

# Lorentzgeometrie

Vorlesung von Prof. Dr. C. Bär  
Universität Potsdam  
Sommersemester 2004

Stand vom 18. Juni 2021



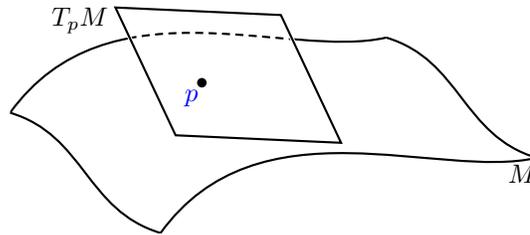
# Inhaltsverzeichnis

0.1	Vorwort . . . . .	ii
0.2	Vorspann . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Wichtige Beispiele</b>	<b>3</b>
1.1	Der Minkowski-Raum . . . . .	3
1.2	Der de-Sitter-Raum . . . . .	10
1.3	Der Anti-de-Sitter-Raum . . . . .	16
1.4	Robertson-Walker-Raumzeiten . . . . .	17
1.5	Die Schwarzschild-Halbebene . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Kausalität</b>	<b>27</b>
2.1	Grundlegende Begriffe . . . . .	27
2.2	Kurvendeformationen . . . . .	41
2.3	Konvexe Mengen . . . . .	61
2.4	Quasilimiten . . . . .	67
2.5	Cauchy-Hyperflächen . . . . .	71
2.6	Global-hyperbolische Teilmengen . . . . .	81
2.7	Cauchy-Entwicklungen und Cauchy-Horizonte . . . . .	84
2.8	Der Singularitätensatz von Hawking . . . . .	99
2.9	Der Singularitätensatz von Penrose . . . . .	103
2.10	Struktur global-hyperbolischer Mannigfaltigkeiten . . . . .	111
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>



## 0.2 Vorspann

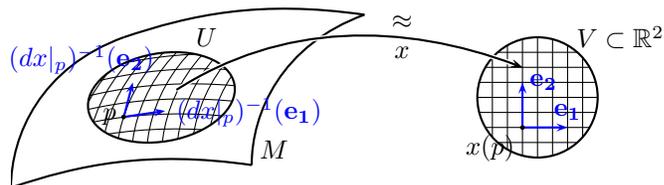
Eine Lorentz-Mannigfaltigkeit ist ein Paar  $(M^{n+1}, g)$ , wobei  $M^{n+1}$  eine  $(n + 1)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $g$  eine Lorentz-Metrik ist, d.h.  $g$  ordnet jedem Punkt  $p \in M$  eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform  $g_p$  vom Index 1 auf  $T_p M$  zu.



„Index 1“ heißt, es existiert eine Basis  $e_0, \dots, e_n$  von  $T_p M$  s.d.

$$g_p(e_i, e_j) := \begin{cases} -1, & \text{falls } i = j = 0 \\ 1, & \text{falls } i = j = 1, \dots, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Metrik  $g$  hängt glatt ( $C^\infty$ ) von  $p$  ab, d.h. sind  $x^0, \dots, x^n$  lokale Koordinaten auf  $M$ , dann sind die Funktionen  $g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =: g_{ij}$  glatt.



Man schreibt

$$g = \sum_{i,j=0}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

*Allgemeine Relativitätstheorie:*

Die Raumzeit (d.h. die Menge aller Orts-Zeit-Punkte von Ereignissen) wird modelliert durch eine 4-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Einsteingleichung auf solchen Raumzeiten lautet:

$$\text{Krümmungsausdruck} = \text{Energie-Impuls-Tensor}$$

Durch diese Gleichung gilt die folgende Korrespondenz:

$$\begin{aligned} \text{Weltlinien von masselosen Teilchen (z.B. Photonen)} &= \text{lichtartige Geodätische} \\ \text{Weltlinien von Teilchen mit Masse} &= \text{zeitartige Geodätische} \end{aligned}$$

Der Ziel der Vorlesung ist, die globalen Eigenschaften von Lorentz-Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.



# Kapitel 1

## Wichtige Beispiele

### 1.1 Der Minkowski-Raum

#### Notationen.

- Auf  $\mathbb{R}^n$  wird das *euklidische Skalarprodukt* durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

definiert.

- Auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  wird das *Minkowski-Skalarprodukt* durch

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle := -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

definiert.

