leq l < k} u_k Y_k v_l Y_l | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_k v_k Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] + \sum_{n \leq k < l} \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_k Y_k v_l Y_l | \mathcal{F}_{l-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\quad + \sum_{n \leq l < k} \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_k Y_k v_l Y_l | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_{n-1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n} \mathbb{E}[u_k v_k \underbrace{\mathbb{E}[Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=1} | \mathcal{F}_{n-1}] + \sum_{n \leq k < l} \mathbb{E}[u_k Y_k v_l \underbrace{\mathbb{E}[Y_l | \mathcal{F}_{l-1}]}_{=0} | \mathcal{F}_{n-1}] \\
&+ \sum_{n \leq l < k} \mathbb{E}[u_k Y_l v_l \underbrace{\mathbb{E}[Y_k | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=0} | \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}[u_k v_k | \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=n}^{\infty} u_k v_k | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \langle \mathbb{1}_{[n, \infty)} u, \mathbb{1}_{[n, \infty)} v \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} | \mathcal{F}_{n-1} \right],
\end{aligned}$$

was die Aussage (2.3) für beschränkte, vorhersehbare Prozesse mit endlichem Träger in  $\mathbb{N}$  zeigt. Mittels eines Cauchyfolgen-Arguments kann man nun die Erweiterung zu  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  zeigen. Sei dazu  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte, vorhersehbare Folge mit endlichem Träger, die gegen  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  konvergiert, sie könnte z.B. von der Form

$$u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}} = (u_k \mathbb{1}_{\{0 \leq k < n\}} \mathbb{1}_{\{|u_k| \leq n\}})_{k \in \mathbb{N}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sein. Wir wollen nun zeigen, dass die Folge  $(J(u^n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, in diesem Fall konvergiert sie auch in  $L^2(\Omega)$ .

Da  $u^n$  gegen  $u$  in  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  konvergiert, ist  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchyfolge, d.h. es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\|u^m - u^n\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})} \leq \epsilon$$

für alle  $m, n \geq N$ . Somit folgt unter Anwendung von (2.3) für beschränkte, vorhersehbare Prozesse mit endlichem Träger

$$\|J(u^m) - J(u^n)\|_{L^2(\Omega)} = \|u^m - u^n\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})} \leq \epsilon$$

für alle  $m, n \geq N$ . Daraus folgt, dass  $(J(u^n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist und somit in  $L^2(\Omega)$  konvergiert. Somit können wir

$$J(u) := \lim_{k \rightarrow \infty} J(u^k)$$

definieren. Analog gelten diese Überlegungen auch für  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und somit ist (2.3) für  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  gezeigt, da der Limes offensichtlich nicht von den Folgen  $(u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(v_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$  abhängt.  $\square$

Für  $n = 0$  erhalten wir dementsprechend die unbedingte Version

$$\mathbb{E}[J(u)J(v)] = \mathbb{E}[\langle u, v \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}],$$

für alle quadratintegrierbaren, vorhersehbaren Prozesse  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Dies ist das gleiche Ergebnis, welches bereits im stetigen Modell gilt. Eine Anwendung der Itô Isometrie findet sich unter Anderem in der Berechnung der Varianzen für stochastische Integrale. Betrachte das stochastische Integral  $J(u)$  als Zufallsvariable, dann berechnet sich das zweite Moment mittels der Itô Isometrie zu

$$\mathbb{E}[J(u)^2] = \mathbb{E}[\langle u, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[u_k^2].$$

**Beispiel 2.6.** Sei  $u_k = \mathbb{1}_{[1, N]}(k)Y_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$ , wir wollen nun die Varianz des stochastischen Integrals  $J(u)$  berechnen. Unter Anwendung der Itô Isometrie (2.3) und der Annahme (2.1) ergibt sich diese als

$$\begin{aligned} \text{Var}(J(u)) &= \mathbb{E}[J(u)^2] - \mathbb{E}[J(u)]^2 \\ &= \mathbb{E}[\langle u, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] - \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[1, N]}(k)Y_{k-1}Y_k\right]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{[1, N]}(k)Y_{k-1})^2] - \left(\sum_{k=1}^N \mathbb{E}[Y_{k-1} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=0}]\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\mathbb{E}[Y_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-2}]}_{=1} \\ &= N. \end{aligned}$$

Die Aussagen der folgenden zwei Sätze sind ebenfalls auf den stetigen Fall zurückzuführen.

**Satz 2.7.** Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  ein vorhersehbarer, quadratintegrierbarer Prozess. Dann gilt

$$\mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_k] = J(u \mathbb{1}_{[0, k]}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Beweis:* Durch einfaches Nachrechnen erhält man

$$\mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} u_i Y_i | \mathcal{F}_k\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k \mathbb{E}[u_i Y_i | \mathcal{F}_k] + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}[u_i Y_i | \mathcal{F}_k] \\
&= \sum_{i=0}^k u_i Y_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_i Y_i | \mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_k] \\
&= \sum_{i=0}^k u_i Y_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}[u_i \underbrace{\mathbb{E}[Y_i | \mathcal{F}_{i-1}]}_{=0} | \mathcal{F}_k] \\
&= \sum_{i=0}^k u_i Y_i \\
&= J(u \mathbb{1}_{[0,k]}),
\end{aligned}$$

und hat damit den Satz bewiesen. □

Aus Satz 2.7 können wir somit schlussfolgern, dass das diskrete stochastische Integral  $J(u)$  eine zentrierte Zufallsvariable ist. Wir erhalten nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[J(u)] &= \mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_0] | \mathcal{F}_{-1}] = \mathbb{E}[J(u \mathbb{1}_{\{0\}}) | \mathcal{F}_{-1}] \\
&= \mathbb{E}[u_0 Y_0 | \mathcal{F}_{-1}] \\
&= u_0 \underbrace{\mathbb{E}[Y_0 | \mathcal{F}_{-1}]}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin schlussfolgern wir aus Satz 2.7, dass  $(J(u \mathbb{1}_{[0,k]}))_{k \in \mathbb{N}}$  ein Martingal ist.

**Satz 2.8.** *In Bezug auf  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq -1}$  ist das unbestimmte stochastische Integral  $(J(u \mathbb{1}_{[0,k]}))_{k \in \mathbb{N}}$  ein diskretes Martingal.*

*Beweis:* Die Martingaleigenschaft lässt sich unter Anwendung von Satz 2.7 nachvollziehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[J(u \mathbb{1}_{[0,k+1]}) | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_{k+1}] | \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[J(u) | \mathcal{F}_k] \\
&= J(u \mathbb{1}_{[0,k]}),
\end{aligned}$$

somit ist  $(J(u \mathbb{1}_{[0,k]}))_{k \in \mathbb{N}}$  ein diskretes Martingal. □

Im späteren Beispiel 3.1 werden wir uns mit so einem Martingal beschäftigen und verschiedene Realisationen simulieren. Im folgenden Abschnitt wollen wir den Begriff des multiplen diskreten stochastischen Integrals einführen, unsere Annahme (2.1) und (2.2) an  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bleibt dabei wie auch im Weiteren Verlauf der Arbeit erhalten.

## 2.3 Das multiple diskrete stochastische Integral

Wir wollen nun das multiple diskrete stochastische Integral einführen, zunächst werden wir dies nur für symmetrische Funktionen definieren, am Ende des Abschnittes wird der Begriff des Integrals allerdings auch auf nicht symmetrische Funktionen erweitert.

**Definition 2.9.** Sei  $\ell^2(\mathbb{N})^{\circ n} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}^n)$  der Raum der Funktionen aus  $\ell^2(\mathbb{N}^n)$ , die symmetrisch in  $n$  Variablen sind. Eine Funktion  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  erfüllt also

$$f_n(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)}) = f_n(k_1, \dots, k_n), \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$$

für alle Permutationen  $\sigma$  von  $\{1, \dots, n\}$ .

Wir wollen nun das multiple diskrete stochastische Integral einführen, welches wir als  $J_n(f_n)$  notieren. Dazu identifizieren wir  $\ell^2(\mathbb{N})^{\circ 0}$  als  $\mathbb{R}$ , also gilt  $J_0(f_0) = f_0$  mit  $f_0 \in \mathbb{R}$ . Für  $f_1 \in \ell^2(\mathbb{N})$  setzen wir

$$J_1(f_1) = J(f_1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) Y_k,$$

was aus Definition 2.4 für einfache diskrete stochastische Integrale übernommen wurde. Die folgende Definition führt nun den Begriff des multiplen stochastischen Integrals ein.

**Definition 2.10.** Für  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  ist das multiple diskrete stochastische Integral  $J_n(f_n)$  rekursiv definiert:

$$J_n(f_n) = n \sum_{k=0}^{\infty} Y_k J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*)), \quad n \geq 1,$$

dabei ist  $f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*)$  definiert als

$$(i_1, \dots, i_{n-1}) \mapsto f_n(i_1, \dots, i_{n-1}, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]}(i_1) \cdots \mathbb{1}_{[0, k-1]}(i_{n-1}).$$

Im folgenden Satz wird nun eine weitere, äquivalente Darstellung des multiplen stochastischen Integrals gegeben, dafür definieren wir

$$\Delta_n = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n : k_i \neq k_j, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

**Satz 2.11.** Für das multiple diskrete stochastische Integral  $J_n(f_n)$  von  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  gilt

$$J_n(f_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} f_n(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n}. \quad (2.4)$$

*Beweis:* Aufgrund der Symmetrie von  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  lässt sich (2.4) umschreiben zu

$$J_n(f_n) = n! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} f_n(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n}. \quad (2.5)$$

Unter Anwendung von (2.5) wollen wir nun mittels Induktion über  $n$  den Satz beweisen.

**Induktionsanfang :  $n = 1$**

Für den Fall  $n = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} J_1(f_1) &= 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Y_k J_0(f_1(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^0}(*)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f_1(k) \\ &= \sum_{i_1 \in \Delta_1} f_1(i_1) Y_{i_1}, \end{aligned}$$

womit der Fall  $n = 1$  bewiesen wäre. Kommen wir nun zum

**Induktionsschluss :  $n \mapsto n + 1$**

Unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung und (2.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} J_{n+1}(f_{n+1}) &= (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} Y_k J_n(f_{n+1}(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^n}(*)) \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} Y_k \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} f_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^n}(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} \\ &= (n+1)! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^n}(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_k, \end{aligned}$$

beachtet man nun, dass  $\mathbb{1}_{[0, k-1]^n} = 0$  für  $k \leq n-1 \leq i_n$  bekommt man

$$\begin{aligned} J_{n+1}(f_{n+1}) &= (n+1)! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^n}(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_k \\ &= (n+1)! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} \sum_{k=i_n+1}^{\infty} f_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_k \\ &= (n+1)! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n < k} f_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_k \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \Delta_{n+1}} f_n(i_1, \dots, i_{n+1}) Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n+1}}, \end{aligned}$$

somit ist (1.4) bewiesen. □

**Bemerkung 2.12.** Leitz-Martini hat in [10] die Walsh Zerlegung von Zufallsvariablen auf  $\Lambda = \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$  (diskrete Version des Intervalls  $[0,1]$ ) eingeführt, diese ist vergleichbar mit  $\sum_{n=0}^N J_n(f_n)$ , den stochastischen Integralen aus Satz 2.9.

Analog zu Satz 2.5 wird nun eine diskrete Version der Isometrie für multiple diskrete stochastische Integrale vorgestellt.

**Satz 2.13.** *Das multiple diskrete stochastische Integral  $J_n(f_n)$  von  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\text{on}}$  erfüllt folgende Isometrieformel:*

$$\mathbb{E}[J_n(f_n)J_m(g_m)] = \begin{cases} n! \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n, g_m \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)} & \text{falls } n = m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Zunächst werden wir zeigen, dass für  $0 \leq i_1 < \dots < i_n$  und  $0 \leq j_1 < \dots < j_n$

$$\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_n}] = \mathbb{1}_{\{i_1=j_1, \dots, i_n=j_n\}}. \quad (2.6)$$

Dafür nehme an, dass es ein  $i_l \neq j_l$  gibt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $(i_l, j_l)$  nun das größte dieser Paare und es gilt  $i_l < j_l$ . Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_n}] &= \mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_l} Y_{j_1} \cdots Y_{j_{l-1}} \mathbb{E}[Y_{j_l} Y_{j_{l+1}}^2 \cdots Y_{j_n}^2 | \mathcal{F}_{j_{l-1}}]] \\ &= \mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_l} Y_{j_1} \cdots Y_{j_{l-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_{j_l} \mathbb{E}[Y_{j_{l+1}}^2 \mathbb{E}[\cdots \mathbb{E}[Y_{j_n}^2 | \mathcal{F}_{j_{n-1}}] \cdots] | \mathcal{F}_{j_{l+1}-1}] | \mathcal{F}_{j_{l-1}}]}_{=1}]] \\ &= \mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_l} Y_{j_1} \cdots Y_{j_{l-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_{j_l} | \mathcal{F}_{j_{l-1}}]}_{=0}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

gilt allerdings  $i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_n}] &= \mathbb{E}[Y_{j_1}^2 \cdots Y_{j_n}^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{j_1}^2 \mathbb{E}[\cdots \mathbb{E}[Y_{j_n}^2 | \mathcal{F}_{j_{n-1}}] \cdots] | \mathcal{F}_{j_1-1}]] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sei nun  $m \neq n$ , dann gibt es offensichtlich ein  $i_l \neq j_l$  für  $(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n$  und  $(j_1, \dots, j_m) \in \Delta_m$ , somit folgt

$$\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_m}] = 0.$$

Also erhalten wir letztendlich unter Anwendung von (2.5) und (2.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J_n(f_n)J_m(g_m)] &= n!m! \mathbb{E} \left[ \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n} f_n(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} \sum_{0 \leq j_1 < \cdots < j_m} g_m(j_1, \dots, j_m) Y_{j_1} \cdots Y_{j_m} \right] \\ &= n!m! \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n, 0 \leq j_1 < \cdots < j_m} f_n(i_1, \dots, i_n) g_m(j_1, \dots, j_m) \underbrace{\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_m}]}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J_n(f_n)J_n(g_n)] &= (n!)^2 \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n, 0 \leq j_1 < \cdots < j_n} f_n(i_1, \dots, i_n) g_n(j_1, \dots, j_n) \underbrace{\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_{j_1} \cdots Y_{j_n}]}_{=\mathbb{1}_{\{i_1=j_1, \dots, i_n=j_n\}}} \\ &= (n!)^2 \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n} f_n(i_1, \dots, i_n) g_n(i_1, \dots, i_n) \\ &= n! \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} f_n(i_1, \dots, i_n) g_n(i_1, \dots, i_n) \\ &= n! \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n, g_n \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)}, \end{aligned}$$

womit die Isometrieformel bewiesen wäre. □

Zum Schluß dieses Abschnittes möchten wir zeigen, dass es sich bei  $(J_n(f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n}))_{n \in \mathbb{N}}$  um ein Martingal handelt. Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie bei dem einfachen stochastischen Integral (vgl. Satz 2.7). Um dies zu zeigen beweise zuerst folgenden Satz.

**Satz 2.14.** *Für alle  $n \geq 1$  und  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{on}$  erhalten wir*

$$\mathbb{E}[J_n(f_n) | \mathcal{F}_k] = J_n(f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Beweis:* Wir zeigen die Behauptung per Induktion über  $n$ . Dabei gilt der Fall  $n = 1$  nach Satz 2.8, also erhalten wir im

**Induktionsschritt :  $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n} + \mathbf{1}$**

$$\mathbb{E}[J_{n+1}(f_{n+1}) | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[(n+1) \sum_{i=0}^{\infty} Y_i J_n(f_{n+1}(*, i) \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) | \mathcal{F}_k]$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \sum_{i=0}^k Y_i \mathbb{E}[J_n(f_{n+1}(*, i) \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) | \mathcal{F}_k] \\
&+ (n+1) \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_i J_n(f_{n+1}(*, i) \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) | \mathcal{F}_k] \\
&= (n+1) \sum_{i=0}^k Y_i J_n(f_{n+1}(*, i) \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) \mathbb{1}_{[0, k]^{n+1}}(*, i) \\
&+ (n+1) \sum_{i=k+1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[J_n(f_{n+1}(*, i) \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) | \mathcal{F}_{i-1}]}_{\in \mathcal{F}_{i-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_i | \mathcal{F}_{i-1}]}_{=0} | \mathcal{F}_k \\
&= (n+1) \sum_{i=0}^{\infty} Y_i J_n(f_{n+1}(*, i) \underbrace{\mathbb{1}_{[0, k]^{n+1}}(*, i)}_{=0 \text{ für } i > k} \mathbb{1}_{[0, i-1]^n}(*)) \\
&= J_{n+1}(f_{n+1} \mathbb{1}_{[0, k]^{n+1}}).
\end{aligned}$$

□

Daraus können wir schlussfolgern, dass es sich auch bei dem multiplen diskreten stochastischen Integral wegen

$$\mathbb{E}[J_n(f_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[J_n(f_n) | \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[J_n(f_n) \mathbb{1}_{[0, 0]^n}] = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.7)$$

um eine zentrierte Zufallsvariable handelt. Die Martingaleigenschaft folgt ebenso aus Satz 2.14.

**Satz 2.15.** *In Bezug auf  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq -1}$  ist das unbestimmte multiple stochastische Integral  $(J_n(f_n \mathbb{1}_{[0, k]^n}))_{k \in \mathbb{N}}$  ein diskretes Martingal.*

*Beweis:* Durch einfaches Nachrechnen und unter Benutzung von Satz 2.14 kann man die Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[J_n(f_n \mathbb{1}_{[0, k+1]^n}) | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[J_n(f_n) | \mathcal{F}_{k+1}] | \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[J_n(f_n) | \mathcal{F}_k] \\
&= J_n(f_n \mathbb{1}_{[0, k]^n})
\end{aligned}$$

zeigen. Somit ist  $(J_n(f_n \mathbb{1}_{[0, k]^n}))_{k \in \mathbb{N}}$  ein diskretes stochastisches Martingal bezüglich  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Eine Analyse eines solchen Prozesses wird in Beispiel 3.2 vorgestellt und verschiedene Trajektorien simuliert. Bisher haben wir das multiple diskrete stochastische Integral  $J_n(f_n)$  nur für symmetrische Funktionen  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{on}$  definiert, allerdings kann man es

auch für alle Funktionen  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N}^n)$  angeben. Für nicht symmetrische Funktionen  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N}^n)$  ist die Symmetrisierung  $\tilde{f}_n$  zu

$$\tilde{f}_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}), \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}^n, \quad (2.8)$$

und das multiple diskrete stochastische Integral als

$$J_n(f_n) = J_n(\tilde{f}_n)$$

definiert. Im folgenden Kapitel werden wir den Begriff des stochastischen Integrals für unsere Bedürfnisse noch etwas konkretisieren, indem wir uns etwas genauer mit dem Prozess  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschäftigen, welcher als Integrator für unser diskretes Integral dient. Dabei wird  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit einem Bernoulliprozess in Verbindung gebracht, welcher den Prozess vollkommen bestimmt.

## 3 Die Rolle des Bernoulliprozesses

### 3.1 Diskrete Strukturgleichung

In diesem Kapitel gehen wir noch ein wenig genauer auf unseren Integratorprozess  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein, welcher bis bisher nur Annahme (2.1) und (2.2) erfüllen musste. An diesem Punkt knüpfen wir an und werden weitere Bedingungen an  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  stellen, um ein konkreteres Objekt zu erhalten. Dabei wird ein Bernoulliprozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine entscheidende Rolle spielen und mit  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Beziehung gebracht. Aufbauend darauf stellen wir danach ein paar Beispiele und Simulationen vor, die auf diesem präzisierten Prozess  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  basieren.