**Definition 1.1.1.** Eine  $(n+1)$ -dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit heißt Minkowski-Raum, falls sie isometrisch ist zu  $(\mathbb{R}^{n+1}, g := -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i)$ .

**Bemerkung.** Für  $n = 3$  ist der Minkowski-Raum die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie. In diesen Koordinaten sind alle  $g_{ij}$  konstant

- ⇒ alle Christoffel-Symbole verschwinden
- ⇒ Riemannscher Krümmungstensor  $R = 0$
- ⇒ Schnittkrümmung  $K = 0$ , Ricci-Krümmung  $\text{Ric} = 0$ , Skalarkrümmung  $\text{scal} = 0$ .

*Erinnerung:* Sei  $E \subset T_p M$  ein nicht-entarteter 2-dimensionaler Untervektorraum. Die *Schnittkrümmung* von  $E$  wird definiert durch

$$K_p(E) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2},$$

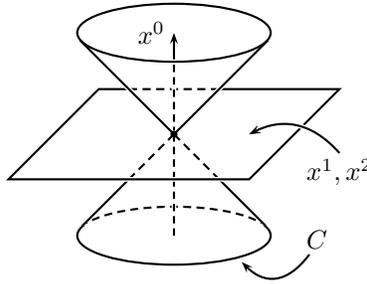
wobei  $X, Y$  eine beliebige Basis von  $E$  ist.

Die Geodätengleichung in diesen Koordinaten lautet

$$\ddot{c}^i = 0$$

wobei  $c^i := x^i \circ c$ . Die Geodätischen sind also die affin-linear parametrisierten Geraden.

**Notationen.** Der *Lichtkegel*  $C$  wird definiert durch  $C := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ .



$$I := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle < 0\}$$

$$I_{\pm} := \{x \in I \mid \pm x^0 > 0\}$$

$$C_{\pm} := \{x \in C \mid \pm x^0 \geq 0\}$$

$$J := C \cup I$$

$$J_{\pm} := C_{\pm} \cup I_{\pm}$$

$$\{\text{lichtartige Vektoren}\} := C \setminus \{0\}$$

$$\{\text{zeitartige Vektoren}\} := I$$

$$\{\text{raumartige Vektoren}\} := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus J) \cup \{0\}$$

$$\{\text{kausale Vektoren}\} := J \setminus \{0\}$$

$$\{\text{zukunftsgerichtete lichtartige Vektoren}\} := C_+ \setminus \{0\}$$

$$\{\text{vergangenheitsgerichtete lichtartige Vektoren}\} := C_- \setminus \{0\}$$

$$\{\text{zukunftsgerichtete zeitartige Vektoren}\} := I_+$$

$$\{\text{vergangenheitsgerichtete zeitartige Vektoren}\} := I_-$$

**LEMMA 1.1.2.** Seien  $x, y \in I_+$  und sei  $t > 0$ . Dann gelten:

(i)  $tx \in I_+$

(ii)  $x + y \in I_+$

Aussage (i) gilt auch für  $I_-, C_+, C_-, J_+, J_-, \mathbb{R}^{n+1} \setminus J$  statt  $I_+$ .

Aussage (ii) gilt auch für  $I_-, J_+, J_-$  statt  $I_+$ .

*Beweis:*

(i) Wegen  $x \in I_+$  ist  $\langle x, x \rangle < 0$ , also  $\langle tx, tx \rangle = t^2 \cdot \langle x, x \rangle < 0$ , somit  $tx \in I$ . Mit  $x^0 > 0$  ist auch  $t \cdot x^0 > 0$ , also  $tx \in I_+$ .

(ii) Die Bedingung  $x \in I_+$  bedeutet  $x^0 > 0$  und  $\|\hat{x}\|^2 < (x^0)^2$ , wobei  $\hat{x} := (x^1, \dots, x^n)$ . Sind  $x, y \in I_+$ , so gilt  $x^0 + y^0 > 0$  und ferner

$$\begin{aligned}
(x^0 + y^0)^2 &= (x^0)^2 + 2x^0y^0 + (y^0)^2 \\
&> \|\hat{x}\|^2 + 2 \cdot \|\hat{x}\| \cdot \|\hat{y}\| + \|\hat{y}\|^2 \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \|\hat{x}\|^2 + 2 \cdot \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle + \|\hat{y}\|^2 \\
&= \|\hat{x} + \hat{y}\|^2 \\
&= \|\widehat{x + y}\|^2.
\end{aligned}$$

Also ist auch  $x + y \in I_+$ .

□

**KOROLLAR 1.1.3.** Die Teilmengen  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $J_+$ ,  $J_-$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind konvex.

*Beweis:* Z. B. für  $I_+$  gilt: sind  $x, y$  in  $I_+$  und ist  $t$  in  $(0, 1)$ , so sind  $t$  und  $1 - t$  positiv, also nach (i) sind  $tx$  und  $(1 - t)y$  in  $I_+$ , und nach (ii) ist  $tx + (1 - t)y$  in  $I_+$ .

□

**Definition 1.1.4.** Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  heißt Lorentz-Transformation, falls für alle  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  gilt

$$\langle\langle \phi(x), \phi(y) \rangle\rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle.$$

**Definition 1.1.5.** Eine Basis  $b_0, \dots, b_n$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt Lorentz-orthonormal (L-ON), falls  $\langle\langle b_0, b_0 \rangle\rangle = -1$ ,  $\langle\langle b_i, b_i \rangle\rangle = 1$  für  $i = 1, \dots, n$ , und  $\langle\langle b_i, b_j \rangle\rangle = 0$  für  $i \neq j$ .

**Beispiel.** Die Standardbasis  $e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Lorentz-orthonormale Basis

von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**PROPOSITION 1.1.6.** Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ist eine Lorentz-Transformation genau dann, wenn sie linear ist und  $\phi(e_0), \dots, \phi(e_n)$  eine L-ON Basis ist.

*Beweis:*

“ $\implies$ ”:  $\langle\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle\rangle = \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle$ , also  $\phi(e_0), \dots, \phi(e_n)$  ist eine L-ON Basis. Zu  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  schreibe

$$\phi(x) := \sum_{i=0}^n c_i \phi(e_i), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi(x), \phi(e_0) \rangle\rangle &= \langle\langle \sum_{i=0}^n c_i \phi(e_i), \phi(e_0) \rangle\rangle \\
&= \sum_{i=0}^n c_i \langle\langle e_i, e_0 \rangle\rangle \\
&= -c_0
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\langle\langle\phi(x), \phi(e_0)\rangle\rangle &= \langle\langle x, e_0\rangle\rangle \\ &= -x^0.\end{aligned}$$

Also folgt  $c_0 = x^0$ . Analog zeigt man, dass  $c_i = x^i$ , daher gilt

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^n x^i \phi(e_i).$$

Also ist  $\phi$  linear.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $\phi$  linear und  $\phi(e_0), \dots, \phi(e_n)$  eine L-ON Basis. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle\langle\phi(x), \phi(y)\rangle\rangle &= \sum_{i,j=0}^n x^i y^j \langle\langle\phi(e_i), \phi(e_j)\rangle\rangle \\ &= \sum_{i,j=0}^n x^i y^j \langle\langle e_i, e_j\rangle\rangle \\ &= \langle\langle x, y\rangle\rangle.\end{aligned}$$

□

Setze  $J_n := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle x, J_n y \rangle$  für alle  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Eine Matrix  $A$  ist genau dann Matrix einer Lorentz-Transformation, wenn gilt

$$\begin{aligned}\langle x, J_n y \rangle = \langle\langle x, y\rangle\rangle &= \langle\langle Ax, Ay\rangle\rangle \\ &= \langle Ax, J_n Ay \rangle \\ &= \langle x, A^t J_n Ay \rangle,\end{aligned}$$

für alle  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , also g.d.w.  $A^t J_n A = J_n$ . Wir haben gezeigt:

**PROPOSITION 1.1.7.** Sei  $A$  eine reelle  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

- (1) Die durch  $A$  gegebene lineare Abbildung ist eine Lorentz-Transformation
- (2) Die Spaltenvektoren von  $A$  bilden eine L-ON Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$
- (3)  $A^t J_n A = J_n$

□

**PROPOSITION 1.1.8.**

- (i) Die Menge  $\mathcal{L}(n+1)$  (auch  $O(1, n)$  bezeichnet) aller Lorentz-Transformationen des  $\mathbb{R}^{n+1}$  bildet eine Gruppe bzgl. “ $\circ$ ”.
- (ii) Die Matrix  $A$  einer Lorentz-Transformation erfüllt  $\det(A) = \pm 1$ .