Von nun an nehmen wir an, dass, gegeben  $\mathcal{F}_{n-1}$ ,  $Y_n$  genau 2 Werte annehmen kann. Demzufolge muss  $Y_n$  die quadratische Gleichung

$$Y_n^2 = \Phi_n(Y_0, \dots, Y_{n-1}) + \varphi_n(Y_0, \dots, Y_{n-1})Y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

für  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathcal{F}_n$ -vorhersehbar, erfüllen. Wegen Bedingung (2.1) und (2.2) muss  $\Phi_n$  identisch 1 sein, also erhalten wir

$$Y_n^2 = 1 + \varphi_n Y_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

welche wir die diskrete Strukturgleichung nennen. Die Lösung von (3.1) ist gegeben durch

$$Y_n = \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1},$$

und somit existiert ein  $\mathcal{F}_n$ -adaptierter Bernoulliprozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Werten in  $\{-1, 1\}$ , sodass wir

$$Y_n = \frac{\varphi}{2} + X_n \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1}$$

erhalten. Seien nun

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}) \text{ und } q_n = \mathbb{P}(X_n = -1 | \mathcal{F}_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

dann erhalten wir für den bedingten Erwartungswert

$$0 = \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] = p_n \left( \frac{\varphi}{2} + 1 \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1} \right) + q_n \left( \frac{\varphi}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + 1} \right),$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= - \frac{\frac{\varphi_n}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_n}{2}\right)^2}}{\frac{\varphi_n}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_n}{2}\right)^2}} = - \frac{\varphi_n - \sqrt{4 + \varphi_n^2}}{\varphi_n + \sqrt{4 + \varphi_n^2}} = \frac{1}{4} \left( \underbrace{\varphi_n - \sqrt{4 + \varphi_n^2}}_{<0} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{p_n}{q_n}} = -\frac{1}{2} \left( \varphi_n - \sqrt{4 + \varphi_n^2} \right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{p_n}{q_n}} + \frac{\varphi_n}{2} = \underbrace{\frac{\sqrt{4 + \varphi_n^2}}{2}}_{>0} \\ &\Leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} + \frac{\varphi_n^2}{4} + \varphi_n \sqrt{\frac{p_n}{q_n}} = \frac{4 + \varphi_n^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \varphi_n = \frac{q_n - p_n}{p_n} \sqrt{\frac{q_n}{p_n}} = \frac{q_n - p_n}{\sqrt{q_n p_n}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nach einsetzen von  $\varphi_n$  erhalten wir letztendlich für  $Y_n$ :

$$\begin{aligned}
Y_n &= \frac{\varphi_n}{2} + X_n \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_n}{2}\right)^2} \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \left( \frac{q_n - p_n}{2\sqrt{q_n p_n}} + \sqrt{1 + \frac{(q_n - p_n)^2}{4p_n q_n}} \right) + \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \left( \frac{q_n - p_n}{2\sqrt{q_n p_n}} - \sqrt{1 + \frac{(q_n - p_n)^2}{4p_n q_n}} \right) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \left( \frac{q_n - p_n + \sqrt{(q_n + p_n)^2}}{2\sqrt{p_n q_n}} \right) + \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \left( \frac{q_n - p_n - \sqrt{(q_n + p_n)^2}}{2\sqrt{p_n q_n}} \right) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \left( \frac{2q_n}{2\sqrt{p_n q_n}} \right) + \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \left( -\frac{2p_n}{2\sqrt{p_n q_n}} \right),
\end{aligned}$$

demzufolge gilt

$$Y_n = \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \sqrt{\frac{q_n}{p_n}} - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \sqrt{\frac{p_n}{q_n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Für unsere Folge  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  haben wir also eine sehr konkrete Darstellung gefunden, die allein durch einen Bernoulliprozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $p_n$  und  $q_n$  bestimmt ist.

Im folgenden Beispiel wird nun unter Verwendung von (3.4) ein stochastisches Integral unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten  $p_n$  simuliert.

**Beispiel 3.1.** Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Bernoulliprozess zu  $\{-1, 1\}$ -verteilten Zufallsvariablen wie in (3.2),  $Y_n = \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \sqrt{\frac{q_n}{p_n}} - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \sqrt{\frac{p_n}{q_n}}$  und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert als

$$u_0 = 100, \quad u_n = u_{n-1} + \mathbb{1}_{\{Y_{n-1} \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{Y_{n-1} < 0\}}, \quad n \geq 1.$$

Man könnte hierbei  $Y_n$  als die Preisschwankung einer Aktie ansehen und  $u_n$  als die Anzahl an Aktien, die man hält, wobei man zum Zeitpunkt 0 mit 100 Aktien startet und jeweils eine zum Zeitpunkt  $n$  verkauft, wenn der Aktienkurs in der Periode  $n - 1$  gefallen ist, bzw. im Fall  $Y_{n-1} \geq 0$  eine hinzuzukauf. Offensichtlich ist  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersehbarer Prozess. Wir wollen nun das stochastische Integral  $J(u \mathbb{1}_{[0, N-1]})$  in zwei Fällen simulieren, im ersten Fall gelte

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_n = \begin{cases} 1 - (1 - p_{n-1})^2 & \text{falls } Y_{n-2} < 0 \text{ und } Y_{n-1} < 0, \\ p_{n-1}^2 & \text{falls } Y_{n-2} \geq 0 \text{ und } Y_{n-1} \geq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{sonst,} \end{cases} \quad n \in \{2, \dots, N-1\},$$

und im zweiten

$$p_n = \frac{N - n}{N + 1}, \quad n \in \{0, \dots, N - 1\}.$$

In Abbildung 1 und 2 wird der Prozess  $J(u\mathbb{1}_{[0,k]})$  für  $k \in \{0, \dots, 249\}$  dargestellt. Abbildung 1 liegt dabei dem ersten Fall, Abbildung 2 dem zweiten Fall zugrunde. Es wird auch deutlich, welche wichtige Rolle die Wahl von  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spielt, die beiden Simulationen unterscheiden sich auf den ersten Blick sehr stark.

In Abbildung 1 halten sich im gesamten Intervall die Anzahl von Sprüngen nach oben und unten in etwa die Waage, auch die Sprunghöhe variiert wenig, da sie von  $p_n$  bestimmt wird. Allerdings erkennt man, dass nach einigen Sprüngen in die gleiche Richtung die Sprunghöhe größer wird, welches der Konstruktion der  $p_n$  zu verdanken ist. Man erkennt dagegen auf Abbildung 2, dass die Sprungrichtung und die Sprunghöhe sehr stark variieren über das Intervall. In den ersten 50 Zeitschritten ist  $p_n$  sehr groß, und damit finden sehr oft Sprünge von geringer Höhe nach oben statt, allerdings haben die seltenen Sprünge nach unten auch eine sehr hohe Gewichtung. Dies ist in den letzten 50 Zeitschritten allerdings genau umgekehrt, da  $p_n$  dort sehr klein ist. Zwischen diesen Extremen verhält sich der Prozess in etwa so wie in Abbildung 1.

In beiden Abbildungen lässt sich auch ein Martingaltypisches Verhalten des Prozesses  $J(u\mathbb{1}_{[0,k]})$  erkennen, das es sich bei  $J(u\mathbb{1}_{[0,k]})$  um ein Martingal handelt, haben wir bereits in Satz 2.8 gezeigt.

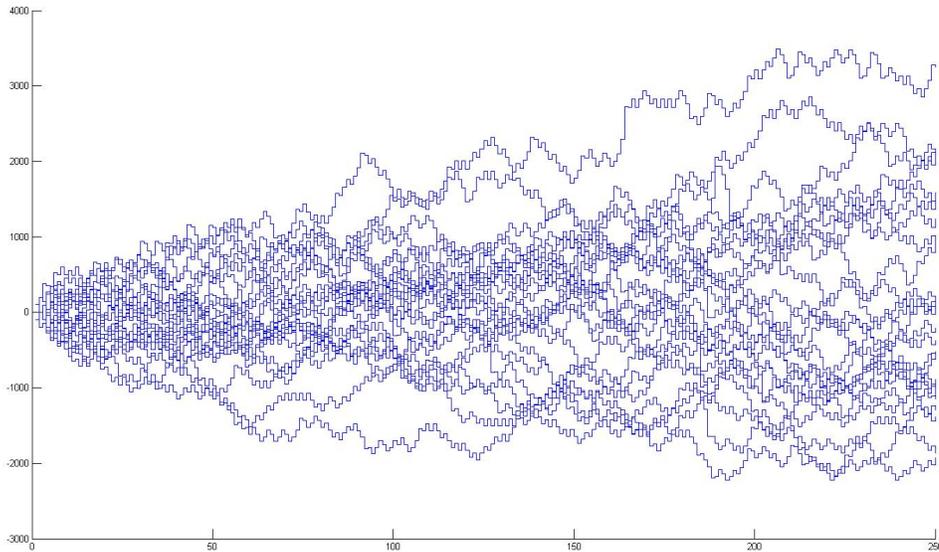


Abbildung 1: Folge  $J(u\mathbb{1}_{[0,k]})$  für  $k \in \{0, \dots, 249\}$  für Fall 1.

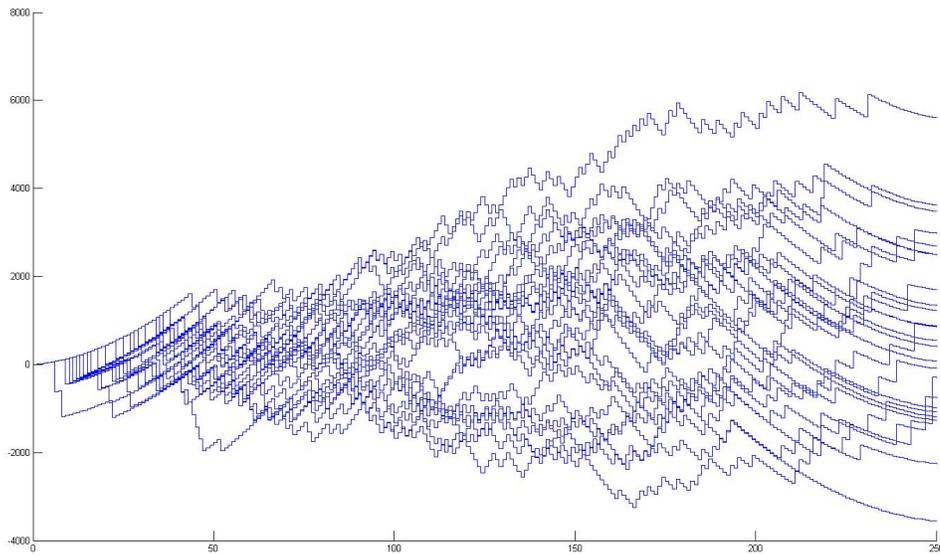


Abbildung 2: Folge  $J(u\mathbb{1}_{[0,k]})$  für  $k \in \{0, \dots, 249\}$  für Fall 2.

In Abbildung 3 und 4 ist jeweils ein Histogramm für  $J(u\mathbb{1}_{[0,249]})$  zu je 100000 Simulationen dargestellt. Diese Größen entsprechen 100000 Werten von Prozessen wie in Abbildung 1 bzw. 2, zur Zeit 249. Es lässt sich deutlich erkennen, dass  $J(u\mathbb{1}_{[0,249]})$  eine zentrierte Zufallsvariable ist, zudem ist sie auch symmetrisch, was bei stochastischen Integralen nicht unbedingt gelten muss, wie wir es später in Beispiel 3.2 noch sehen werden.

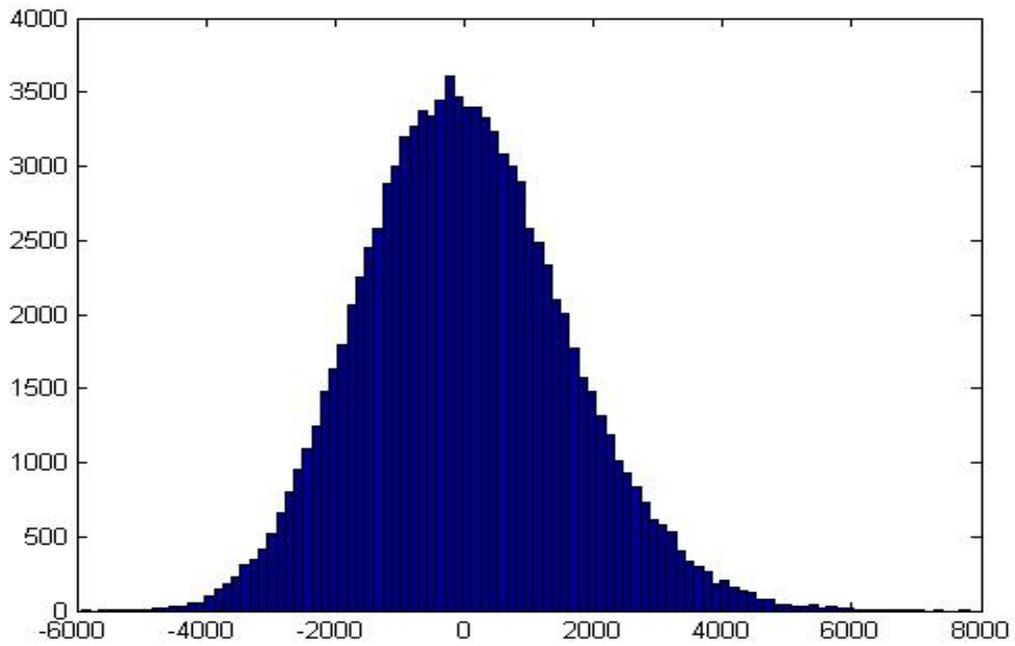


Abbildung 3: Histogramm für  $J(u1_{[0,249]})$  für Fall 1 für 100000 Simulationen.

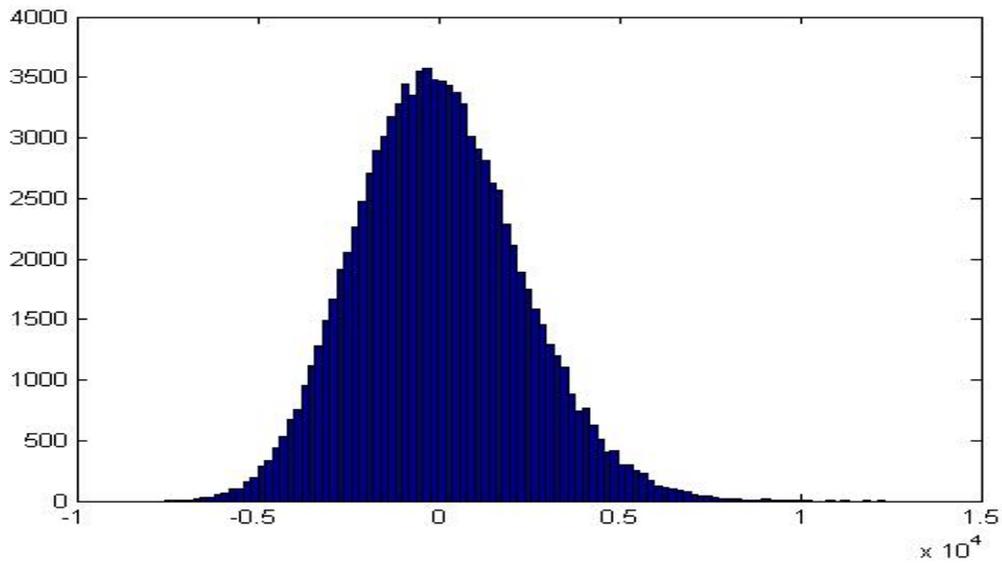


Abbildung 4: Histogramm für  $J(u1_{[0,249]})$  für Fall 2 für 100000 Simulationen.

Durch die Darstellung von  $Y_n$  durch einen Bernoulliprozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erhalten wir also eine sehr genaue Vorstellung von dem Verhalten unseres Integranden  $Y_n$ . Sei nun

$$Z_n = \frac{X_n + 1}{2} \in \{0, 1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

dann können wir (3.4) auch umschreiben zu

$$\begin{aligned} Y_n &= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} \sqrt{\frac{q_n}{p_n}} - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} \sqrt{\frac{p_n}{q_n}} \\ &= \frac{\mathbb{1}_{\{X_n=1\}} q_n - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} p_n}{\sqrt{p_n q_n}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{q_n - p_n + X_n}{\sqrt{p_n q_n}} \\ &= \frac{Z_n - p_n}{\sqrt{p_n q_n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wir bekommen also eine weitere Darstellung von  $Y_n$  mittels eines weiteren Bernoulliprozesses, welcher aus  $\{0, 1\}$ -verteilten Zufallsgrößen besteht. Für unsere  $\sigma$ -Algebra gilt letztendlich

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n) = \sigma(X_0, \dots, X_n) = \sigma(Z_0, \dots, Z_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

dies lässt sich leicht an (3.4) und (3.6) erkennen.

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, wie ein Bernoulliprozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie in (3.5) konstruiert werden kann. Dafür wählen wir  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  und betrachten  $Z_n$  als die kanonische Projektion auf  $\Omega$ . Dazu stellen wir uns die Zufallsvariablen  $\{Z_n : n \geq 1\}$  als die Koeffizienten der dyadischen Expansion der Zufallszahl

$$Z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} Z_n(\omega) \in [0, 1]$$

vor. Betrachtet man diese Darstellung etwas genauer, so lässt sich schnell erkennen, dass  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwar eindeutig  $Z$  charakterisiert, es umgekehrt aber nicht der Fall ist. So kann z.B. die Zahl  $\frac{1}{2}$  dargestellt werden als

$$\frac{1}{2} = 0.1000\dots, \quad \text{beziehungsweise als } \frac{1}{2} = 0.0111\dots,$$

wobei im ersten Beispiel  $Z_0 = 1$  und  $Z_i = 0$  für  $i \neq 0$  und im zweiten genau umgekehrt, da

$$\sum_{i=0}^0 \frac{1}{2^{i+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ als auch } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \cdot 1 = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Um dieses Problem der nicht eindeutigen Darstellung zu beheben, einigen wir uns darauf, dass die Koeffizienten  $Z_i$  so bestimmt sind, dass

$$0 \geq Z - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n+1} Z_n < 2^{-(m+1)} \text{ für alle } m \geq 0. \quad (3.7)$$

Im oben genannten Beispiel für die Darstellung von  $\frac{1}{2}$  würden die Koeffizienten dementsprechend auf die erste Weise bestimmt werden. Hat man nun also den Wert einer Zufallsvariable  $Z(\omega) \in [0, 1]$  gegeben, so können wir die Zufallsvariablen  $Z_n$ , also unseren Bernoulliprozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , auf folgende Weise eindeutig bestimmen:

$$Z_0 = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq Z < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq Z < 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$Z_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq Z - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^{i+1}} Z_i < \frac{1}{2^{n+1}}, \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2^{n+1}} \leq Z - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^{i+1}} Z_i < \frac{1}{2^n}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Grafisch kann man sich das folgendermaßen vorstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} \left[ \right. & & Z_0 = 0 & & \left. \right) & \left[ \right. & Z_0 = 1 & & \left. \right) \\ 0 & & & & \frac{1}{2} & & & & 1 \\ \left[ \right. & Z_0 = 0, Z_1 = 0 & \left. \right) & \left[ \right. & Z_0 = 0, Z_1 = 1 & \left. \right) & \left[ \right. & Z_0 = 1, Z_1 = 0 & \left. \right) & \left[ \right. & Z_0 = 1, Z_1 = 1 & \left. \right) \\ 0 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & 1 \end{array}$$

und so weiter.

Diese ganzen Betrachtungen ermöglichen es uns nun, aus einer einzigen, auf  $[0, 1]$ -verteilten Zufallsvariable einen kompletten Bernoulliprozess zu konstruieren. Doch nun stellt sich natürlich die Frage, welche Verteilung die Zufallsvariable  $Z$  besitzen muss, um einen Bernoulliprozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu generieren, bei dem  $Z_i \sim \mathcal{B}_p$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Sei dafür  $Z \in [0, 1]$  eine Zufallsvariable, die durch den Bernoulliprozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $Z_i \sim \mathcal{B}_p$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , mittels dyadischer Expansion generiert wurde, dann ergibt sich aus (3.7)

$$\mathbb{P}_p\left(\frac{m}{2^n} \leq Z \leq \frac{m+1}{2^n}\right) = \mathbb{P}_p\left(\frac{m}{2^n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} Z_k \leq \frac{m+1}{2^n}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} Z_k = \frac{m}{2^n}\right) \\
&= \mathbb{P}_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} Z_k = m\right) \\
&= \mathbb{P}_p\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} Z_k = [i_0^m, \dots, i_{n-1}^m]_2\right) \\
&= \mathbb{P}_p(Z_0 = i_0^m, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}^m) \\
&= p^{\sum_{j=0}^{n-1} i_j^m} q^{n - \sum_{j=0}^{n-1} i_j^m}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq m < 2^n,
\end{aligned}$$

wobei  $[i_0^m, \dots, i_{n-1}^m]_2$  die Binärdarstellung der Zahl  $m$  ist und  $i_j^m \in \{0, 1\}$  für alle  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Sei nun  $t \in [0, 1]$ , dann definieren wir

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} X_k(t) \text{ und } R_n(t) = L_n(t) + \frac{1}{2^n},$$

wobei  $X_k(t)$  die Folge von Bernoulliverteilten Zufallsvariablen ist, die  $t$  dyadisch generiert. Folglicherweise gilt für  $0 \leq a \leq b < 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(a \leq Z \leq b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p(L_n(a) \leq Z \leq R_n(b)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_p\left(\frac{2^n L_n(a)}{2^n} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} Z_i \leq \frac{2^n L_n(b) + 1}{2^n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} \mathbb{P}_p\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^{i+1}} Z_i = \frac{k}{2^n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} \mathbb{P}_p\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} Z_i = [i_0^k, \dots, i_{n-1}^k]_2\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} p^{\sum_{j=0}^{n-1} i_j^k} q^{n - \sum_{j=0}^{n-1} i_j^k}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Allgemeinen so gut wie unmöglich zu berechnen, im Spezialfall  $p = q = \frac{1}{2}$  ist dies allerdings möglich. Wir erhalten

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(a \leq Z \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=0}^{n-1} i_j^k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - \sum_{j=0}^{n-1} i_j^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=2^n L_n(a)}^{2^n L_n(b)} 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (2^n L_n(b) - 2^n L_n(a) + 1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(b) - L_n(a) + \frac{1}{2^n} \\
&= b - a,
\end{aligned}$$

also das Lebesguemaß auf  $[0, 1]$ . Demzufolge generiert eine Zufallsvariable  $Z \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  mittels (3.8) und (3.9) einen kompletten Bernoulliprozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu  $p = q = \frac{1}{2}$ . Praktisch betrachtet gibt es allerdings doch einige Probleme mit der Konstruktion des Bernoulliprozesses, da jedes Simulationsprogramm eine endliche Rechengenauigkeit hat. Mit Hilfe von Matlab kann man z.B. bis zu 50 Realisierungen des Bernoulliprozesses über diese Konstruktion erzeugen.

Im folgenden Beispiel wird das multiple stochastische Integral einer Funktion  $f \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  mittels dieser Konstruktion berechnet.

**Beispiel 3.2.** Sei  $Y_k = \mathbb{1}_{\{Z_k=1\}} - \mathbb{1}_{\{Z_k=0\}}$ , wobei  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  generiert worden ist mittels (3.7) und (3.8) einer Zufallsvariable  $Z \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ , und

$$f(i, j) = \frac{i + j}{2}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen das stochastische Integral  $J_2(f_2 \mathbb{1}_{[0, N-1]})$  simulieren, aufgrund der Konstruktion des Bernoulliprozesses gilt  $p = q = \frac{1}{2}$ . Abbildung 5 zeigt einen Verlauf von 25 Prozessen  $J_2(f_2 \mathbb{1}_{[0, k]})$  für  $k \in \{0, \dots, 49\}$ , auffallend ist, dass sich im Verlauf des Prozesses die Sprunghöhe deutlich erhöht, ausschlaggebend dafür ist die Funktion  $f \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$ , welche monoton wachsend ist. Desweiteren erkennt man, dass sich ein Großteil der Prozesse knapp im negativen Bereich befindet, wohingegen wenige sehr hohe Werte annehmen. Es lässt sich also vermuten, dass die Zufallsvariable  $J_2(f_2 \mathbb{1}_{[0, 49]})$  sich anders verhält als diejenigen aus Beispiel 3.1.

Diese Vermutung wird bestätigt, wenn man Abbildung 6 betrachtet. Hier wurden die Werte von 100000 Zufallsgrößen  $J_2(f_2 \mathbb{1}_{[0, 49]})$  in einem Histogramm abgetragen. Zu erkennen ist, dass sich der Trend, der sich schon in Abbildung 5 angedeutet hat, beibehält, die größte Anzahl an Realisierungen befindet sich knapp im negativen Bereich, währenddessen man wenige Ausreißer hat, die extrem große Werte annehmen. In Abschnitt 2.3 haben wir gezeigt, dass es sich bei  $J_n(f_n)$  um eine zentrierte Zufallsvariable handelt, allerdings muss diese nicht symmetrisch sein, so wie es in Beispiel 3.1 noch der Fall war.

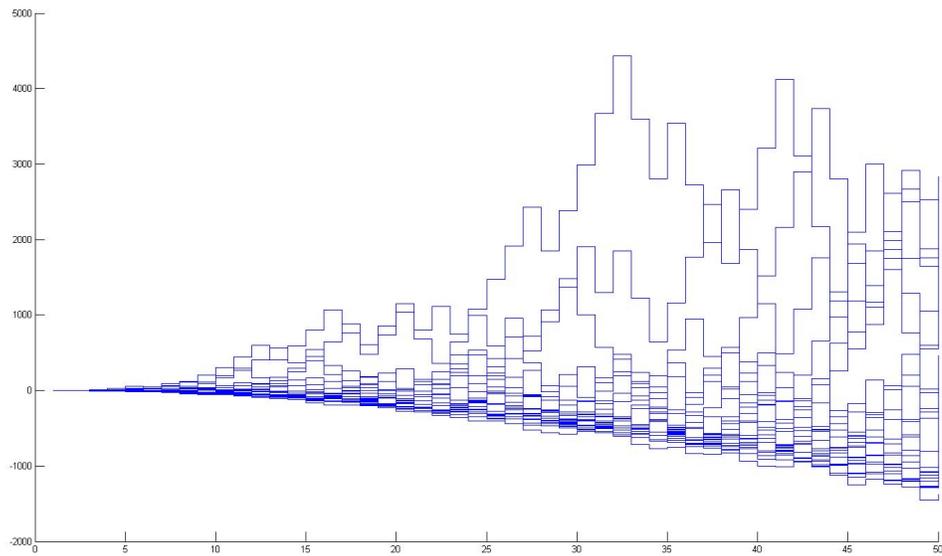


Abbildung 5: Folge  $J_2(f_2\mathbb{1}_{[0,k]})$  für  $k \in \{0, \dots, 49\}$ .

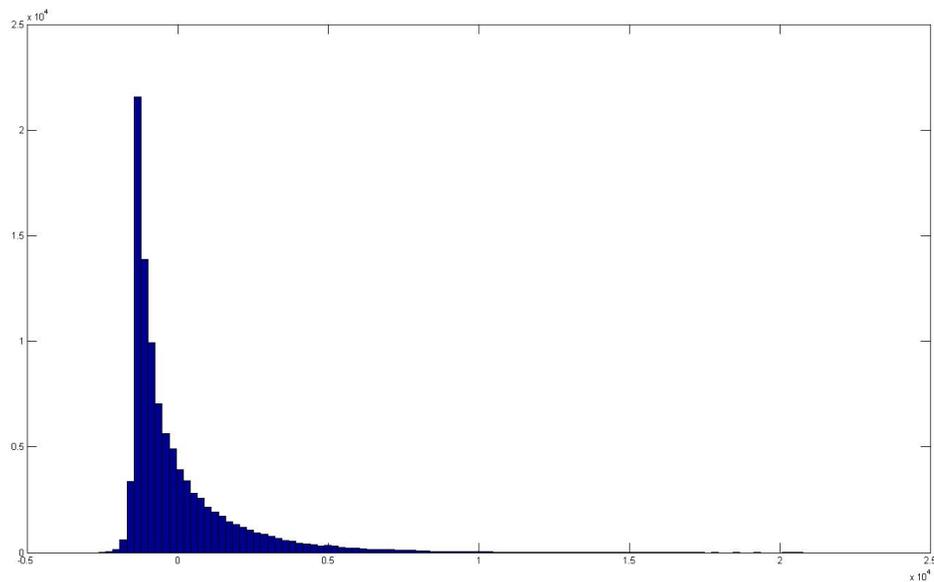


Abbildung 6: Wert von  $J_2(f_2\mathbb{1}_{[0,49]})$  nach 100000 Realisierungen.

Betrachten wir als Verdeutlichung dazu die Zufallsvariable  $J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2})$ , dann ergibt sich

$$J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2}) = 2! \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \leq 2} Y_{i_1} Y_{i_2} = 2! \underbrace{[Y_0 Y_1 + Y_0 Y_2 + Y_1 Y_2]}_{\in \{-1, 3\}} \in \{-2, 6\}, \quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2}) = 6) &= \mathbb{P}(Y_0 Y_1 + Y_0 Y_2 + Y_1 Y_2 = 3) \\ &= \mathbb{P}(\{(Y_0, Y_1, Y_2) = (1, 1, 1)\} \cup \{(Y_0, Y_1, Y_2) = (-1, -1, -1)\}) \\ &= \mathbb{P}((Y_0, Y_1, Y_2) = (1, 1, 1)) + \mathbb{P}((Y_0, Y_1, Y_2) = (-1, -1, -1)) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4}, \text{ und} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2}) = -2) = 1 - \mathbb{P}(J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2}) = 6) = \frac{3}{4}.$$

Wir erhalten also eine nicht symmetrische Zufallsvariable mit Erwartungswert 0.

Wir haben nun einige Eigenschaften und Charakteristiken von stochastischen Integralen kennen gelernt und möchten uns nun fragen, wie wir diese Erkenntnisse auf beliebige Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern können. Dies wird Thema des nächsten Kapitels sein, wir werden zeigen, dass jede beliebige Zufallsvariable  $F \in L^2(\Omega)$  durch stochastische Integrale repräsentiert werden kann, dies unterstreicht noch einmal die Wichtigkeit unserer vorangegangenen Ergebnisse, die im Laufe der Arbeit immer wieder anwendbar sind.

## 4 Repräsentationseigenschaft

### 4.1 PRP und CRP

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Darstellung von Zufallsvariablen  $F \in L(\Omega)$  mittels diskreten stochastischen Integralen beschäftigen. Wir werden zeigen, dass dies für jedes  $F \in L(\Omega)$  möglich ist, dabei werden wir zwischen vorhersehbarer- und Chaosrepräsentation unterscheiden, welche wir mit PRP (englisch: „predictable representation property“) bzw. CRP (englisch: „chaos representation property“) bezeichnen. Wir werden sehen, dass die Ergebnisse die wir erzielen werden, sich analog im stetigen Fall wiederfinden lassen. Dort hat ein Martingal  $Z$  (vgl. [14, Proposition 2.6.2]) die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft (PRP), wenn für jedes Martingal  $M$  ein vorhersehbarer,  $Z$ -integrierbarer Prozess  $H$  existiert, sodass

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dZ_s \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Eine strikt stärkere Eigenschaft ist die der Chaosrepräsentation (CRP). Sei  $Z$  ein Normalmartingal (im stetigen heißt das  $(Z_t)_{t \geq 0}$  und  $(Z_t^2 - t)_{t \geq 0}$  sind Martingale) und

$$I_n(f_n) = \int_{\{0 \leq t_1 < \dots < t_n\}} f(t_1, \dots, t_n) dZ_{t_1} \cdots dZ_{t_n}$$

die multiplen stochastischen Integrale bezüglich  $Z$ . Man sagt  $Z$  hat die CRP, falls diese Integrale zusammen mit den konstanten Funktionen dicht in  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  liegen, wobei  $\mathcal{F}$  von  $Z$  generiert ist (siehe [2]).

Es ist leicht zu sehen, dass die CRP die PRP impliziert, da jedes chaos-zerlegbare  $M \in L^2(\Omega)$  als  $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dZ_s$  dargestellt werden kann. Wenn z.B.  $M = I_n(f_n)$ , so wähle einfach

$$H_t = \int_{\{0 \leq t_1 < \dots < t_{n-1} < t\}} f(t_1, \dots, t_{n-1}, t) dZ_{t_1} \cdots dZ_{t_{n-1}}.$$

Wir wollen uns nun wieder unserem diskreten Fall widmen und zeigen, dass  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl die PRP als auch die CRP besitzt. Es sei von nun an angenommen, dass unsere Folge  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  deterministisch ist, daraus folgt für unseren Bernoulliprozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \dots, X_{i_k} = \epsilon_{i_k}) &= \underbrace{\mathbb{P}(X_{i_k} = \epsilon_{i_k} | X_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}} = \epsilon_{i_{k-1}})}_{= p_{i_k}, \text{ da } (p_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ deterministisch}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \dots, X_{i_{k-1}} = \epsilon_{i_{k-1}})}_{= \prod_{l=1}^{k-1} p_{i_l} \text{ per Induktion}} \\ &= \prod_{l=1}^k p_{i_l}, \quad \text{für alle } i_j \neq i_l, k \in \mathbb{N}, \epsilon_{i_j} \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

und daher die Unabhängigkeit der Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Annahme gelte von nun an allgemein in dieser Arbeit. Wie in Kapitel 3 wird  $X_n$  als kanonische Projektion  $X_n : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$  auf  $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  konstruiert, wobei unser Maß  $\mathbb{P}$  auf Zylindermengen durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_0, \dots, X_n) = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)) &= \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(X_k = \epsilon_k) \\ &= \prod_{k=0}^n p_k^{\frac{1+\epsilon_k}{2}} q_k^{\frac{1-\epsilon_k}{2}}, \quad \epsilon_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}\end{aligned}$$

gegeben ist. Die Folge  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nun eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen (da  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig), die gegeben ist durch (vgl. Kapitel 3)

$$Y_n = \frac{\varphi_n}{2} + X_n \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_n}{2}\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  deterministisch ist, folgt aus (3.3), dass dies auch für  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt. Wir möchten nun zeigen, dass  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die CRP besitzt, dafür sind noch einige Vorbetrachtungen nötig. Sei  $r \geq 1$ , dadurch dass  $\mathcal{F}_n$  dyadisch ist (also aus  $2^{n+1}$  Atomen besteht), hat  $L^r(\Omega, \mathcal{F}_n)$  die Dimension  $2^{n+1}$ , und die Basis

$$\begin{aligned}&\left\{ \mathbb{1}_{\{Y_0=\epsilon_0, \dots, Y_n=\epsilon_n\}} : \epsilon_i \in \left\{ \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, -\sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \right\}, i \in \{0, \dots, n\} \right\} \\ &= \left\{ \mathbb{1}_{\{X_0=\epsilon_0, \dots, X_n=\epsilon_n\}} : \epsilon_i \in \{-1, 1\}, i \in \{0, \dots, n\} \right\}.\end{aligned}$$

Ziel ist es nun eine Orthonormalbasis von  $L^r(\Omega, \mathcal{F}_n)$  zu finden, dazu betrachte (vgl. Kapitel 2.3 Symmetrisierung)

$$\begin{aligned}J_n(\tilde{\mathbb{1}}_{\{k_1, \dots, k_n\}}) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} \tilde{\mathbb{1}}_{\{k_1, \dots, k_n\}}(i_1, \dots, i_n) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} \\ &= n! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} \frac{1}{n!} \mathbb{1}_{\{\{k_1, \dots, k_n\} = \{i_1, \dots, i_n\}\}} Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} \\ &= Y_{k_1} \cdots Y_{k_n},\end{aligned}$$

und die Menge

$$\left\{ Y_{k_1} \cdots Y_{k_n} = J_n(\tilde{\mathbb{1}}_{\{k_1, \dots, k_n\}}) : 0 \leq k_1 < \dots < k_n \leq n, l \in \{0, \dots, n+1\} \right\}. \quad (4.1)$$

Da diese Menge nach (2.6) orthogonal ist und eine Mächtigkeit von  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^{n+1}$  besitzt, ist durch (4.1) eine Orthonormalbasis von  $L^r(\Omega, \mathcal{F}_n)$ .

Im Folgenden werden wir die Darstellbarkeit von  $F \in L^2(\Omega)$  bezüglich stochastischer

Integrale zeigen, zunächst betrachten wir Zufallsvariablen, die  $\mathcal{F}_n$ -messbar sind. Sei dafür  $\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{H}_n$  der Teilraum von  $L^2(\Omega)$ , der definiert ist als

$$\mathcal{H}_n = \{J_n(f_n) : f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}\}. \quad (4.2)$$

Wir nennen  $\mathcal{H}_n$  Chaos der Ordnung  $n$ . Weiterhin sei

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}_n) = \{f \in L^2(\Omega) : f \in \mathcal{F}_n\} \quad (4.3)$$

der Raum der  $\mathcal{F}_n$ -messbaren Funktionen. Folgender Satz ermöglicht uns eine erste Darstellung von  $\mathcal{F}_n$ -messbaren Funktionen bezüglich stochastischen Integralen aus  $\mathcal{H}_n$ .

**Satz 4.1.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n+1}. \quad (4.4)$$

*Beweis.* Betrachten wir den Raum  $\mathcal{H}_k \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$ , dieser besteht aus allen  $k$ -dimensionalen Integralen, die  $\mathcal{F}_n$ -messbar sind. Zunächst werden wir untersuchen, welche Elemente in diesem Raum enthalten sind. Betrachten wir also ein Element  $F = J_k(f_k) \in \mathcal{H}_k \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$ . Für dieses gilt nach Satz 2.14

$$\begin{aligned} F &= J_k(f_k) \\ &= \mathbb{E}[\underbrace{J_k(f_k)}_{\mathcal{F}_n\text{-messbar}} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= J_k(f_k \mathbb{1}_{[0,n]^k}), \end{aligned}$$

demzufolge können wir eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}_k \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$  angeben (siehe (4.1)), welche durch

$$\{Y_{i_1} \cdots Y_{i_k} = J_k(\tilde{\mathbb{1}}_{\{(i_1, \dots, i_k)\}}) : 0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

gegeben ist. Man sieht leicht, dass  $\dim(\mathcal{H}_k \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)) = \binom{n+1}{k}$  für  $1 \leq k \leq n+1$  und das  $\mathcal{H}_N \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n) = \{0\}$  für  $N > n+1$ , da in diesem Fall  $J_N(f_N \mathbb{1}_{[0,n]^N}) = 0$ . Also bekommen wir

$$\dim((\mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n+1}) \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1},$$

und somit gilt

$$L^0(\Omega, \mathcal{F}_n) = (\mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n+1}) \cap L^0(\Omega, \mathcal{F}_n),$$

womit der Satz bewiesen wäre. □

Mithilfe diesen Satzes haben wir jetzt die Frage beantwortet, wie wir eine Zufallsvariable  $F \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$  mittels stochastischer Integrale darstellen können. Nach Satz 4.1 gibt es eine eindeutige Darstellung

$$F = \sum_{k=0}^{n+1} J_k(f_k \mathbb{1}_{[0,n]^k}),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n+1} J_k(f_k \mathbb{1}_{[0,n]^k})\right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[J_0(f_0 \mathbb{1}_{[0,n]^0})]}_{=J_0(f_0 \mathbb{1}_{[0,n]^0})} + \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\mathbb{E}[J_k(f_k \mathbb{1}_{[0,n]^k})]}_{=0, \text{ siehe (2.7)}} \\ &= J_0(f_0 \mathbb{1}_{[0,n]^0}), \end{aligned}$$

und daher erhalten wir letztendlich

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}[J_k(f_k \mathbb{1}_{[0,n]^k})] \quad (4.5)$$

für alle  $F \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_n)$ . Nachdem wir nun die Darstellung für alle  $\mathcal{F}_n$ -messbaren Funktionen gezeigt haben, möchten wir nun dieses Ergebnis auf alle  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern, dazu betrachten wir folgende Definition.

**Definition 4.2.** Der lineare Raum  $\mathcal{S}$  der von den multiplen diskreten Integralen aufgespannt wird sei definiert als

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^n J_k(f_k) : f_k \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ k}, k = 0, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sei nun

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

die Vervollständigung von  $\mathcal{S}$  in  $L^2(\Omega)$ . Ziel des nächsten Satzes ist es nun zu zeigen, dass  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Chaosrepräsentationseigenschaft (CPR) besitzt, was also heißt, dass  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$  mit  $L^2(\Omega)$  übereinstimmt.

**Satz 4.3.** *Es gilt*

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \quad (4.6)$$

*Beweis.* Da  $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$  die Vervollständigung von  $\mathcal{S}$  in  $L^2(\Omega)$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\Omega)$  liegt. Zu zeigen ist also, dass für jedes  $F \in L^2(\Omega)$  eine Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$ .

Sei also  $F \in L^2(\Omega)$  eine beschränkte Zufallsvariable. Dann ist die Zufallsvariable  $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]$   $\mathcal{F}_n$ -messbar und daraus folgt nach Satz 4.1

$$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n] \in \mathcal{S}.$$

Nun besagt der Martingalkonvergenzsatz (vgl. [8] Satz 11.4), dass die Folge  $(\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n])_{n \in \mathbb{N}}$  fast sicher gegen  $F$  konvergiert, somit ist jede beschränkte Zufallsvariable aus  $L^2(\Omega)$  der Grenzwert einer Folge aus  $\mathcal{S}$ .