*Beweis:* (i) ist einfaches Nachrechnen. Für (ii) bemerken wir, dass gilt  $-1 = \det(J_n) = \det(A^t J_n A) = -\det(A)^2$ , daher  $\det(A) = \pm 1$ .

□

**Beispiele.**

1.) Sei  $B \in O(n)$  eine orthogonale Matrix. Dann ist  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  Element aus  $\mathcal{L}(n+1)$ , denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \underbrace{B^t B}_{I_n} \end{pmatrix} = J_n.$$

2.) Setze  $A := \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ , die Matrix eines Lorentz-Boosts. Wegen

$\cosh(\eta)^2 - \sinh(\eta)^2 = 1$  ist  $A \in \mathcal{L}(n+1)$ .

3.) Die Matrizen  $J_n$  und  $-I_n$  gehören zu  $\mathcal{L}(n+1)$ .

**SATZ 1.1.9.** Seien  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle y, y \rangle\rangle$

(ii) Es existiert  $A$  in  $\mathcal{L}(n+1)$  s.d.  $y = Ax$ .

*Beweis:*

“(ii)  $\implies$  (i)“: klar, denn  $\langle\langle y, y \rangle\rangle = \langle\langle Ax, Ax \rangle\rangle = \langle\langle x, x \rangle\rangle$ .

“(i)  $\implies$  (ii)“: Wir betrachten den Fall, dass  $x$  und damit auch  $y$  zeitartig ist. Die beiden anderen Fälle, dass nämlich  $x$  und  $y$  licht- bzw. raumartig sind, werden ähnlich behandelt. Setze  $-c^2 :=$

$\langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle y, y \rangle\rangle$  (wobei  $c > 0$ ). Es reicht, den Fall  $y = ce_0 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  zu betrachten. O.B.d.A. sei  $x$

zukunftsgerichtet, denn sonst ersetze  $x$  durch  $J_n x$ . Schreibe  $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$  und  $\hat{x} := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{R}^n$ ,  $x^0 > 0$ . Durch Anwendung eines geeigneten  $B \in O(n)$  erhalte  $B\hat{x} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = de_1$ . O.B.d.A.

sei also  $x := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $-(x^0)^2 + (x^1)^2 = \langle\langle x, x \rangle\rangle = \langle\langle y, y \rangle\rangle = -c^2$ , d.h.

$$-\left(\frac{x^0}{c}\right)^2 + \left(\frac{x^1}{c}\right)^2 = -1.$$

Die durch diese Gleichung erhaltene Hyperbel wird parametrisiert durch  $\eta \mapsto (\cosh(\eta), \sinh(\eta))$ , also gibt es ein  $\eta \in \mathbb{R}$ , so dass  $\left(\frac{x^0}{c}, \frac{x^1}{c}\right) = (\cosh(\eta), \sinh(\eta))$ . Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} y.$$

□

**LEMMA 1.1.10** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Sei  $z \in I$ . Dann gilt, für  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\langle\langle x, z \rangle\rangle = \langle\langle y, z \rangle\rangle = 0$ :

$$|\langle\langle x, y \rangle\rangle| \leq \sqrt{|\langle\langle x, x \rangle\rangle|} \sqrt{|\langle\langle y, y \rangle\rangle|}.$$

Ferner gilt Gleichheit g.d.w.  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

*Beweis:* Nach Anwendung einer Lorentz-Transformation können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $z = ce_0$ ,  $c \neq 0$ . Schreibe  $x = (x^0, \hat{x})$  und  $y = (y^0, \hat{y})$ . Dann gilt:

$$\langle\langle x, z \rangle\rangle = 0 \iff x^0 = 0,$$

und analog  $y^0 = 0$ . Somit ist  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ . Die Behauptung folgt aus der üblichen Cauchy-Schwarz-Ungleichung für " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ".