Falls  $F \in L^2(\Omega)$  nicht beschränkt ist, so ist  $F$  der Grenzwert in  $L^2(\Omega)$  der beschränkten Folge  $(\mathbb{1}_{|F| \leq n} F)_{n \in \mathbb{N}}$ , und somit liegt  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\Omega)$ , woraus (4.6) folgt.  $\square$

Satz 4.3 beweist die Chaosrepräsentationseigenschaft (CRP) für  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , diese ist enorm wichtig, da wir nun in der Lage sind, beliebige  $F \in L^2(\Omega)$  mittels stochastischer Integrale darzustellen. Sei also  $F \in L^2(\Omega)$ , dann gibt es eine eindeutige Darstellung (vgl. (4.5))

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(f_n) \\ &= J_0(f_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n) \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n), \quad f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Diese ganzen Überlegungen werden uns im Verlauf dieser Arbeit noch von großem Nutzen sein, wir werden diese Erkenntnis nun anwenden, um zu zeigen, dass  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auch die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft (PRP) besitzt, was wir nun zeigen möchten.

**Definition 4.4.**  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft (PRP), wenn für alle  $F \in L^2(\Omega)$  ein vorhersehbarer, quadratintegrierbarer Prozess  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  existiert, so dass gilt:

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k. \quad (4.8)$$

Aus (4.7) können wir nun schlussfolgern, dass  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft besitzt.

**Satz 4.5.**  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft (PRP).

*Beweis.* Sei  $F = J_n(f_n)$ , aus Definition 2.10 bekommen wir

$$\begin{aligned} F = J_n(f_n) &= n \sum_{k=0}^{\infty} J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*)) Y_k \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[F]}_{=0} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{n J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*))}_{=: u_k} Y_k, \end{aligned}$$

wobei  $u_k \in \mathcal{F}_{k-1}$  nach Satz 2.14, also erhalten wir letztendlich

$$F = J_n(f_n) = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k.$$

Sei nun  $F \in L^2(\Omega)$  beliebig, nach (4.7) erhalten wir eine eindeutige Darstellung von  $F$  zu

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=1}^{\infty} J_n(f_n),$$

also gilt (4.8) Aufgrund von Linearität. Somit haben wir gezeigt, dass  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft hat.  $\square$

Diese Eigenschaft ist für uns von großem Interesse und wird uns noch von großem Nutzen sein. Möchte man nun diese Ergebnisse benutzen und anwenden, so stellt man fest, dass Satz 4.3 und 4.5 zwar die Existenz einer Darstellung von  $F \in L^2(\Omega)$  beweisen, allerdings keine Aussage darüber treffen, wie diese Darstellung explizit aussieht. Wir sind aber sehr wohl daran interessiert, wie eine solche Darstellung aussehen könnte. Diesem Thema widmen wir uns im nächsten Kapitel, wir führen den Gradient Operator ein, um mit dessen Hilfe eine explizite Darstellung für die vorhersehbare Repräsentation von  $F \in L^2(\Omega)$  zu finden.

# 5 Der Gradient Operator und die Clark-Ocone Formula

## 5.1 Der Gradient Operator

Aufbauend auf den Ergebnissen von Kapitel 4 wollen wir in diesem Kapitel eine explizite Darstellung (PRP) von Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$  konstruieren. Dazu führen wir in Abschnitt 5.1 die diskrete Malliavin-Ableitung ein, welchen wir als Gradient Operator bezeichnen. Diesen Operator kann man als Konzept der Ableitung bezüglich Pfaden auf  $L^2(\Omega)$  ansehen, es handelt sich aber nicht um einen Ableitungsoperator im eigentlichen Sinne.

Mithilfe diesen Operators können wir in Abschnitt 5.2 die Clark-Ocone Formula formulieren und beweisen. Diese gibt uns eine explizite Darstellung der vorhersehbaren Repräsentation für Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$ , deren Existenz wir in Satz 4.5 bewiesen haben. Der Gradient Operator sei wie folgt definiert.

**Definition 5.1.** Der lineare Gradient Operator

$$D : \mathcal{S} \rightarrow L^2(\Omega \times \mathbb{N})$$

sei definiert als

$$D_k J_n(f_n) = n J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)), \quad (5.1)$$

wobei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

Der Operator  $D_k$  verringert also den Grad des multiplen stochastischen Integrals, was sofort an eine Art „Ableitung“ denken lässt. Da unsere Pfade aber nicht ableitbar im eigentlichen Sinne sind, werden wir später noch auf eine genauere Interpretation eingehen. Zunächst ist  $D_k$  stetig auf dem Chaos  $\mathcal{H}_n$ , da (vgl. [20] Satz II.1.2)

$$\begin{aligned} \|D_k J_n(f_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= n^2 \|J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= n^2 \mathbb{E}[J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k))^2] \\ &= n^2 (n-1)! \langle \mathbb{1}_{\Delta_{n-1}} f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k), f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{\otimes(n-1)})} \\ &= nn! \langle \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) f_n(*, k), f_n(*, k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{\otimes(n-1)})} \\ &= nn! \| \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) f_n(*, k) \|_{\ell^2(\mathbb{N}^{\otimes(n-1)})} \\ &\leq nn! \|f_n(*, k)\|_{\ell^2(\mathbb{N}^{\otimes(n-1)})}, \quad f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz entwickelt nun für  $D_k$  das Konzept eines endlichen Differenzoperators, dabei untersuchen wir  $D_k$  im Hinblick auf verschiedene Pfade auf  $\Omega$ . Sei

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}},$$

dann definieren wir

$$\omega_+^k = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, 1, \omega_{k+1}, \dots)$$

und

$$\omega_-^k = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, -1, \omega_{k+1}, \dots).$$

Mithilfe dieser Definitionen erhalten wir nun eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $D_k$ .

**Satz 5.2.** *Für alle  $F \in \mathcal{S}$  gilt für den Gradientoperator*

$$D_k F(\omega) = \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir (5.2) für  $\mathcal{F}_n$ -messbare  $F \in \mathcal{S}$ . Aufgrund von Linearität und Satz 4.1 reicht es  $F \in \mathcal{S}$  zu betrachten, die die Form

$$F = Y_{k_1} \cdots Y_{k_n}$$

hat, dies ist nach (3.6) gleichzusetzen mit

$$F = \prod_{i=1}^n \frac{q_{k_i} - p_{k_i} + X_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}}. \quad (5.3)$$

Nach Satz 4.1 folgt somit für  $(k_1, \dots, k_n) \in \Delta_n$

$$\begin{aligned} D_k F &= D_k(Y_{k_1} \cdots Y_{k_n}) = D_k J_n(\tilde{\mathbb{1}}_{\{(k_1, \dots, k_n)\}}) \\ &= n J_{n-1}(\underbrace{\tilde{\mathbb{1}}_{\{(k_1, \dots, k_n)\}}}_{\in \Delta_n}(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)) \\ &= n J_{n-1}(\tilde{\mathbb{1}}_{\{(k_1, \dots, k_n)\}}(*, k)) \\ &= n(n-1)! \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_{n-1}} \frac{1}{n!} \mathbb{1}_{\{(k_1, \dots, k_n) = (i_1, \dots, i_{n-1}, k)\}} Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} \\ &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_{n-1}} \mathbb{1}_{\{(k_1, \dots, k_n) = (i_1, \dots, i_{n-1}, k)\}} Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{k_i\}}(k) \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_{n-1}} \mathbb{1}_{\{\{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n\} = \{i_1, \dots, i_{n-1}\}\}} Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{k_i\}}(k) \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n Y_{k_i} \\
&= \mathbb{1}_{\{k_1, \dots, k_n\}}(k) \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n Y_{k_i}. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Ist nun  $k \notin \{k_1, \dots, k_n\}$ , so folgt sofort aus (5.3)  $F(\omega_+^k) = F(\omega_-^k) = F(\omega)$ , dementsprechend ist auch  $D_k F(\omega) = 0$ , was aus (5.4) ersichtlich ist, somit erhalten wir

$$\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) = 0 = D_k F(\omega).$$

Haben wir den Fall  $k \in \{k_1, \dots, k_n\}$ , so gilt nach (5.3)

$$F(\omega_+^k) = \sqrt{\frac{q_k}{p_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n \frac{q_{k_i} - p_{k_i} + \omega_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}},$$

und

$$F(\omega_-^k) = -\sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n \frac{p_{k_i} - q_{k_i} + \omega_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}},$$

also folgt aus (5.4)

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) &= \sqrt{p_k q_k} \left( \sqrt{\frac{q_k}{p_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n \frac{q_{k_i} - p_{k_i} + \omega_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}} + \sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n \frac{p_{k_i} - q_{k_i} + \omega_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}} \right) \\
&= \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n \frac{q_{k_i} - p_{k_i} + \omega_{k_i}}{2\sqrt{p_{k_i} q_{k_i}}} \underbrace{(p_k + q_k)}_{=1} \\
&= \prod_{\substack{i=1 \\ k_i \neq k}}^n Y_{k_i} \\
&= D_k (Y_{k_1} \cdots Y_{k_n})(\omega) \\
&= D_k F(\omega),
\end{aligned}$$

und damit der Satz für alle  $\mathcal{F}_n$ -messbaren  $F \in \mathcal{S}$ . Aufgrund von

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[J_n(f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n})^2] &= n! \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n}, f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)} \\ &\leq n! \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n, f_n \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

und des Martingalkonvergenzsatzes ist  $J_n(f_n)$  der  $L^2$ -Grenzwert der Folge  $(J_n(f_n \mathbb{1}_{[0,k]^n}))_{k \in \mathbb{N}} = (\mathbb{E}[J_n(f_n) | \mathcal{F}_k])_{k \in \mathbb{N}}$ . Durch (4.7) und die Stetigkeit des Operators  $D_k$  folgt letztendlich für  $F \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}D_k F &= D_k \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_k \underbrace{\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n]}_{\in \mathcal{F}_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p_k q_k} (\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n](\omega_+^k) - \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n](\omega_-^k)) \\ &= \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)),\end{aligned}$$

und damit (5.2) für alle  $F \in \mathcal{S}$ . □

Die Berechnung solcher Gradienten ist in folgendem Beispiel dargestellt.

**Beispiel 5.3.** Sei  $I \subset \mathbb{N}$  und  $F = \prod_{k \in I} Y_k$ . Der Gradient von F ergibt sich nun für  $k \in I$  zu

$$\begin{aligned}D_k F(\omega) &= \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) \\ &= \sqrt{p_k q_k} \left( \prod_{n \in I} Y_n(\omega_+^k) - \prod_{n \in I} Y_n(\omega_-^k) \right) \\ &= \sqrt{p_k q_k} \prod_{\substack{n \in I \\ n \neq k}} Y_n \left( \sqrt{\frac{q_k}{p_k}} - \left( -\sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \right) \right) \\ &= \prod_{\substack{n \in I \\ n \neq k}} Y_n \underbrace{(q_k + p_k)}_{=1} \\ &= \prod_{\substack{n \in I \\ n \neq k}} Y_n.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Für  $k \notin I$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
D_k F(\omega) &= \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) \\
&= \sqrt{p_k q_k} \underbrace{\left( \prod_{n \in I} Y_n(\omega_+^k) - \prod_{n \in I} Y_n(\omega_-^k) \right)}_{=0, \text{ da unabhängig von } X_k} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Zusätzlich gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $F \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
D_k(D_k F)(\omega) &= D_k(\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k))) \\
&= \sqrt{p_k q_k} \underbrace{(\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k))(\omega_+^k) - \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k))(\omega_-^k))}_{=0, \text{ da unabhängig von } X_k} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

somit ist die zweite Anwendung des Gradient Operators bezüglich des gleichen  $k \in \mathbb{N}$  für alle  $F \in \mathcal{S}$  gleich Null.

Folgendes Ergebnis ist eine direkte Folgerung aus Satz 5.2, welche den Begriff der Messbarkeit einer Zufallsvariable mit dem Gradient Operator verknüpft.

**Satz 5.4.** *Sei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable, dann gilt*

$$F \text{ ist } \mathcal{F}_n\text{-messbar} \iff D_k F = 0 \quad \forall k > n.$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $D_k F = 0$  für alle  $k > n$ . Daraus ergibt sich nach (5.2) sofort

$$F(\omega_+^k) = F(\omega_-^k) \text{ für alle } k > n.$$

Daher gilt  $F = f(X_0, \dots, X_n)$ , und somit ergibt sich  $F$  ist  $\mathcal{F}_n$ -messbar.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $F \in \mathcal{F}_n$ , also genügt es die Aussage für

$$F = Y_{k_1} \cdots Y_{k_l}, \quad 0 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq n$$

zu betrachten. Sei nun  $k > n$ . Dadurch, dass  $k \notin \{k_1, \dots, k_l\}$  und somit aus (5.4)  $F(\omega_+^k) = F(\omega_-^k)$  folgt, gilt

$$D_k F = \sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) = 0$$

für alle  $k > n$ .

□

Wir werden nun den Gradient Operator  $D_k$  für alle  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern, dabei erfüllt  $D_k$  Bedingung (5.2). Es gilt nun

$$D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times \mathbb{N}),$$

wobei für Funktionale  $F \in \text{Bild}(D)$  gilt  $\mathbb{E}[\|DF\|_{\ell^2(\mathbb{N}^n)}^2] < \infty$ . Ist nun  $F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(f_n)$ , so lässt sich diese Bedingung umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|DF\|_{\ell^2(\mathbb{N}^n)}^2] &= \mathbb{E}[\langle DF, DF \rangle] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} D_k F D_k F \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_k J_n(f_n) D_k J_n(f_n) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[(n J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)))^2] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)))^2] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sum_{k=0}^{\infty} (n-1)! \langle \mathbb{1}_{\Delta_{n-1}}(*) f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k), f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{n-1})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nn! \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) f_n(*, k), f_n(*, k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{n-1})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nn! \langle f_n, f_n \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nn! \|f_n\|_{\ell^2(\mathbb{N}^n)}^2 < \infty. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes stellen wir in folgendem Satz die Produktregel für den Operator  $D$  vor.

**Satz 5.5.** *Sei  $F, G \in L^2(\Omega)$ , dann gilt*

$$D_k(FG) = FD_kG + GD_kF - \frac{X_k}{\sqrt{p_k q_k}} D_k F D_k G, \quad , k \in \mathbb{N}, \tag{5.9}$$

*dies ist die sogenannte Produktregel für unseren Operator  $D$ .*

*Beweis.* Durch einfaches Nachrechnen erhalten wir nach Satz 5.2 mit  $F_+^k = F(\omega_+^k)$

$$\begin{aligned}
D_k(FG) &= \sqrt{p_k q_k} (F_+^k G_+^k - F_-^k G_-^k) \\
&= \sqrt{p_k q_k} (F_+^k G_+^k - F_-^k G_-^k + \underbrace{F_+^k G_-^k - F_+^k G_-^k}_{=0}) \\
&\quad + \underbrace{F_-^k G_+^k - F_-^k G_+^k}_{=0} + \underbrace{F_-^k G_-^k - F_-^k G_-^k}_{=0} \\
&= \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \sqrt{p_k q_k} (F_+^k G_+^k - FG + F_+^k G - F_+^k G \\
&\quad + FG_+^k - FG_+^k + FG - FG) \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \sqrt{p_k q_k} (FG - F_-^k G_-^k + FG_-^k - FG_-^k \\
&\quad + F_-^k G - F_-^k G + F_-^k G_-^k - F_-^k G_-^k) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \sqrt{p_k q_k} (F(G_+^k - G) + G(F_+^k - F) + (F_+^k - F)(G_+^k - G)) \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \sqrt{p_k q_k} (F(G - G_-^k) + G(F - F_-^k) - (F - F_-^k)(G - G_-^k)) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \left( FD_k G + GD_k F + \frac{1}{\sqrt{p_k q_k}} D_k F D_k G \right) \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \left( FD_k G + GD_k F - \frac{1}{\sqrt{p_k q_k}} D_k F D_k G \right) \\
&= FD_k G + GD_k F - \frac{X_k}{\sqrt{p_k q_k}} D_k F D_k G
\end{aligned}$$

womit Satz 5.5 bewiesen wäre. □

**Bemerkung 5.6.** Nach (3.6) gilt  $Y_k = \frac{X_k + q_k - p_k}{2\sqrt{p_k q_k}}$  und nach einsetzen von  $\varphi_k = \frac{q_k - p_k}{\sqrt{p_k q_k}}$  (siehe (3.3)) erhalten wir

$$Y_k = \frac{X_k}{2\sqrt{p_k q_k}} + \frac{1}{2}\varphi_k \Leftrightarrow \frac{X_k}{\sqrt{p_k q_k}} = 2Y_k - \varphi_k, \quad (5.10)$$

Somit lässt sich die Produktregel (5.9) auch umschreiben zu

$$D_k(FG) = FD_k G + GD_k F - (2Y_k - \varphi_k) D_k F D_k G.$$

Wie man sieht unterscheidet sich die Produktregel des Gradient Operators von der üblichen Produktregel einer Ableitung. Hinzu kommt der Term  $\frac{X_k}{\sqrt{p_k q_k}} D_k F D_k G$ , welcher allerdings verschwindet, wenn entweder F oder G von  $X_k$  unabhängig sind.

In folgendem Beispiel sehen wir eine Anwendung der Produktregel.

**Beispiel 5.7.** Es sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $F = Y_k^2$ , wir wollen nun 2 Wege vorstellen, mit denen man  $D_k F$  berechnen kann. Zum einen folgt unter Anwendung der Strukturgleichung (3.1)

$$D_k F(\omega) = D_k(1 + \varphi_k Y_k) = \varphi_k D_k Y_k = \varphi_k, \quad (5.11)$$

wobei (5.5) benutzt wurde. Zum andern erhält man unter Verwendung der Produktregel (5.9) für  $G = H = Y_k$  aber ebenfalls

$$\begin{aligned} D_k F &= D_k(GH) \\ &= GD_k H + HD_k G - (2Y_k - \varphi_k)D_k G D_k H \\ &= Y_k D_k Y_k + Y_k D_k Y_k - (2Y_k - \varphi_k)D_k Y_k D_k Y_k \\ &= Y_k \cdot 1 + Y_k \cdot 1 - (2Y_k - \varphi_k) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \varphi_k. \end{aligned}$$

Die Überlegungen und Bemühungen aus Kapitel 4, Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$  mittels stochastischer Integrale zu repräsentieren, können nun entscheidend weiter geführt werden. Im vorigen Kapitel haben wir die Existenz einer solchen Repräsentation gezeigt, aber die Frage, wie diese Darstellung aussehen könnte, blieb bis hierhin ungeklärt. Diese Frage wollen wir nun im nächsten Abschnitt beantworten, indem wir die Darstellung für alle  $F \in L^2(\Omega)$  explizit angeben.

## 5.2 Die Clark-Ocone Formula

In diesem Abschnitt geben wir eine explizite Darstellung der PRP an (vgl. 4.8), zunächst entwickeln wir dies auf  $\mathcal{S}$ , bevor wir es für alle Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$  zeigen. Am Ende dieses Abschnittes stellen wir noch eine Anwendung dieser Darstellung für  $L^2$ -Martingale vor.

**Satz 5.8.** *Sei  $F \in \mathcal{S}$ , dann erhalten wir die explizite Darstellung*

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k D_k \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_k]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

*Dieses Ergebnis nennen wir die Clark-Ocone formula.*

*Beweis.* Aufgrund von Linearität reicht es zu zeigen, dass (5.10) für  $F = J_n(f_n)$  gilt. Nach Satz 5.4 gilt (5.12) offensichtlich für  $F = J_0(f_0)$ , sei also nun  $n \geq 1$ , dann folgt aus Satz 2.11

$$\begin{aligned}
F &= J_n(f_n) = n \sum_{k=0}^{\infty} J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*)) Y_k \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \Delta_{n-1}} f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*) Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} Y_k \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \Delta_{n-1}} \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) f_n(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*) Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} Y_k \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) \mathbb{1}_{[0, k-1]^{n-1}}(*)) Y_k \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k J_n(f_n) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k,
\end{aligned}$$

was (5.12) zeigt. Die zweite Gleichung gilt aufgrund von

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}[\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k)) | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}[\underbrace{\sqrt{p_k q_k} (F(\omega_+^k) - F(\omega_-^k))}_{\text{unabhängig von } X_k} | \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_k] \\
&= D_k \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_k],
\end{aligned}$$

somit ist die Clark-Ocone formula gezeigt.  $\square$

**Beispiel 5.9.** Sei  $F = J_2(\mathbb{1}_{[0, 2]^2})$ , Mithilfe der Clark-Ocone formula (5.12) werden wir nun die vorhersehbare Repräsentationsdarstellung von F auswerten. Für diese gilt nach (5.1)

$$\begin{aligned}
F &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[J_2(\mathbb{1}_{[0, 2]^2})]}_{=0} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k J_2(\mathbb{1}_{[0, 2]^2}) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[2J(\mathbb{1}_{[0, 2]^2}(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_2}(*, k)) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\mathbb{E}[Y_1 + Y_2|\mathcal{F}_{-1}]Y_0 + 2\underbrace{\mathbb{E}[Y_0 + Y_2|\mathcal{F}_0]}_{\in \mathcal{F}_0}Y_1 + 2\underbrace{\mathbb{E}[Y_0 + Y_1|\mathcal{F}_1]}_{\in \mathcal{F}_1}Y_2 \\
&= 2[Y_0Y_1 + Y_0Y_2 + Y_1Y_2] + 2\underbrace{\mathbb{E}[Y_1 + Y_2|\mathcal{F}_{-1}]}_{=0}Y_0 + 2\underbrace{\mathbb{E}[Y_2|\mathcal{F}_0]}_{=0}Y_1 \\
&= 2[Y_0Y_1 + Y_0Y_2 + Y_1Y_2],
\end{aligned}$$

dies stimmt mit  $F = J_2(\mathbb{1}_{[0,2]^2})$  überein, was wir bereits in (3.10) berechnet haben.

Wir wollen nun versuchen, die Clark-Ocone formula für alle  $F \in L^2(\Omega)$  zu zeigen. Der Operator  $D$  ist zwar unbeschränkt, allerdings können wir einen beschränkten Operator definieren, mit dessen Hilfe wir (5.12) auf  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern. Dabei bilden wir jede Zufallsvariable  $F \in L^2(\Omega)$  auf den eindeutigen Prozess aus der vorhersehbaren Repräsentation (vgl. (5.12)) ab.

**Satz 5.10.** *Der Operator*

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega \times \mathbb{N}) \\
F &\mapsto (\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}])_{k \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

*ist beschränkt mit Norm 1.*

*Beweis.* Wir werden den Satz zunächst für  $F \in \mathcal{S}$  zeigen, und ihn danach auf  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern. Sei  $F \in \mathcal{S}$ , nach der Isometrieformel (2.3) und der Clark-Ocone formula (5.12) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}[D.F | \mathcal{F}_{-1}]\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})}^2 &= \mathbb{E}[\langle \mathbb{E}[D.F | \mathcal{F}_{-1}], \mathbb{E}[D.F | \mathcal{F}_{-1}] \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] \\
&= \mathbb{E}[J(\mathbb{E}[D.F | \mathcal{F}_{-1}])^2] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]Y_k \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_l F | \mathcal{F}_{l-1}]Y_l\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^2]}_{=Var(F)} \\
&\leq Var(F) + \mathbb{E}[F] \\
&= \mathbb{E}[F^2] \\
&= \|F\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

wobei im Fall  $F = J_1(f_1)$  Gleichheit gilt. Somit hat der Operator auf  $\mathcal{S}$  nach [20, Satz II.1.4] die Norm 1. Da  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\Omega)$  ist, lässt sich diese Aussage nach [20, Satz II.1.5] auf  $L^2(\Omega)$  erweitern, womit der Satz bewiesen wurde.  $\square$

Mit den Ergebnissen aus Satz 5.10 können wir nun die Clark-Ocone formula auf ganz  $L^2(\Omega)$  formulieren und beweisen.

**Satz 5.11.** *Die Clark-Ocone formula aus Satz 5.8 lässt sich auf alle  $F \in L^2(\Omega)$  erweitern. Sei also  $F \in L^2(\Omega)$ , dann erhalten wir die vorhersehbare Repräsentation von  $F$  zu*

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} Y_k D_k \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_k]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

*Beweis:* Der Beweis des Satzes ist eine Folgerung aus Satz 5.8. Nach (5.12) wissen wir, dass  $F \in \mathcal{S}$  die Darstellung

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k.$$

hat. Da nun  $F \mapsto \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]$  nach Satz 5.10 beschränkt ist, überträgt sich die Clark-Ocone formula auf  $F \in L^2(\Omega)$ . Da  $D_k F$  unabhängig von  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ist, gilt die zweite Gleichheit analog wie in Satz 5.8, da die Unabhängigkeit sofort

$$\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] = D_k \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_k]$$

impliziert, was bereits in Satz 5.8 gezeigt wurde. □

**Bemerkung 5.12.** Die diskrete Version der Clark-Ocone formula aus Satz 5.11 ist gleichzusetzen mit der stetigen. Nach [14] gilt im stetigen Fall

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^{\infty} \mathbb{E}[D_t F | \mathcal{F}_t] dM_t,$$

wobei  $F \in L^2(\Omega)$  und  $M_t$  ein Normalmartingal ist, d.h.  $(M_t^2 - t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  ist ein Martingal.

Wir werden nun eine erste Anwendung der Clark-Ocone formula präsentieren, dabei widmen wir uns einer Poincaré Ungleichung. Die Ungleichung ermöglicht es, Schranken für eine Funktion aus Schranken der Ableitungen dieser Funktion herzuleiten. Für die Varianz von  $F$  gilt nach der Clark-Ocone formula (5.13) und der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\text{Var}(F) &= \mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^2] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]^2 Y_k^2 \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,l=0 \\ k \neq l}}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \mathbb{E}[D_l F | \mathcal{F}_{l-1}] Y_l \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]^2 Y_k^2 \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,l=0 \\ k < l}}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \mathbb{E}[D_l F | \mathcal{F}_{l-1}]}_{\in \mathcal{F}_{l-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_l | \mathcal{F}_{l-1}]}_{=0} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,l=0 \\ l < k}}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[D_l F | \mathcal{F}_{l-1}] Y_l \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=0} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]^2}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=1} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}]^2 \right] \tag{5.14} \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(D_k F)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[(D_k F)^2 | \mathcal{F}_{k-1}]] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (D_k F)^2 \right],
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$\text{var}(F) \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (D_k F)^2 \right] = \|DF\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})}^2.$$

Wir wollen nun weitere Anwendungen der Clark-Ocone formula untersuchen. Ist  $F \in \mathcal{F}_n$ , so gilt nach Satz 5.4  $D_k F = 0$  für alle  $k > n$ , somit vereinfacht sich (5.13) zu

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k. \quad (5.15)$$

Solch eine vorhersehbare Darstellung werden wir nun für diskrete Martingale entwickeln, dazu wird folgender Satz von Bedeutung sein.

**Satz 5.13.** *Sei  $F \in L^2(\Omega)$ . Dann gelten folgende Gleichungen*

$$F = \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k, \quad (5.16)$$

sowie

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n])^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} (\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}])^2 \right], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

*Beweis.* Die Gültigkeit der Aussage beweisen wir durch einfaches Nachrechnen. Sei  $F \in L^2(\Omega)$ , aus der Clark-Ocone formula folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k | \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n]] + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_n]}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \underbrace{Y_k}_{\in \mathcal{F}_k} \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_n]}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \underbrace{Y_k}_{=0} \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k, \end{aligned}$$

somit folgt durch wiederholtes anwenden der Clark-Ocone formula (5.13)

$$\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_n] = F - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k F | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k$$

und somit

$$F = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]Y_k.$$

Die zweite Gleichung folgt unmittelbar aus der ersten und (5.14) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]Y_k \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n])^2] + 2\mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n] \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]Y_k \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]Y_k \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]^2] + 2\mathbb{E} \left[ \underbrace{\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_{k-1}]}_{=0} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}]^2 \right] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n])^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} (\mathbb{E}[D_k F|\mathcal{F}_{k-1}])^2 \right]. \end{aligned}$$

□

Die Darstellung für  $\mathcal{F}_n$ -messbare Zufallsvariablen aus Gleichung (5.15) lässt sich demzufolge noch etwas erweitern. Wenden wir (5.16) an, so erhalten wir unter Benutzung von Satz 5.4

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{n-1}] + \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \underbrace{D_k F}_{=0 \text{ für } k>n} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] Y_k \\ &= \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[D_n F|\mathcal{F}_{n-1}]Y_n. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nun können wir letztendlich die vorhersehbare Darstellung für diskrete Martingale vorstellen, indem wir die Gleichungen aus Satz 5.13 benutzen.

**Satz 5.14.** *Sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine  $\mathcal{F}_n$ -Martingal in  $L^2(\Omega)$ . Dann besitzt  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die vorhersehbare Repräsentationseigenschaft (PRP), d.h. es existiert ein  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_{k-1}$  (vgl. Def. 4.4), sodass*

$$M_n = M_{-1} + \sum_{k=0}^n u_k Y_k \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

*Beweis.* Sei  $k \geq 1$ , da  $M_k \in \mathcal{F}_k$  folgt unter Benutzung von (5.18) und der Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} M_k &= \mathbb{E}[M_k | \mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}[D_k M_k | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ &= M_{k-1} + \mathbb{E}[D_k M_k | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ \Leftrightarrow M_k - M_{k-1} &= \mathbb{E}[D_k M_k | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k. \end{aligned}$$

Wählen wir nun

$$u_k = \mathbb{E}[D_k M_k | \mathcal{F}_{k-1}],$$

so erhalten wir mithilfe der Teleskopsumme

$$\begin{aligned} M_n &= M_{-1} + \sum_{k=0}^n M_k - M_{k-1} \\ &= M_{-1} + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k M_k | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k \\ &= M_{-1} + \sum_{k=0}^n u_k Y_k, \end{aligned}$$

und damit die vorhersehbare Repräsentation für  $M_n$  aus (5.19).  $\square$

Im Laufe dieser Arbeit haben wir bis jetzt das diskrete Itô Integral eingeführt und über Chaoszerlegung gezeigt, dass die Vervollständigung der von den stochastischen Integralen aufgespannten Raum  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\Omega)$  liegt. Dies hat es uns unter anderem ermöglicht, die vorhersehbare Repräsentation (Clark-Ocone formula) mithilfe des Gradientenoperators  $D$  für Zufallsvariablen  $F \in L^2(\Omega)$  zu formulieren.

Allerdings ist das stochastische Integral  $J(u)$  nur für vorhersehbare Prozesse  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2_{pre}(\Omega)$  definiert, was die Frage aufwirft, wie wir allgemeinere Prozessen handhaben können und wie wir für diese ebenfalls einen allgemeineren Integrationsbegriff einführen können. Dies wird Bestandteil des nächsten Kapitels sein, wir werden den Begriff des Itô Integrals erweitern und für allgemeinere Prozesse  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  einen Integrationsbegriff entwickeln.

## 6 Der Divergenzoperator

### 6.1 Das Skorohodintegral

Dieses Kapitel beschäftigt sich damit, einen Integrationsbegriff für allgemeine Prozesse  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  zu finden. Dieser Integrationsbegriff soll eine Erweiterung des diskreten stochastischen Integrals sein, das heißt, dass Prozesse, die mit unserem bisherigen Integrationsbegriff (vgl. 2.3) kompatibel sind, unter beiden Integralbegriffen übereinstimmen.

Zunächst wird ein weiterer Operator  $\delta$  als Adjunktion des Gradientoperators  $D$  auf einem Teilraum von  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  eingeführt, welcher das neue Integral repräsentiert. Die Eigenschaften und Wirkungsweise dieses Operators werden im Anschluss untersucht, es wird eine Produktregel formuliert und eine Isometrie bewiesen. Letzendlich werden wir  $\delta$  auf ganz  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  erweitern und die Unterschiede des neuen Integralbegriffs mit  $J(u)$  vergleichen. Es sei  $\mathcal{U} \subset L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  definiert als

$$\mathcal{U} = \left\{ \sum_{k=0}^n J_k(f_{k+1}(*, \cdot)), f_{k+1} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ k} \otimes \ell^2(\mathbb{N}), k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir definieren nun den Operator  $\delta$ , der sich anschließend als geeigneter Integralbegriff herausstellen wird.

**Definition 6.1.** Der Divergenz Operator  $\delta : \mathcal{U} \rightarrow L^2(\Omega)$  sei die lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$\delta(u) = \delta(J_n(f_{n+1}(*, \cdot))) = J_{n+1}(\tilde{f}_{n+1}), f_{n+1} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n} \otimes \ell^2(\mathbb{N}), \quad (6.1)$$

wobei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Form

$$u_k = J_n(f_{n+1}(*, k)), k \in \mathbb{N}$$

hat und  $\tilde{f}_{n+1}$  die Symmetrisierung von  $f_{n+1}$  ist (vgl. (2.8)).

Im Gegensatz zu  $D$  erhöht  $\delta$  den Grad des multiplen stochastischen Integrals, daraus lässt sich vermuten, dass der Operator  $\delta$  als eine Art Integral fungiert. In der Tat stimmt  $\delta$  auch mit dem vom ukrainischen Mathematiker Anatoli Skorohod definierten Skorohodintegral überein (vgl. [16]). Zwischen  $D$  und  $\delta$  gibt es also einen engen gegenseitigen Zusammenhang, wir werden in folgendem Satz zeigen, dass sich dies in der Adjunktion von beiden Operatoren ausdrücken lässt.

**Satz 6.2.** *Der Operator  $\delta$  ist adjungiert zu  $D$ , d.h. (siehe [20])*

$$\langle DF, u \rangle_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})} = \langle F, \delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)}, F \in \mathcal{S}, u \in \mathcal{U}. \quad (6.2)$$

*Beweis.* Aufgrund von Linearität reicht es  $F = J_n(f_n)$  und  $u_k = J_m(g_{m+1}(*, k))$  zu betrachten, wobei  $f_n \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n}$  und  $g_{m+1} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\circ n} \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ . Durch Nachrechnen erhalten wir mit Hilfe von Satz 2.13

$$\begin{aligned}
\langle DF, u \rangle_{L^2(\Omega \times \mathbb{N})} &= \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] \\
&= \mathbb{E}[\langle D.J_n(f_n), J_m(g_{m+1}(*, \cdot)) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] \\
&= n \mathbb{E}[\langle J_{n-1}(f_n(*, \cdot) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, \cdot)), J_m(g_{m+1}(*, \cdot)) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[J_{n-1}(f_n(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)) J_m(g_{m+1}(*, k))] \\
&= n(n-1)! \mathbb{1}_{\{n-1=m\}} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_n(*, k) \underbrace{\mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k) \mathbb{1}_{\Delta_{n-1}}}_{=\mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k)}, g_{m+1}(*, k) \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{n-1})} \\
&= n! \mathbb{1}_{\{n=m+1\}} \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n, g_{m+1} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)} \\
&= \mathbb{E}[J_n(f_n) J_{m+1}(g_{m+1})] \\
&= \mathbb{E}[J_n(f_n) J_{m+1}(\tilde{g}_{m+1})] \\
&= \mathbb{E}[F \delta(u)] \\
&= \langle F, \delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

und somit die Adjunktion von  $\delta$  und  $D$ . □

**Beispiel 6.3.** Es sei  $F = Y_0 Y_1$ ,  $f_2(i, j) = (i-j)^2 \mathbb{1}_{[0,2]^2}(i, j)$  und  $u_k = J(f_2(*, k))$ , wobei sich letzteres umschreiben lässt zu

$$u_k = J(f_2(*, k)) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-k)^2 \mathbb{1}_{[0,2]^2}(n, k) Y_n = \mathbb{1}_{[0,2]}(k) [k^2 Y_0 + (k-1)^2 Y_1 + (k-2)^2 Y_2].$$

Für den Divergenzoperator gilt

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= \delta(J(f_2(*, k))) \\
&= J_2(\tilde{f}_2) \\
&= J_2(f_2) \\
&= 2! \sum_{0 \leq i_1 < i_2 \leq 2} (i_1 - i_2)^2 Y_{i_1} Y_{i_2} \\
&= 2! [Y_0 Y_1 + 4 Y_0 Y_2 + Y_1 Y_2],
\end{aligned}$$

und für den Gradientenoperator erhalten wir

$$\begin{aligned}
D_0 F(\omega) &= \sqrt{p_0 q_0} (F(\omega_+^0) - F(\omega_-^0)) \\
&= \sqrt{p_0 q_0} \left( \sqrt{\frac{q_0}{p_0}} Y_1 - \left( -\sqrt{\frac{p_0}{q_0}} Y_1 \right) \right) \\
&= q_0 Y_1 + p_0 Y_1 \\
&= Y_1,
\end{aligned}$$

analog gilt  $D_1 F(\omega) = Y_0$  und  $D_k F(\omega) = 0$  für alle  $k > 1$ . Nun ergibt sich nach (2.6)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} D_k F u_k \right] \\
&= \mathbb{E}[Y_1 u_0 + Y_0 u_1] \\
&= \mathbb{E}[Y_1(Y_1 + 4Y_2) + Y_0(Y_0 + Y_2)] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[Y_1^2]}_{=1} + 4 \underbrace{\mathbb{E}[Y_1 Y_2]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2]}_{=1} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_0 Y_2]}_{=0} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

gleiches erhalten wir für

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F \delta(u)] &= \mathbb{E}[Y_0 Y_1 2!(Y_0 Y_1 + 4Y_0 Y_2 + Y_1 Y_2)] \\
&= 2 \underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2 Y_1^2]}_{=1} + 8 \underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2 Y_1 Y_2]}_{=0} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[Y_0 Y_1^2 Y_2]}_{=0} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

somit gilt in diesem Fall  $\mathbb{E}[F \delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}]$ .

Wir wollen nun einige Eigenschaften und Funktionsweisen des Integrals  $\delta(u)$  mit dem des stochastischen Integrals  $J(u)$  vergleichen. Zunächst lässt es sich leicht nachvollziehen, dass es sich bei  $\delta(u)$  genau wie bei  $J(u)$  um eine zentrierte Zufallsvariable handelt. Um dies zu zeigen benutze die Adjunktion zwischen  $D$  und  $\delta$  aus Satz 6.2. Für  $F = 1$  erhalten wir

$$\mathbb{E}[\delta(u)] = \mathbb{E}[1 \cdot \delta(u)] = \mathbb{E}[\langle D1, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] = 0.$$

Interessant für uns sind nun 2 folgende Fragen. Zum einen interessiert uns, für welche  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$  das Integral  $\delta(u)$  definiert ist, und welche Abbildungsvorschrift es erfüllt. Zum anderen stellt sich die Frage, ob es eine gewisse Isometrie wie  $J(u)$  (vgl.

(2.3)) erfüllt, und ob die Integrale  $\delta(u)$  und  $J(u)$  in bestimmten Fällen übereinstimmen. Insbesondere die letzte Frage ist sehr von Bedeutung. Da wir nach einer Erweiterung des stochastischen Integrals  $J(u)$  gesucht haben, sollte diese Erweiterung in den für  $J(u)$  definierten Prozessen  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2_{pre}(\Omega \times \mathbb{N})$  mit  $\delta(u)$  übereinstimmen, da ansonsten der Sinn der Erweiterung fragwürdig wäre.

In Satz 4.3 haben wir gezeigt, dass  $\mathcal{S}$  dicht in  $L^2(\Omega)$  liegt, daraus ergibt sich sofort, dass  $\mathcal{H}$  dicht in  $L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  liegt. Somit ist es uns möglich den Operator  $\delta$  für alle  $u \in L^2(\Omega)$  zu erweitern, also erhalten wir einen Operator

$$\delta : L^2(\Omega \times \mathbb{N}) \mapsto L^2(\Omega),$$

wobei für  $u \in \text{Bild}(\delta)$  gilt  $\mathbb{E}[\delta(u)^2] < \infty$ . Ist nun  $u_k = \sum_{k=0}^{\infty} J_n(f_{n+1}(*, k))$ , so lässt sich diese Bedingung nach der Isometrieformel (Satz 2.13) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta(u)^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \delta \left( \sum_{k=0}^{\infty} J_k(f_{k+1}(*, \cdot)) \right) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\delta(J_k(f_{k+1}(*, \cdot)))) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1}(\tilde{f}_{k+1}) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1}(\tilde{f}_{k+1})^2 \right] + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,n=0 \\ k \neq n}}^{\infty} J_{k+1}(\tilde{f}_{k+1}) J_{n+1}(\tilde{f}_{n+1}) \right]}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)! \langle \tilde{f}_{k+1} \mathbb{1}_{\Delta_{k+1}}, \tilde{f}_{k+1} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^{(k+1)})} < \infty. \end{aligned}$$

In folgendem Satz werden wir vorstellen, welche Abbildungsvorschrift  $\delta$  für  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  erfüllt.

**Satz 6.4.** *Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$ , dann kann der Operator  $\delta$  zu  $u$  erweitert werden mittels*

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k Y_k^2, \quad (6.3)$$

was gleichzusetzen ist mit

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k - \delta(\varphi D u), \quad (6.4)$$

vorausgesetzt die Folgen konvergieren in  $L^2(\Omega)$ .

*Beweis.* Da  $\mathcal{H}$  dicht ist in  $L^2(\Omega)$  reicht es die Aussagen für  $u \in \mathcal{H}$  zu zeigen. Sei also  $f_{n+1} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\text{on}} \otimes \ell^2(\mathbb{N})$  und  $u_k = J_n(f_{n+1}(*, k))$ , zunächst betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \Delta_{n+1}} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_2, \dots, i_n) \in \Delta_{n-1}} \tilde{f}_{n+1}(k, i_2, \dots, i_n, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(k, i_2, \dots, i_n) \\ &- \dots - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \Delta_{n-1}} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_{n-1}, k, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(i_1, \dots, i_{n-1}, k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) \\ &- n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \Delta_{n-1}} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_{n-1}, k, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(i_1, \dots, i_{n-1}, k), \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei  $\tilde{f}_{n+1}$  die Symmetrisierung von  $f_{n+1}$  ist. Für  $\delta(u)$  ergibt sich daraus und aus (6.1) sofort

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \delta(J_n(f_{n+1}(*, k))) \\ &= J_{n+1}(\tilde{f}_{n+1}) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \Delta_{n+1}} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_{n+1}) Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Delta_n} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_n, k) Y_{i_1} \cdots Y_{i_n} Y_k}_{=J_n(f_{n+1}(*, k))=u_k} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} n \underbrace{\sum_{(i_1, \dots, i_{n-1}) \in \Delta_{n-1}} \tilde{f}_{n+1}(i_1, \dots, i_{n-1}, k, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(i_1, \dots, i_{n-1}, k) Y_{i_1} \cdots Y_{i_{n-1}} Y_k^2}_{=nJ_{n-1}(f_{n+1}(*, k, k) \mathbb{1}_{\Delta_n}(*, k))=D_k J_n(f_{n+1}(*, k))=D_k u_k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k Y_k^2,$$

womit die erste Gleichung bewiesen wäre. Die zweite folgt wiederum aus der ersten, beachte dafür, dass nach der Strukturgleichung (3.1)  $Y_n = 1 + \varphi_n Y_n$  gilt, nach einsetzen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k Y_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k u_k Y_k. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Letzendlich gilt für  $\delta(\varphi Du)$  unter Benutzung von (6.6)

$$\begin{aligned} \delta(\varphi Du) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\varphi_k D_k u_k) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k (\varphi_k D_k u_k) Y_k, \end{aligned}$$

da aber nach (5.7)

$$D_k (\varphi_k D_k u_k) = \varphi_k D_k (D_k u_k) = 0,$$

gilt  $\delta(\varphi Du) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k u_k Y_k$  und somit folgt die zweite Gleichung aus (6.6).  $\square$

**Bemerkung 6.5.** Satz 6.4 zeigt also, dass sich  $\delta(u)$  und  $J(u)$  im Allgemeinen unterscheiden, man kann auch leicht ein Beispiel angeben, für das das Skorohod Integral definiert ist, das stochastische Integral allerdings nicht. Nehme z.B.  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} = (Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , dann gilt nach der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J(u)^2] &\geq \mathbb{E}[J(u)]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^2 \right]^2 \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}[Y_k^2]}_{=1} \right)^2 \\ &= \infty, \end{aligned}$$

und somit  $J(u) \notin L^2(\Omega)$ . Allerdings gilt für den Divergenzoperator nach Satz 6.4

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta(u)^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k Y_k^2 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^2 - \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot Y_k^2 \right)^2 \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

womit  $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ .

Liegt der symmetrische Fall vor, d.h.  $p_k = q_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\varphi_k = \frac{q_k - p_k}{\sqrt{p_k q_k}} = 0$  und somit vereinfacht sich  $\delta(u)$  zu

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k.$$

Ebenso wie für den Gradientoperator  $D$  kann man eine Produktregel für den Divergenzoperator  $\delta$  entwickeln, allerdings unterscheidet sie sich, genau wie beim Gradientoperator, von der üblichen Produktregel. Genauer gesagt erhalten wir für den Operator  $\delta$  nun die folgende Divergenzformel.

**Satz 6.6.** *Es sei  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  und  $F \in L^2(\Omega)$ , dann gilt die Produktregel*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} - \delta(\varphi(\cdot)u(\cdot)D.F) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k D_k F Y_k,$$

*vorausgesetzt die Folgen konvergieren in  $L^2(\Omega)$ .*

*Beweis.* Für  $F \in L^2(\Omega)$  und  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  gilt nach (6.4)

$$\delta(Fu) = \sum_{k=0}^{\infty} F u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k (F u_k) - \delta(\varphi(\cdot)D.(Fu(\cdot))). \quad (6.7)$$

Es sei nun noch einmal daran erinnert, dass sich die Produktregel für den Gradientoperator laut (5.10) umschreiben lässt zu

$$D_k(FG) = F D_k G + G D_k F - (2Y_k - \varphi_k) D_k F D_k G,$$

Wendet man die Produktregel für den Gradientenoperator an, erhält man also für den zweiten Term von (6.7)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} D_k(Fu_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} FD_ku_k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u_k D_k F}_{=\langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}} - \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) D_k F D_k u_k \\ &= F \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k + \langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} - \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) D_k F D_k u_k,\end{aligned}$$

wohingegen für den dritten Term

$$\delta(\varphi(\cdot)D.(Fu(\cdot))) = \delta(\varphi(\cdot)u(\cdot)D.F) + \underbrace{\delta(\varphi(\cdot)FD.u(\cdot))}_{=(1)} - \underbrace{\delta((2Y. - \varphi(\cdot))\varphi(\cdot)D.FD.u(\cdot))}_{=(2)}$$

gilt und sich (1) nach (6.3) und (5.7) umformen lässt zu

$$\begin{aligned}\delta(\varphi(\cdot)FD.u(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{\infty} F\varphi_k D_k u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\varphi_k F D_k u_k) Y_k^2 \\ &= F\delta(\varphi Du) - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k F D_k u_k Y_k^2.\end{aligned}$$

Ebenso folgt für (2)

$$\begin{aligned}\delta((2Y. - \varphi(\cdot))\varphi(\cdot)D.FD.u(\cdot)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k)\varphi_k D_k F D_k u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k((2Y_k - \varphi_k)\varphi_k D_k F D_k u_k) Y_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k)\varphi_k D_k F D_k u_k Y_k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k F D_k u_k Y_k^2.\end{aligned}$$

Letzendlich erhalten wir somit für (6.7)

$$\begin{aligned}\delta(Fu) &= \sum_{k=0}^{\infty} Fu_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} D_k(Fu_k) - \delta(\varphi(\cdot)D.(Fu(\cdot))) \\ &= F \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - F \sum_{k=0}^{\infty} D_k u_k - \langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} + \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) D_k F D_k u_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta(\varphi(\cdot)u(\cdot)D.F) - F\delta(\varphi Du) + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k F D_k u_k Y_k^2 \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) \varphi_k D_k F D_k u_k Y_k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k D_k F D_k u_k Y_k^2 \\
& = F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} - \delta(\varphi(\cdot)u(\cdot)D.F) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} D_k F D_k u_k \underbrace{\left( (2Y_k - \varphi_k) + \varphi_k Y_k^2 + (2Y_k - \varphi_k) \varphi_k Y_k - 2\varphi_k Y_k^2 \right)}_{=2Y_k - \varphi_k + \varphi_k(1 + \varphi_k Y_k) - \varphi_k^2 Y_k = 2Y_k} \\
& = F\delta(u) - \langle u, DF \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} - \delta(\varphi(\cdot)u(\cdot)D.F) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} Y_k D_k F D_k u_k,
\end{aligned}$$

somit ist die Produktregel für  $\delta$  bewiesen.  $\square$

Wir kommen nun zur zweiten Frage, festzustellen ist also, ob  $\delta(u)$  mit dem stochastischen Integral für bestimmte  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  übereinstimmt. Zunächst werden wir eine Isometrieformel für  $\delta$  entwickeln, die wir anschließend mit der Isometrieformel für  $J(u)$  vergleichen.

**Satz 6.7.** Für  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  haben wir folgende Isometrieformel

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[\|u\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} D_k u_l D_l u_k \right] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k]. \quad (6.8)$$

*Beweis.* Bevor wir Satz 6.7 beweisen, werden wir ein paar Verbindungen zwischen  $\delta$  und  $D$  herstellen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta(D_k u) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_k u_n Y_n - \sum_{n=0}^{\infty} D_n (D_k u_n) Y_n^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D_k u_n Y_n - \sum_{n=0}^{\infty} D_k (D_n u_n) Y_n^2,
\end{aligned}$$

und somit erhalten wir unter Benutzung der Produktregel für  $D$

$$\begin{aligned}
D_k(\delta(u)) &= D_k \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n Y_n - D_n u_n Y_n^2 \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D_k(u_n Y_n) - \sum_{n=0}^{\infty} D_k(D_n u_n Y_n^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n D_k u_n + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \underbrace{D_k Y_n}_{\mathbb{1}_{\{k\}}(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) D_k u_n \underbrace{D_k Y_n}_{\mathbb{1}_{\{k\}}(n)} \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^2 D_k(D_n u_n) - \sum_{n=0}^{\infty} D_n u_n \underbrace{D_k Y_n^2}_{=\varphi_n \mathbb{1}_{\{k\}}(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} (2Y_k - \varphi_k) \underbrace{D_k(D_n u_n)}_{=0 \text{ für } n=k} \underbrace{D_k Y_n^2}_{=\varphi_n \mathbb{1}_{\{k\}}(n)} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} Y_n D_k u_n - \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^2 D_k(D_n u_n)}_{=\delta(D_k u)} + u_k - D_k u_k ((2Y_k - \varphi_k) + \varphi_k) \\
&= \delta(D_k u) + u_k - 2D_k u_k Y_k. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Sei nun  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  und  $F \in L^2(\Omega)$ , um Satz 6.7 zu beweisen benutzen wir die Adjunktion von  $\delta$  und  $D$ , d.h.

$$\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] = \mathbb{E}[F \delta(u)].$$

Unter Benutzung von (6.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta(u)^2] &= \mathbb{E}[\langle D\delta(u), u \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\delta(u)) u_k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\delta(D_k u) + u_k - 2D_k u_k Y_k)}_{=D_k(\delta(u))} u_k \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2 \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\delta(D_k u) u_k] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k] \\
&= \mathbb{E}[\|u\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\langle D_k u, D u_k \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k] \\
&= \mathbb{E}[\|u\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} D_k u_l D_l u_k \right] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k],
\end{aligned}$$

somit ist die Isometrieformel für  $\delta$  bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 6.8.** Die Isometrieformel für  $\delta$  aus Satz 6.7 wird auch Skorohodisometrieformel genannt und unterscheidet sich überraschenderweise von ihrer stetigen Version (vgl. [14]). Für  $u \in L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$  lautet die Skorohodisometrie in der stetigen Variante

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2] + \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty D_s u_t D_t u_s d_s d_t \right],$$

in der Gleichung (6.8) haben wir also ein Term extra. Der Grund dafür lässt sich in der Itô-Isometrie für multiple stochastische Integrale finden, während die stetige Version (siehe [13]) angegeben werden kann als

$$\mathbb{E}[I_n(f_n)I_m(g_m)] = n! \mathbb{1}_{\{n=m\}} \langle f_n, g_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)},$$

gilt nach Satz 2.13 in der diskreten Version

$$\mathbb{E}[J_n(f_n)J_m(g_m)] = n! \mathbb{1}_{\{n=m\}} \langle \mathbb{1}_{\Delta_n} f_n, g_m \rangle_{\ell^2(\mathbb{N}^n)}.$$

Durch das zusätzliche auftreten von  $\mathbb{1}_{\Delta_n}$  in der diskreten Itô-Isometrie, welche indirekt im Term  $\mathbb{E}[\delta(u)^2]$  von (6.8) auftritt, verkleinert sich der Wert der linken Seite gegenüber der stetigen Variante. Diesem Umstand wird daher durch den Abzug von „ $2 \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k]$ “ auf der rechten Seite von (6.8) entgegengewirkt.

**Beispiel 6.9.** Wir wollen nun ein Beispiel zu Satz 6.7 geben, in welchem die ausgleichende Rolle des letzten Terms aus (6.8) erkennbar ist. Es sei  $u_k = \mathbb{1}_{[0,1]}(\cdot)(Y_0 + Y_1) \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$ , dann erhalten wir nach (6.3)

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{1}_{[0,1]}(k)(Y_0 + Y_1)Y_k - \sum_{k=0}^\infty D_k(\mathbb{1}_{[0,1]}(k)(Y_0 + Y_1))Y_k^2 \\ &= Y_0^2 + Y_1 Y_0 + Y_0 Y_1 + Y_1^2 - Y_0^2 - Y_1^2 \\ &= 2Y_0 Y_1. \end{aligned}$$

Also erhalten wir für die linke Seite von (6.8)

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = 4 \underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2 Y_1^2]}_{=1} = 4,$$

für die Terme der rechten Seite gilt

$$\mathbb{E}[\|u\|_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^\infty u_k^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^1 (Y_0 + Y_1)^2 \right] \\
&= 2(\underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2]}_{=1} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_1^2]}_{=1} + 2\underbrace{\mathbb{E}[Y_0Y_1]}_{=0}) \\
&= 4,
\end{aligned}$$

und da  $D_0u_0 = D_0u_1 = D_1u_0 = D_1u_1 = 1$  folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} D_k u_l D_l u_k \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^1 D_k u_l D_l u_k \right] \\
&= \sum_{k,l=0}^1 1 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Allein mit den Termen der stetigen Version würden wir auf eine Ungleichheit kommen, allerdings korrigiert dies der letzte Term, wir erhalten letztendlich

$$\begin{aligned}
4 &= \mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[||u||_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} D_k u_l D_l u_k \right] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k] \\
&= 4 + 4 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k] \\
&= 8 - 2 \sum_{k=0}^1 \mathbb{E}[Y_k (Y_0 + Y_1) D_k (Y_0 + Y_1)] \\
&= 8 - 2(\underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2]}_{=1} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_0Y_1]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_1Y_0]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_1^2]}_{=1}) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun herausfinden, unter welchen Bedingungen das Skorohod Integral  $\delta(u)$  mit dem stochastischen Integral  $J(u)$  übereinstimmt, d.h.  $\delta(u) = J(u)$  und die Skorohodisometrie stimmt mit der Itô-Isometrie überein. Unter Betrachtung von (6.3) erkennt man schnell, dass  $D_k u_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine hinreichende Bedingung ist, sodass  $\delta(u) = J(u)$  gilt. Bei der Skorohodisometrie ist dies nicht so einfach ersichtlich, folgender Satz liefert uns aber eine Antwort auf diese Frage.

**Satz 6.10.** *Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$ , wenn  $D_k u_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt ist, so stimmt das Skorohodintegral  $\delta(u)$  mit dem diskreten stochastischen Integral  $J(u)$  überein, d.h.*

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k$$

vorausgesetzt die Folgen konvergieren in  $L^2(\Omega)$ . Ist nun zusätzlich  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2_{pre}(\Omega \times \mathbb{N})$ , so erhalten wir die Isometrie

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[||u||_{\ell^2(\mathbb{N})}^2],$$

also stimmen in diesem Fall  $\delta(u)$  und  $J(u)$  auf dem Raum der vorhersehbaren, quadratintegrierbaren Prozesse überein.

*Beweis.* Die erste Aussage ist klar und folgt direkt nach Anwendung der Bedingung. Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega \times \mathbb{N})$  und es gelte  $D_k u_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dann erhalten wir die Aussage direkt durch

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k - \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{D_k u_k}_{=0} Y_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Y_k.$$

Sei nun  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in L^2_{pre}(\Omega \times \mathbb{N})$ , dann gilt  $u_n \in \mathcal{F}_{n-1}$  und somit nach Satz 5.4  $D_k u_n = 0$  für alle  $k > n - 1$ , insbesondere also auch  $D_n u_n = 0$ . Somit folgt für die Skorohodisometrie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta(u)^2] &= \mathbb{E}[||u||_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} D_l u_k D_k u_l \right] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k D_k u_k] \\ &= \mathbb{E}[||u||_{\ell^2(\mathbb{N})}^2] + \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(D_k u_k)^2}_{=0} \right] + \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,l=0 \\ k>l}}^{\infty} D_l u_k \underbrace{D_k u_l}_{=0} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{k,l=0 \\ k<l}}^{\infty} \underbrace{D_l u_k D_k u_l}_{=0} \right] - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y_k u_k \underbrace{D_k u_k}_{=0}] \\ &= \mathbb{E}[||u||_{\ell^2(\mathbb{N})}^2], \end{aligned}$$

was gleichzusetzen ist mit der Itô-Isometrie aus Satz 2.5. □

Wir haben nun also gezeigt, dass das Skorohodintegral  $\delta(u)$  eine echte Erweiterung des diskreten stochastischen Integrals ist. Somit haben wir einen viel allgemeineren Integrationsbegriff in der Hand, mit dem man eine Vielzahl an Prozessen integrieren

kann, die nicht mehr notwendigerweise vorhersehbar sein müssen.

Im Laufe dieser Arbeit wurde somit eine umfangreiche Theorie des stochastischen Kalküls in diskreter Zeit entwickelt. Die stochastische Integration in n-Dimensionen wurde eingeführt, die vorhersehbare Repräsentation von Zufallsvariablen mit Hilfe der Clark-Ocone Formula entwickelt und die Integration von nicht vorhersehbaren Prozessen ermöglicht.

Im letzten Kapitel stellen wir nun einige Anwendungen dieser Theorie vor, wir formulieren eine diskrete Version von Itô's Lemma und werden das Optionshedgen im diskreten Black-Scholes Modell vorstellen.

## 7 Optionshedging im Cox-Ross-Rubinstein-Modell

### 7.1 Austausch der Variablen

Dieses Kapitel ist Anwendungen bisheriger Ergebnisse gewidmet, im ersten Abschnitt werden wir eine diskrete Version von Itô's Lemma (vgl. [15]) vorstellen, welche auch als Austausch der Variablen bekannt ist. Unter anderem ist dies für die vorhersehbare Repräsentation von Zufallsvariablen sehr hilfreich, dabei werden wir auch einen engen Zusammenhang mit der Clark-Ocone Formula und der Martingalrepräsentation (5.19) feststellen. Desweiteren ist sie aber auch für das hedgen von Optionen von Bedeutung, welches wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels behandeln. Folgender Satz formuliert die Aussage der diskreten Version.

**Satz 7.1.** *Sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$  ein Martingal und  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ . Dann lässt sich  $f$  darstellen zu*

$$f(M_n, n) = f(M_{-1}, -1) + \sum_{k=0}^n D_k f(M_k, k) Y_k + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] - f(M_{k-1}, k-1) \quad (7.1)$$

*Beweis.* Nach Satz 5.19 gibt es einen vorhersehbaren Prozess  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass

$$\begin{aligned} M_n &= M_{-1} + \sum_{k=0}^n u_k Y_k \\ \implies M_n &= M_{n-1} + u_n Y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) &= f(M_{k-1} + u_k Y_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \left( f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right), \tag{7.2}
\end{aligned}$$

da aber nach (3.4)

$$\begin{aligned}
Y_k &= \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \sqrt{\frac{q_k}{p_k}} - \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \\
\iff \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} &= \sqrt{\frac{p_k}{q_k}} Y_k + \frac{p_k}{q_k} \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}},
\end{aligned}$$

lässt sich (7.2) umformen zu

$$\begin{aligned}
f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) &= \sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) Y_k \\
&\quad + \frac{p_k}{q_k} \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \left( f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{p_k}{q_k}} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) Y_k \\
&\quad + \frac{1}{q_k} \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}]. \tag{7.3}
\end{aligned}$$

Analog gilt für (7.2) mit  $\mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} = \frac{q_k}{p_k} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} - \sqrt{\frac{q_k}{p_k}} Y_k$

$$\begin{aligned}
f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) &= -\sqrt{\frac{q_k}{p_k}} \left( f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) Y_k \\
&\quad + \frac{1}{p_k} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}]. \tag{7.4}
\end{aligned}$$

Letzendlich gilt für den Gradienten

$$D_k f(M_k, k) = \sqrt{p_k q_k} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) \right),$$

womit sich nach einsetzen von (7.3) und (7.4) die Aussage des Satzes ergibt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f(M_n, n) - f(M_{-1}, -1) &= \sum_{k=0}^n f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) \\
&= \sum_{k=0}^n p_k(f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1)) + q_k(f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1)) \\
&= \sum_{k=0}^n -\sqrt{p_k q_k} \left( f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) Y_k \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&\quad + \sqrt{p_k q_k} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1}, k-1) \right) Y_k \\
&\quad + \mathbb{1}_{\{X_k=-1\}} \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=0}^n \sqrt{p_k q_k} \left( f(M_{k-1} + u_k \sqrt{\frac{q_k}{p_k}}, k) - f(M_{k-1} - u_k \sqrt{\frac{p_k}{q_k}}, k) \right) Y_k \\
&\quad + \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=0}^n D_k f(M_k, k) Y_k + \mathbb{E}[f(M_k, k) - f(M_{k-1}, k-1) | \mathcal{F}_{k-1}].
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 7.2.** Es sei  $M_n = \sum_{i=0}^n Y_i$  und  $f(M_n, n) = nM_n$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n D_k f(M_k, k) Y_k &= \sum_{k=0}^n D_k \underbrace{\left( k \sum_{i=0}^n Y_i \right)}_{=k} Y_k = k Y_k, \\
\sum_{k=0}^n \mathbb{E}[f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[k M_k | \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=0}^n k M_{k-1} \text{ und} \\
f(M_{-1}, -1) - \sum_{k=0}^n f(M_{k-1} - k - 1) &= - \sum_{k=1}^n f(M_{k-1}, k-1) = - \sum_{k=1}^n (k-1) M_{k-1}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Zerlegung von  $f(M_n, n)$  zu

$$\begin{aligned}
f(M_n, n) &= \sum_{k=0}^n k Y_k + \sum_{k=0}^n k M_{k-1} - \sum_{k=1}^n (k-1) M_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^n M_{k-1} - k Y_k.
\end{aligned}$$

Satz 7.1 gibt also eine Zerlegung von Funktionen von Martingalen an, mit der wir die direkte Berechnung von  $f(M_n, n)$  umgehen können, welches sich oft als hilfreich erweist. Eine Anwendung dazu findet sich im nächsten Abschnitt, bei dem es um das hedgen von Optionen geht.

Im Laufe dieser Arbeit haben wir bereits weitere Darstellungen von Zufallsvariablen, wie die Martingalrepräsentation (5.19) und die Clark-Ocone Formula (5.13), gesehen, diese wollen wir nun mit den Ergebnissen aus Satz 7.1 vergleichen. Es sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\Omega)$  und  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ , dann gilt nach Satz 7.1

$$\begin{aligned} f(M_n, n) &= f(M_{-1}, -1) + \sum_{k=0}^n \underbrace{D_k f(M_k, k)}_{\in \mathcal{F}_{k-1}} Y_k + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] - f(M_{k-1}, k-1) \\ &= f(M_{-1}, -1) + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] - f(M_{k-1}, k-1), \end{aligned}$$

so stellt man fest, dass diese Darstellung der Martingalrepräsentation (5.19) sehr ähnlich ist. Den Term  $\mathbb{E}[f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] - f(M_{k-1}, k-1)$  könnte man als „Fehlerterm“ interpretieren, der dafür steht, wie „weit“  $f(M_n, n)$  davon entfernt ist, ein Martingal zu sein. Ist dieser Term Null, so handelt es sich bei  $(f(M_n, n))_{n \in \mathbb{N}}$  logischerweise um ein Martingal und (7.1) lässt sich als

$$f(M_n, n) = f(M_{-1}, -1) + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] Y_k$$

schreiben. Somit stellt man fest, dass in diesem Fall Satz 7.1 mit der Martingalrepräsentation (5.19) übereinstimmt. In dem Fall, dass  $(f(M_n, n))_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal ist, gilt weiterhin nach (5.19) für  $k \leq n$

$$f(M_n, n) = f(M_k, k) + \sum_{i=k+1}^n u_i Y_i$$

für einen vorhersehbaren Prozess  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_k f(M_n, n) | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E} \left[ D_k \left( f(M_k, k) + \sum_{i=k+1}^n u_i Y_i \right) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \mathbb{E}[D_k f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}] + \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}[\underbrace{D_k u_i}_{\in \mathcal{F}_{i-1}} \underbrace{\mathbb{E}[Y_i | \mathcal{F}_{i-1}]}_{=0} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[D_k f(M_k, k) | \mathcal{F}_{k-1}], \end{aligned}$$

und somit lässt sich (7.1) umschreiben zu

$$f(M_n, n) = f(M_{-1}, -1) + \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[D_k f(M_n, n) | \mathcal{F}_{k-1}],$$

was gleichzusetzen ist mit der Clark-Ocone Formula (5.13). Somit stimmen im Fall, dass  $(f(M_n, n))_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal ist, die diskrete Version von Itô's Lemma aus Satz 7.1, die Clark-Ocone Formula und die Martingalrepräsentation alle überein. Der Abschluss dieser Arbeit wird Anwendungen gewidmet sein, die auf diesen zentralen Ergebnissen aufgebaut sind, dabei beschäftigen wir uns mit dem hedgen von Optionen, welche ein zentrales Thema in der Finanzmathematik darstellen.

## 7.2 Hedging im CRR Modell

In diesem Abschnitt werden wir eine Anwendung unserer Ergebnisse dieser Arbeit vorstellen, Ziel ist es eine Hedgingstrategie für einen beliebigen Claim zu bestimmen. Dabei versteht man unter einem Hedge eine Investitionsstrategie, die ein Finanzgeschäft gegen Risiken absichert. Als Modell wählen wir das Cox-Ross-Rubinstein-Modell (diskrete Version des Black-Scholes Modells), welches 1979 von John C. Cox, Stephen Ross und Mark Rubinstein entwickelt wurde. Zunächst werden wir das Modell vorstellen und den Begriff des Hedgens mathematisch formulieren, woraufhin wir darauf hinarbeiten eine solche Strategie explizit anzugeben. Zu guter Letzt wenden wir eine solche Hedgingstrategie auf eine europäische Put-Option an.

Es sei  $(A_k)_k$  eine risikolose Anlage mit Anfangswert  $A_{-1}$ , welche definiert ist zu

$$A_n = A_{-1} \prod_{k=0}^n (1 + r_k), \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine deterministische Folge von Zahlen ist mit  $r_k > -1$ , welche als der Zins auf unsere Anlage angesehen werden kann. Weiterhin betrachten wir eine Aktie  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Anfangswert  $S_{-1}$ , welche durch

$$S_n = \begin{cases} (1 + b_n)S_{n-1} & \text{falls } X_n = 1, \\ (1 + a_n)S_{n-1} & \text{falls } X_n = -1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.5)$$

gegeben ist. Dabei sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deterministische Folgen von Zahlen, sodass

$$-1 < a_k < r_k < b_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.6)$$

Somit erhalten wir einen höheren Profit als bei einer risikolosen Geldanlage, falls  $X_n = 1$ , und einen geringeren im Fall  $X_n = -1$ . Träfe diese Bedingung nicht zu,

so wäre entweder die Aktie ( $a_k < b_k < r_k$ ), bzw. die Geldanlage ( $r_k < a_k < b_k$ ) unattraktiv.

Bevor wir uns nun weitergehend mit dem CRR Modell beschäftigen, geben wir zunächst einige Definitionen, die uns das Hedgen von Finanzgeschäften mathematisch verdeutlichen.

**Definition 7.3.** Ein Claim  $C$  ist eine Zufallsgröße  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir als Auszahlung zum Zeitpunkt  $N \in \mathbb{N}$  betrachten.

**Definition 7.4.** Eine Portfoliostrategie ist ein Paar von vorhersehbaren Prozessen  $(\eta)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei  $\eta_k$  für die Anzahl an Einheiten steht, welche wir in der Periode  $(k, k+1]$  in die Aktie  $S_k$  investieren, und  $\zeta_k$  analog die Einheiten der Geldanlage  $A_k$  repräsentiert.

Der Wert des Portfolios  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  zur Zeit  $k \geq -1$  ist durch

$$V_k = \zeta_{k+1}A_k + \eta_{k+1}S_k, \quad k \geq -1,$$

gegeben, und der des diskontierten ist definiert zu

$$\tilde{V}_k = V_k \prod_{i=0}^k (1 + r_i)^{-1}, \quad k \geq -1. \quad (7.7)$$

**Definition 7.5.** Ein Portfolio  $(\eta_k, \zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt selbstfinanzierend, wenn

$$A_k(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + S_k(\eta_{k+1} - \eta_k) = 0, \quad k \geq 0.$$

Bei einem selbstfinanzierenden Portfolio werden also nie Geldanteile hinzugefügt oder weggenommen, sondern lediglich die Anteile der Aktie und der Anlage untereinander getauscht. Ist das Portfolio  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  selbstfinanzierend, so impliziert dies zudem

$$V_k = \zeta_k A_k + \eta_k S_k, \quad k \geq 0.$$

Sei nun  $C$  ein Claim, d.h.  $C$  ist eine  $\mathcal{F}_N$ -meßbare Zufallsvariable auf  $\Omega$ . Unsere Ambition liegt jetzt darin eine Hedgingstrategie  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  für  $C$  zu bestimmen, demzufolge soll

$$C = V_N = \zeta_N A_N + \eta_N S_N$$

gelten. Zunächst stellt sich die Frage, ob eine solche Strategie überhaupt existiert, und wenn ja, ob das für jeden beliebigen Claim gilt.

**Definition 7.6.** Ein Claim  $C$  heißt erreichbar, falls eine Hedgingstrategie für  $C$  existiert, d.h. diese Strategie  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  erfüllt

$$C = V_N = \zeta_N A_N + \eta_N S_N.$$

Ein Finanzmarkt heißt vollständig, wenn jeder Claim erreichbar ist.

Wir wollen nun die Frage, ob eine solche Hedgingstrategie in unserem Modell existiert, beantworten. Zunächst gilt nach iterierter Anwendung von (7.5) für die Aktie

$$S_n = S_{-1} \prod_{k=0}^n \sqrt{(1+b_k)(1+a_k)} \left( \frac{1+b_k}{1+a_k} \right)^{\frac{x_k}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dementsprechend gilt für den diskontierten Aktienpreis

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= S_n \prod_{k=0}^n (1+r_k)^{-1} \\ &= S_{-1} \prod_{k=0}^n \left( \frac{1}{1+r_k} \sqrt{(1+b_k)(1+a_k)} \left( \frac{1+b_k}{1+a_k} \right)^{\frac{x_k}{2}} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nun gilt nach [7] unter der Bedingung (7.6), dass  $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal ist bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq -1}$  unter dem Maß  $\mathbb{P}^*$ , welches gegeben ist durch

$$p_k = \frac{r_k - a_k}{b_k - a_k}, \quad q_k = \frac{b_k - r_k}{b_k - a_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Somit erhalten wir unter Anwendung von Satz 7.1, der Clark-Ocone formula (5.15) oder der Martingalrepräsentation (5.19) die Martingaldarstellung für den diskontierten Aktienpreis

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= S_{-1} + \sum_{k=0}^n Y_k D_k \tilde{S}_k \\ &= S_{-1} + \sum_{k=0}^n Y_k \sqrt{p_k q_k} \left( \tilde{S}_{k-1} \frac{1+b_k}{1+r_k} - S_{k-1} \frac{1+a_k}{1+r_k} \right) \\ &= S_{-1} + \sum_{k=0}^n \tilde{S}_{k-1} \sqrt{p_k q_k} \frac{b_k - a_k}{1+r_k} Y_k. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Weiterhin zeigt [7], dass in diesem Fall der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist, daraus können wir schlussfolgern, dass im CRR Modell jeder Claim erreichbar ist,

also für jeden beliebigen Claim eine Hedgingstrategie existiert. Diese zu bestimmen soll nun unser nächstes Ziel sein, dafür benutzen wir von nun an das Maß  $\mathbb{P}^*$ . Der Erwartungswert unter diesem Maß wird demzufolge mit  $\mathbb{E}^*$  notiert.

Folgender Satz gibt eine Zerlegung des Portfolios  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  an, welche zur Bestimmung der Hedgingstrategie behilflich sein wird.

**Satz 7.7.** *Ist das Portfolio  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$  selbstfinanzierend, so erhalten wir die Zerlegung*

$$V_n = V_{-1} \prod_{k=0}^n (1 + r_k) + \sum_{i=0}^n \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i \prod_{k=i+1}^n (1 + r_k), \quad (7.9)$$

sowie

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1}. \quad (7.10)$$

*Beweis.* Zunächst gilt

$$\begin{aligned} A_i - A_{i-1} &= A_{-1} \left( \prod_{k=0}^i (1 + r_k) - \prod_{k=0}^{i-1} (1 + r_k) \right) \\ &= A_{-1} \prod_{k=0}^{i-1} (1 + r_k) ((1 + r_i) - 1) \\ &= r_i A_{i-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_i - S_{i-1} &= S_{-1} ((1 + b_n) \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} + (1 + a_n) \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} - 1) \\ &= S_{i-1} (b_n \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} + a_n \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}). \end{aligned}$$

Da das Portfolio selbstfinanzierend ist, gilt daher

$$\begin{aligned} V_i - V_{i-1} &= \zeta_i (A_i - A_{i-1}) + \eta_i (S_i - S_{i-1}) \\ &= \underbrace{\zeta_i r_i A_{i-1}}_{=r_i V_i - r_i \eta_i S_{i-1}} + \eta_i S_{i-1} (b_n \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} + a_n \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}) \\ &= \eta_i S_{i-1} (b_n \mathbb{1}_{\{X_n=1\}} + a_n \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}} - r_i) + r_i V_{i-1} \\ &= \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i + r_i V_{i-1}, \end{aligned}$$

da nach (3.4)

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_i q_i}(b_i - a_i)Y_i &= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}}(b_i - a_i)q_i - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}(b_i - a_i)p_i \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}}(b_i - r_i) - \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}(r_i - a_i) \\
&= \mathbb{1}_{\{X_n=1\}}b_i + \mathbb{1}_{\{X_n=-1\}}a_i - r_i.
\end{aligned}$$

Demzufolge erhalten wir

$$V_i - V_{i-1} - r_i V_{i-1} = \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i. \quad (7.11)$$

Für den diskontierten Wert erhalten wir daraus eine Darstellung zu

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_i - \tilde{V}_{i-1} &= \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1} V_i - \prod_{k=0}^{i-1} (1 + r_k)^{-1} V_{i-1} \\
&= \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1} (V_i - (1 + r_i) V_{i-1}) \\
&= \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1} (\eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i),
\end{aligned}$$

woraus die Zerlegung von  $V_n$  mittels

$$\begin{aligned}
V_n &= \tilde{V}_n \prod_{k=0}^n (1 + r_k) \\
&= \prod_{k=0}^n (1 + r_k) \left[ \tilde{V}_{-1} + \sum_{k=0}^n \tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} \right] \\
&= V_{-1} \prod_{k=0}^n (1 + r_k) + \sum_{k=0}^n (\eta_k S_{k-1} \sqrt{p_k q_k} (b_k - a_k) Y_k) \prod_{k=i+1}^n (1 + r_k)
\end{aligned}$$

folgt. Die Zerlegung des diskontierten Wertes des Portfolios ergibt sich dementsprechend zu

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_n &= \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n \tilde{V}_i - \tilde{V}_{i-1} \\
&= \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Damit haben wir nun alles zusammen, um für jeden beliebigen Claim eine Hedgingstrategie zu bestimmen

**Satz 7.8.** *Es sei  $C \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_N)$  ein Claim und*

$$\eta_n = \frac{1}{S_{n-1} \sqrt{p_n q_n} (b_n - a_n)} \mathbb{E}^*[D_n C | \mathcal{F}_{n-1}] \prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)^{-1}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (7.12)$$

sowie

$$\zeta_n = A_n^{-1} \left( \prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)^{-1} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_n] - \eta_n S_n \right), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7.13)$$

Dann ist das Portfolio  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq n}$  selbstfinanzierend und gibt eine Hedgingstrategie für  $C$  an, d.h.  $V_N = C$  mit

$$V_n = \zeta_n A_n + \eta_n S_n = \prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)^{-1} \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_n], \quad 0 \leq n \leq N. \quad (7.14)$$

*Beweis.* Sei  $(\eta_k)_{0 \leq k \leq N}$  gegeben durch (7.12),  $\eta_{-1} = 0$  und  $(\zeta_n)_{-1 \leq n \leq N}$  definiert durch

$$\begin{aligned} \zeta_{-1} &= \frac{\mathbb{E}^*[C]}{A_{-1}} \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} \text{ und} \\ \zeta_{k+1} &= \zeta_k - \frac{(\eta_{k+1} - \eta_k) S_k}{A_k}, \quad -1 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Dann ergibt sich aus (7.15) sofort, dass  $(\eta_k, \zeta_k)_{-1 \leq k \leq N}$  selbstfinanzierend ist, da

$$A_k (\zeta_{k+1} - \zeta_k) + S_k (\eta_{k+1} - \eta_k) = 0, \quad -1 \leq k \leq N-1.$$

Sei nun  $(V_n)_{n \geq -1}$  der Werteprozess des Portfolios  $(\eta_n, \zeta_n)_{-1 \leq n \leq N}$  gegeben durch

$$V_{-1} = \mathbb{E}^*[F] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1}, \text{ und } V_n = \zeta_n A_n + \eta_n S_n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Da  $(\eta_n, \zeta_n)_{-1 \leq n \leq N}$  selbstfinanzierend ist, gilt nach (7.10) für den diskontierten Werteprozess (vgl. 7.7)

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) Y_i \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1}, \quad -1 \leq n \leq N.$$

In Kombination mit der Clark-Ocone formula (5.15) folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_n] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} &= \mathbb{E}^* \left[ \mathbb{E}^*[C] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} + \sum_{i=0}^N \underbrace{Y_i}_{\in \mathcal{F}_i} \underbrace{\mathbb{E}^*[D_i C|\mathcal{F}_{i-1}]}_{\in \mathcal{F}_{i-1}} \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} | \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}^*[C] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} + \sum_{i=0}^n Y_i \mathbb{E}^*[D_i C|\mathcal{F}_{i-1}] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} \\ &\quad + \sum_{i=n+1}^N \mathbb{E}^* \left[ \underbrace{\mathbb{E}^*[Y_i|\mathcal{F}_{i-1}]}_{=0} \mathbb{E}^*[D_i C|\mathcal{F}_{i-1}] | \mathcal{F}_n \right] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} \\ &= \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n Y_i \mathbb{E}^*[D_i C|\mathcal{F}_{i-1}] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

aus der Definition von  $(\eta_n)_{0 \leq n \leq N}$  ergibt sich nun

$$\mathbb{E}^*[D_i C|\mathcal{F}_{i-1}] = \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) \prod_{k=i+1}^N (1 + r_k),$$

somit lässt sich (7.16) umstellen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_n] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1} &= \tilde{V}_{-1} + \sum_{i=0}^n Y_i \eta_i S_{i-1} \sqrt{p_i q_i} (b_i - a_i) \prod_{k=0}^i (1 + r_k)^{-1} \\ &= \tilde{V}_n. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$V_n = \tilde{V}_n \prod_{k=0}^n (1 + r_k) = \mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_n] \prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)^{-1},$$

woraus sich sofort  $V_N = C$  ergibt. Zuguterletzt zeigen wir, dass es sich bei  $(\zeta_n)_{0 \leq n \leq N}$  um den in (7.15) definierten Prozess handelt. Dies folgt aus der Definition von  $V_n$

$$\begin{aligned}
V_n &= \zeta_n A_n + \eta_n S_n \\
\Leftrightarrow \zeta_n &= A_n^{-1} (V_n - \eta_n S_n) \\
&= A_n^{-1} \left( \mathbb{E}^*[C | \mathcal{F}_n] \prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)^{-1} - \eta_n S_n \right),
\end{aligned}$$

somit handelt es sich bei  $(\eta_n, \zeta_n)_{0 \leq n \leq N}$  aus (7.12) und (7.13) um eine selbstfinanzierende Hedgingstrategie für den Claim  $C$ . □

Wir haben also gezeigt, dass es im Cox-Ross-Rubinstein-Modell zu jedem Claim eine Hedgingstrategie gibt, welche wir in Satz 7.8 explizit angeben haben. Das Startkapital berechneten wir zu

$$V_{-1} = \mathbb{E}^*[F] \prod_{k=0}^N (1 + r_k)^{-1}, \quad (7.17)$$

mit diesem Einsatz ist es also immer möglich über die Strategie  $(\eta_n, \zeta_n)_{0 \leq n \leq N}$  einen beliebigen Claim  $C \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_N)$  zu hedgen.

Im abschließenden Beispiel werden wir diese Theorie anwenden um eine Europäische Put-Option zu hedgen.

**Beispiel 7.9.** Es sei  $S_n$  ein Aktienpreis im CRR Modell mit Anfangswert  $S_{-1}$  und  $C \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_N)$  eine europäische Put-Option mit Fälligkeit  $N \in \mathbb{N}$  und Strike  $K \in \mathbb{R}$ . Eine Put-Option gibt dem Halter die Möglichkeit zur Fälligkeit  $N$  zu entscheiden, ob er die Aktie zum Preis  $S_N$ , oder zum Preis  $K$  verkauft.

Demzufolge wird Gewinn erzielt, wenn der Aktienpreis niedriger ist, als der Strikepreis, da er die Aktie zu einem Wert verkaufen kann, der über dem Marktwert liegt. Daher zielt eine Europäische Put-Option auf einen fallenden Aktienkurs ab. Als Payoff einer europäischen Put-Option ergibt sich

$$C = \max(K - S_N, 0) =: (K - S_N)_+.$$

Sei nun  $N = 52$ ,  $S_{-1} = 100$ ,  $A_{-1} = 1$  und  $K = 167$ , sowie  $r_k \equiv 0.1$ ,  $a_k \equiv -0.04$ ,  $b_k \equiv 0.06$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
p_k &= \frac{r_k - a_k}{b_k - a_k} \equiv \frac{1}{2} \text{ und} \\
q_k &= \frac{b_k - r_k}{b_k - a_k} \equiv \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$



Abbildung 7: Payoff einer europäischen Put-Option mit Strike K.

Wir wollen nun eine Hedgingstrategie für  $C = (167 - S_{52})_+$  berechnen und den Preisprozess des resultierenden Portfolios bestimmen. Zunächst berechnen wir das Startkapital  $V_{-1}$ , welches wir in das Projekt investieren müssen. Da  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , Bernoulliverteilt ist berechnet sich der Erwartungswert der europäischen Put-Option zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^*[C] &= \mathbb{E}^*[(K - S_N)_+] \\
 &= \mathbb{E}^*[(K - S_{-1} \prod_{k=0}^n \sqrt{(1+b)(1+a)} \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{\frac{X_k}{2}})_+] \\
 &= \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} p^{N+1-i} q^i (K - S_{-1} (1+b)^{N+1-i} (1+a)^i)_+ \\
 &= \sum_{i=0}^{53} \binom{53}{i} 0.5^{N+1-i} 0.5^i (167 - 100 \cdot (1.06)^{53-i} (0.96)^i)_+ \\
 &= 23.45,
 \end{aligned}$$

somit erhält man nach (7.17)

$$\begin{aligned}
V_{-1} &= \mathbb{E}^*[C] \prod_{k=0}^N (1+r_k)^{-1} \\
&= 23.45 \cdot \prod_{k=0}^{52} (1.01)^{-1} \\
&= 13.84,
\end{aligned}$$

wobei die Berechnungen mit Matlab durchgeführt wurden. Der Claim  $C$  hat also einen erwarteten Gewinn von 23.45 und wir müssen am Anfang 13.84 Einheiten investieren, um mit unserer Hedgingstrategie  $C$  zu erreichen. Wie man sich leicht überlegen kann, ist durch  $\eta_k \equiv 0$  und  $\zeta_k \equiv 13.84$ ,  $0 \leq k \leq 52$ , eine triviale Hedgingstrategie gegeben, bei der wir einfach das gesamte Startkapital über den kompletten Zeithorizont in die risikofreie Anlage investieren.

Unter Benutzung von Satz 7.8 wollen wir nun eine nichttriviale Hedgingstrategie bestimmen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[C|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}^*[(K - S_N)_+|\mathcal{F}_k] \\
&= \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} p^{N-k-i} q^i \left( K - S_{-1}(1+b)^{N-k-i}(1+a)^i \prod_{j=0}^k \sqrt{(1+b)(1+a)} \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\frac{x_j}{2}} \right)_+,
\end{aligned}$$

wobei unter  $\mathcal{F}_k$  bereits der Wert von  $X_0, \dots, X_k$  bekannt ist. Analog berechnen wir nach (5.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[D_n C|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}^*[D_n(K - S_N)_+|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \sqrt{pq} \mathbb{E}^* \left[ \left( K - (1+b)S_{-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^N \sqrt{(1+b)(1+a)} \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\frac{x_i}{2}} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&\quad - \sqrt{pq} \mathbb{E}^* \left[ \left( K - (1+a)S_{-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^N \sqrt{(1+b)(1+a)} \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\frac{x_i}{2}} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= \sqrt{pq} \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} p^{N-n-i} q^i \left( K - (1+b)S_{-1}(1+b)^{N-n-i}(1+a)^i \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{(1+b)(1+a)} \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\frac{x_j}{2}} \right)_+ \\
&\quad - \sqrt{pq} \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} p^{N-n-i} q^i \left( K - (1+a)S_{-1}(1+b)^{N-n-i}(1+a)^i \prod_{j=0}^{n-1} \sqrt{(1+b)(1+a)} \left( \frac{1+b}{1+a} \right)^{\frac{x_j}{2}} \right)_+.
\end{aligned}$$

Auf der Grundlage des Bernoulliprozesses  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  können wir nun mithilfe von Satz 7.8 sukzessiv  $\zeta_k$ ,  $\eta_k$  und  $V_k$  berechnen, damit erhalten wir sowohl unsere Hedgingstrategie  $(\eta_k, \zeta_k)_{0 \leq k \leq N}$ , als auch den Wert des Portfolios  $(V_k)_{0 \leq k \leq N}$ . Der Verlauf dieser Realisierungen wurde mit Matlab simuliert und ist in Abbildung 8 und 9 dargestellt.

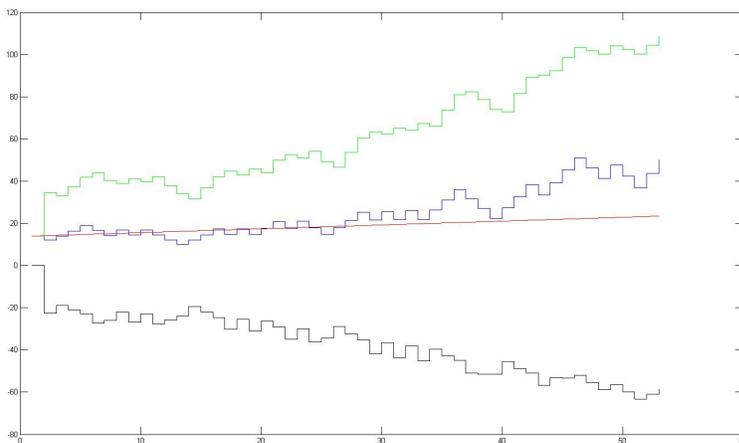


Abbildung 8: Möglicher Verlauf von  $V_n$ ,  $\zeta_n A_n$  und  $\eta_n S_n$ .

In Abbildung 8 ist  $V_n$  in blau,  $\zeta_n A_n$  in grün,  $\eta_n S_n$  in schwarz und die risikolose Anlage mit Startwert  $V_{-1}$  in rot dargestellt (der Endwert der Anlage ist  $\mathbb{E}^*[C]$ ). Negative Werte von  $\zeta_n$  und  $\eta_n$  lassen sich so interpretieren, dass man entweder einen Kredit aufnimmt bzw. Aktienanteile verkauft, diesen Überschuss investiert man dann wieder (entweder in die Aktie oder in die Geldanlage).

Dies beobachtet man auch gleich im ersten Investitionsschritt, wir verkaufen Aktienanteile und investieren diese in die risikolose Geldanlage, diese Strategie verfolgen wir den gesamten Zeitraum über. Somit haben wir die zugrundeliegenden Risiken vermindert indem wir weder allein auf die Geldanlage, noch auf die Entwicklung der Aktie setzen. Befinden wir uns mit unserem Portfolio  $V_n$  über der roten Linie, so haben wir zeitweise Gewinn erzielt, andersrum machen wir Verlust. Bei dieser Strategie haben wir also viel mehr Spielraum, als bei einer reinen Geldanlage bzw. Erwerb der Option, wir können auch jederzeit die Investitionen beenden, diese Möglichkeit haben wir beim Erwerb der Option nicht. Dies ist allerdings nur ein mögliches Szenario, welches uns zwar das Prinzip des hedgens veranschaulicht, aber keine Information über die Verteilung von  $C = (K - S_N)_+$  gibt.

Diese Information liefert Abbildung 9, wo die Endwerte von  $V_N = C$  nach 100000 Durchläufen in einem Histogramm abgebildet sind. Man erkennt, dass in fast 50% der Fälle der Payoff der europäischen Put-Option gleich Null ist, er aber auch mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 10% mehr als 70 beträgt. Verfolgt man nun die Hedgingstra-

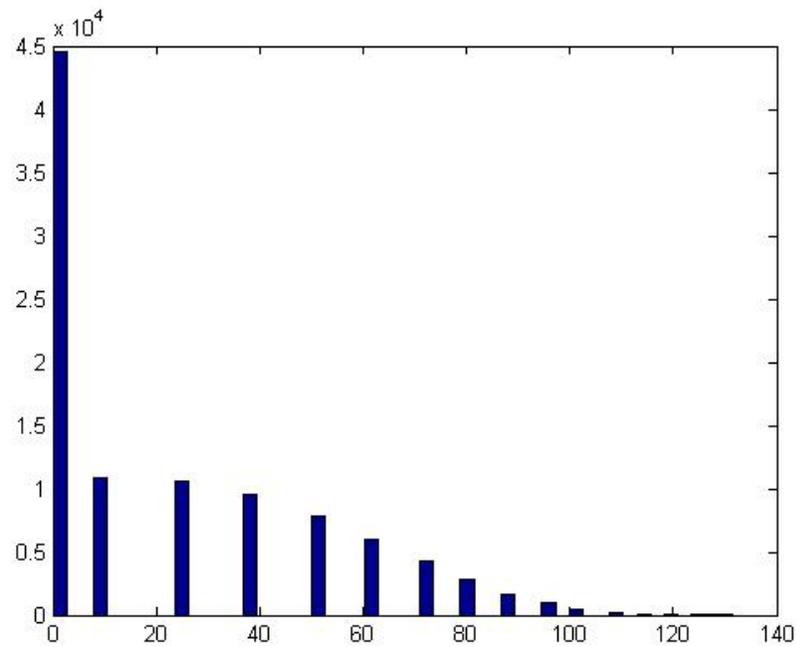


Abbildung 9: Histogramm für  $C = V_N$  für 100000 Realisierungen.

ategie  $(\zeta_n, \eta_n)_{0 \leq n \leq N}$  ist es also jedem Investor selbst überlassen zu entscheiden, ob er an einem Zeitpunkt  $0 \leq n \leq N$  aussteigt oder nicht. Diese Flexibilität der Abwägung von möglichem Gewinn und Risiko macht eine Hedgingstrategie so attraktiv.

## Literatur

- [1] S. Attal und A. Belton. The chaotic-representation property for a class of normal martingales. *Probability Theory and Related Fields*, 139 (3-4). pp. 543-562. ISSN 0178-8051
- [2] M. Émery. A discrete approach to the chaotic representation property. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, volume 1755 of *Lecture Notes in Math.*, pages 123-138. Springer, Berlin, 2001. MR1837280
- [3] M. Émery. On the chaotic representation property for martingales. *Probability theory and Mathematical Statistics. Lectures presented at the semester held in St-Petersburg, Russia, March 2 - April 23, 1993*. Gordon and Breach, 1996.
- [4] M. Émery. On the Azéma Martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII Lecture Notes in Mathematics Volume 1372*, 1989, pp 66-87.
- [5] P. Feinsilver und R. Schott. *Krawtchouk polynomials and finite probability theory. Probability measure s on groups X*, Plenum Press, New York, 1991.
- [6] H. Holden, T. Lindstrøm, B. Øksendal, und J. Ubøe. Discrete Wick calculus and stochastic functional equations. *Potential Anal.*, 1(3):291-306, 1992. MR1245232
- [7] M. Keller-Ressel, *Finanzmathematik. Vorlesung WiSe 13/14*, TU Berlin.
- [8] Klenke, A: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2. korrigierte Auflage, Springer (2006).
- [9] D. Lamberton und B. Lapeyre. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996. MR1422250
- [10] M. Leitz-Martini. A discrete Clark-Ocone formula. *Maphysto Research Report No 29*, 2000.
- [11] N. Privault und W. Schoutens. Discrete chaotic calculus and covariance identities. *Stochastics and Stochastics Reports*, 72:289-315, 2002. Eurandom Report 006, 2000. MR1897919
- [12] N. Privault, *Stochastic analysis of Bernoulli processes*, *Probab. Surv.* 5 (2008) 435-483.
- [13] N. Privault and W. Schoutens. *Krawtchouk polynomials and iterated stochastic integration*. Technical Report 006, Eurandom, March 2000.
- [14] N. Privault. *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [15] S. Roelly. *Stochastische Analysis. Vorlesung WiSe 14/15*, Universität Potsdam.

- [16] M. Sanz-Solé. Applications of Malliavin Calculus to Stochastic Partial Differential Equations. Fundamental Sciences, EPFL Press, Lausanne, distributed by CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [17] D. Stroock. Doing analysis by tossing a coin. *Math. Intelligencer*, 22(2):66-72, 2000. MR1764269
- [18] C. Wang, Y. Lu and H. Chai. An alternative approach to Privault's discrete-time chaotic calculus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 373 (2011) 643-654.
- [19] C. Wang, Q. Han and Y. Zhou. Convolution of functionals of discrete-time normal Martingales. *Bull. Aust. Math. Soc.* 86 (2012), 224-231.
- [20] D. Werner. *Funktionalanalysis*. 7. korrigierte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011).

## 8 Quellcodeverzeichnis

### Abbildung 1 und 2 :

```
function [stint] = aktie (N,n)

for k=1:n
%for i=1:N
%   p(i)=(N+1-i)/(N+1);
%end

for i=1:N
    time(i)=i;
end
p(1)=1/2;
p(2)=1/2;
for i=1:N
    x=rand;
    if i >=3 && y(i-1)>0 && y(i-2)>0
        p(i)=p(i-1)^2;
    elseif i >=3 && y(i-1)<0 && y(i-2)<0
        p(i)=1-(1-p(i-1))^2;
    else
        p(i)=1/2;
    end

    if x <=p(i)
        y(i)=((1-p(i))/p(i))^(1/2);
    else
        y(i)=- (p(i)/(1-p(i)))^(1/2);
    end
end

u(1)=100;

for i=2:N
    if y(i-1)<0
        u(i)=u(i-1)-1;
    else
        u(i)=u(i-1)+1;
    end
end

for i=1:N
    stint_inkr(i)=u(i)*y(i);
end

stint(1)=stint_inkr(1);

for i=2:N
    stint(i)=stint(i-1)+stint_inkr(i);
```

```
end
```

```
hold on  
stairs(time,stint);  
end
```

### Abbildung 3 und 4 :

```
function [aktieint] = aktieint(N,n)  
  
for k=1:n  
    Z=aktie(N,1);  
    aktieint(k)=Z(N);  
end
```

### Abbildung 5 :

```
function [stint] = fbern(N,n)  
  
for i=1:N  
    time(i)=i;  
end  
for k=1:n  
  
    for k=1:N  
        Z=bernoulli(50);  
  
        for i=1:50  
            if Z(i)==1  
                y(i)=1;  
            else  
                y(i)=-1;  
            end  
        end  
    end  
end  
  
    stint_inkr(1)=0;  
    stint_inkr(2)=factorial(2)*symf(1,2)*y(1)*y(2);  
  
    for l=3:N  
        stint_inkr(1)=0;  
        for i=1:l-1  
            for j=i+1:l  
                stint_inkr(1)=stint_inkr(1)+symf(i,j)*y(i)*y(j);  
            end  
        end  
    end  
  
    stint_inkr(1)=factorial(2)*stint_inkr(1);  
    for h=1:l-2  
        stint_inkr(1)=stint_inkr(1)-stint_inkr(1-h);  
    end
```

```

        end

end

stint(1)=stint_inkr(1);

for i=2:N
    stint(i)=stint(i-1)+stint_inkr(i);
end

hold on
stairs(time,stint);
end

```

### Abbildung 6 :

```

function [fbernint]=fbernint(N,n)

for k=1:n
    Z=fbern(N,1);
    fbernint(k)=Z(N);
end

```

### Abbildung 8 und 9 :

```

function [stint] = hedge (N)

for i=1:N+1
    time(i)=i;
end

r=0.01;
a=-0.04;
b=0.06;
p=(r-a)/(b-a);
q=(b-r)/(b-a);
S_initial=100;
A_initial=1;
K=167;

for i=1:N
    y=rand;
    if y <=p
        x(i)=1;
    else
        x(i)=-1;
    end
end

V_initial=F_exp(N,0,p,K,S_initial,a,b,x)*(1/(1+r)^(N));

```

```

for i=1:N
    V(i)=F_exp(N,i,p,K,S_initial,a,b,x)*(1/(1+r)^(N-i));    %Wert des Portfolios
end

stint(1)=V_initial;
for i=2:N+1
    stint(i)=V(i-1);
end

S(1)=S_initial;
for i=2:N+1
    S(i)=S(1)*Jo(x,i-1,a,b);    %Wert der Aktie
end

S_inv(1)=0;
for i=2:N+1
    S_inv(i)=(1/(S(i-1)*((p*(1-p))^(0.5))*(b-a)))
*DF_exp(N,i-1,p,K,S_initial,a,b,x)*(1/((1+r)^(N+1-i)));    % eta (Aktieninvestition)
end

A(1)=A_initial;
for i=2:N+1
    A(i)=A(1)*(1+r)^(i-1);    %Wert meiner Geldanlage
end

C(1)=V_initial;
for i=2:N+1
    C(i)=(stint(i)-S_inv(i)*S(i))/(A(i));    %Anzahl an Geldanlagen
end

for i=1:N+1
    Anlage_gesamt(i)=C(i)*A(i);
end

for i=1:N+1
    Aktie_gesamt(i)=S_inv(i)*S(i);
end

stairs(time,stint);
hold on
stairs(time,Anlage_gesamt, 'g');
hold on
stairs(time,Aktie_gesamt, 'black');
hold on
plot([1:N+1],[V_initial,F_exp(N,0,p,K,S_initial,a,b,x)], 'r')

function [stint] = F_exp (N,k,p,K,S,a,b,x)
ans=0;

if k==0

```

```

for i=0:N

    ans=ans+ nchoosek(N,i)*(p^(N-i))*((1-p)^(i))
    *max(K-S*((1+b)^(N-i))*((1+a)^(i)),0);
end

stint=ans;
else
    for i=0:(N-k)
        ans=ans+nchoosek(N-k,i)*(p^(N-k-i))*((1-p)^(i))
        *max(K-S*((1+b)^(N-k-i))*((1+a)^(i))*Jo(x,k,a,b),0);
    end
    stint=ans;
end

function [stint] = DF_exp (N,k,p,K,S,a,b,x)
ans=0;

    for i=0:(N-k)
        ans=ans+(p*(1-p))*(nchoosek(N-k,i)*(p^(N-k-i))*((1-p)^(i))*max(K-S*(1+b)
        *((1+b)^(N-k-i))*((1+a)^(i))*Jo(x,k-1,a,b),0)-nchoosek(N-k,i)*(p^(N-k-i))
        *((1-p)^(i))*max(K-S*(1+a))*((1+b)^(N-k-i))*((1+a)^(i))*Jo(x,k-1,a,b),0));
    end
    stint=ans;

function [stint] = Jo (x,k,a,b)

ans=1;
for i=1:k
    ans=ans*((1+b)*(1+a))^(0.5))*((1+b)/(1+a))^(x(i)/2);
end
stint=ans;

function [endwert] = F (n)

for k=1:n
r=0.01;
a=-0.04;
b=0.06;
p=(r-a)/(b-a);
q=(b-r)/(b-a);
S_initial=100;
A_initial=1;
K=167;
N=52;

```

```
for i=1:N
    y=rand;
    if y <=p
        x(i)=1;
    else
        x(i)=-1;
    end
end

endwert(k)=F_exp(N,N,p,K,S_initial,a,b,x);
end
```