□

**LEMMA 1.1.11** (Inverse Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Seien  $x$  und  $y$  aus  $I_+$ . Dann gilt:

$$|\langle\langle x, y \rangle\rangle| \geq \sqrt{|\langle\langle x, x \rangle\rangle|} \sqrt{|\langle\langle y, y \rangle\rangle|},$$

mit Gleichheit g.d.w.  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

*Beweis:* Nach Anwendung einer Lorentz-Transformation können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $y = (c, 0) = ce_0$ , mit  $c > 0$ . Schreibe  $x = (x^0, \hat{x})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle\langle x, y \rangle\rangle^2 - |\langle\langle x, x \rangle\rangle| \cdot |\langle\langle y, y \rangle\rangle| &= (x^0)^2 c^2 - |(x^0)^2 + \|\hat{x}\|^2| \cdot c^2 \\ &= (x^0)^2 c^2 - ((x^0)^2 - \|\hat{x}\|^2) c^2 \\ &= \|\hat{x}\|^2 c^2 \geq 0, \end{aligned}$$

daraus folgt die Ungleichung. Ferner gilt die Gleichung g.d.w.  $\hat{x} = 0$ , d.h.  $x = (x^0, 0)$ , d.h.  $x$  und  $y$  sind linear abhängig.

□

**PROPOSITION 1.1.12.** Sei  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{L}(n+1)$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $a_{00} > 0$
- (2)  $Ae_0 \in I_+$
- (3)  $A(I_+) \subset I_+$

*Beweis:* Da  $A \in \mathcal{L}(n+1)$  und da Lorentz-Transformationen den kausalen Typ von Vektoren nicht

ändern, muss  $Ae_0$  in  $I$  liegen. Aber  $Ae_0 = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix}$ , also  $Ae_0 \in I_+ \iff a_{00} > 0$ . Damit sind (1)

und (2) äquivalent.

“(3)  $\implies$  (2)” ist trivial.

“(2)  $\implies$  (3)”: Sei  $x$  in  $I_+$ . Da  $I_+$  konvex ist, muss für alle  $t \in [0, 1]$  das Element  $x(t) := tx + (1 - t)e_0$  in  $I_+$  liegen, damit  $Ax(t)$  in  $I$  enthalten sein. Insbesondere kann  $(Ax(t))^0$  für kein  $t \in [0, 1]$  verschwinden. Da wir nach Voraussetzung  $(Ax(0))^0 = (Ae_0)^0 > 0$  haben, gilt  $(Ax(t))^0 > 0$  für alle  $t \in [0, 1]$ , insbesondere für  $t = 1$ , d.h.  $Ax \in I_+$ .

□

**Definition 1.1.13.** Die Elemente der Teilmenge  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1) := \{A \in \mathcal{L}(n+1) \mid a_{00} > 0\}$  von  $\mathcal{L}(n+1)$  heißen zeitorientierungserhaltende Lorentz-Transformationen.

**KOROLLAR 1.1.14.** Die Teilmenge  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1)$  ist eine Untergruppe von  $\mathcal{L}(n+1)$ . Für  $A$  in  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1)$  gilt

$$A(I_+) = I_+ \quad \text{und} \quad A(I_-) = I_-.$$

*Beweis:* Seien  $A$  und  $B$  in  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ , dann gilt  $A \circ B(I_+) \subset A(I_+) \subset I_+$ , und damit  $A \circ B \in \mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ . Andererseits, wäre  $A^{-1}e_0$  in  $I_-$ , dann wäre  $A^{-1}(-e_0) = -A^{-1}e_0$  in  $I_+$ , und damit würde  $-e_0 = A(-A^{-1}e_0)$  in  $I_- \cap I_+ = \emptyset$  enthalten sein, was ein Widerspruch ist. Also muss  $A^{-1}e_0$  in  $I_+$  liegen, d.h.  $A^{-1} \in \mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ . Daraus folgt die erste Behauptung des Korollars. Ferner gilt:  $I_+ = A^{-1}A(I_+) \subset A^{-1}(I_+) \subset I_+$ , daher  $A(I_+) = I_+$ . Wegen  $I_- = -I_+$  und der Linearität von  $A$  folgt auch  $A(I_-) = I_-$ .

□

### Beispiele.

- 1.) Sei  $B$  in  $O(n)$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  in  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ .
- 2.) Sei  $B$  in  $O(n)$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  in  $\mathcal{L}^\downarrow(n+1) := \mathcal{L}(n+1) \setminus \mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ .
- 3.) Alle Lorentz-Boosts  $\begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$  liegen in  $\mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ .

### Notationen.

$$\mathcal{L}_\pm(n+1) := \{A \in \mathcal{L}(n+1) \mid \det(A) = \pm 1\}$$

$$\mathcal{L}_\pm^\uparrow(n+1) := \mathcal{L}^\uparrow(n+1) \cap \mathcal{L}_\pm(n+1)$$

$$\mathcal{L}_\pm^\downarrow(n+1) := \mathcal{L}^\downarrow(n+1) \cap \mathcal{L}_\pm(n+1)$$

Einige nichttriviale Untergruppen von  $\mathcal{L}(n+1)$ :

$$\mathcal{L}_+^\uparrow(n+1),$$

$$\mathcal{L}_+(n+1) = \mathcal{L}_+^\uparrow(n+1) \cup \mathcal{L}_+^\downarrow(n+1),$$

$$\mathcal{L}^\uparrow(n+1) = \mathcal{L}_+^\uparrow(n+1) \cup \mathcal{L}_-^\uparrow(n+1) \text{ und}$$

$$\mathcal{L}_+^\uparrow(n+1) \cup \mathcal{L}_-^\downarrow(n+1).$$

**Definition 1.1.15.** Eine Abbildung  $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  heißt Poincaré-Transformation g.d.w. sie von der Form

$$\psi(x) = Ax + b$$

ist, wobei  $A \in \mathcal{L}(n+1)$  und  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Die Menge der Poincaré-Transformationen von  $\mathbb{R}^{n+1}$  wird als  $\mathcal{P}(n+1)$  bezeichnet.

**PROPOSITION 1.1.16.** *Die Isometriegruppe des Minkowski-Raumes stimmt mit  $\mathcal{P}(n+1)$  überein.*

*Beweis:* Sei  $g_{\text{Mink}} := -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$  die Standard-Minkowski-Metrik auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Für jedes  $\psi \in \mathcal{P}(n+1)$  gilt  $d\psi = A$  (wobei  $\psi(x) = Ax + b$  für alle  $x$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), und jede Lorentz-Transformation ist eine Isometrie des Minkowski-Raumes. Also gilt  $\mathcal{P}(n+1) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ . Andererseits, ist  $\psi$  in  $\text{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ , dann ist für jede Geodätische  $c$  auch  $\psi \circ c$  eine Geodätische. Wir erinnern hier an die Definition der riemannschen Exponentialabbildung in einem Punkt  $p$  auf der Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ : für jedes  $X \in T_p M$ , ist die Abbildung  $t \mapsto \exp_p(tX)$  die eindeutige Geodätische mit  $\exp_p(0) = p$  und  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp_p(tX)) = X$ . Wir erhalten also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{d\psi} & T_{\psi(p)} \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow \exp_p & & \downarrow \exp_{\psi(p)} \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

Auf  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$  wird durch den kanonischen Isomorphismus  $T_p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  die Exponentialabbildung  $\exp_p$  in  $p$  mit  $X \mapsto p + X$  identifiziert. Aus dem obigen Diagramm erhalten wir also für  $p = 0$ :

$$\psi(X) = \underbrace{d\psi(X)}_A + \underbrace{\psi(0)}_b,$$

damit ist  $\psi$  in  $\mathcal{P}(n+1)$ . □

**Notation.**  $\mathcal{P}^\uparrow(n+1) := \{\psi \in \mathcal{L}(n+1) \mid d\psi \in \mathcal{L}^\uparrow(n+1)\}$ . Wir definieren analog  $\mathcal{P}^\downarrow(n+1)$ ,  $\mathcal{P}_\pm(n+1), \dots$

**Weitere Beispiele von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit  $R = 0$ :**

- Offene Teilmengen des Minkowski-Raumes
- Quotienten:
  - $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1} = (n+1)$ -dimensionaler Torus
  - $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}e_0 = S^1 \times \mathbb{R}^n$
  - $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_n = \mathbb{R} \times \{n\text{-dimensionaler Torus}\}$

In diesen Beispielen erbt der Quotient  $\mathbb{R}^{n+1}/\sim$  eine eindeutige Lorentz-Metrik s.d. die Quotientenabbildung  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}/\sim$  eine lokale Isometrie ist.

## 1.2 Der de-Sitter-Raum

Betrachte die Funktion

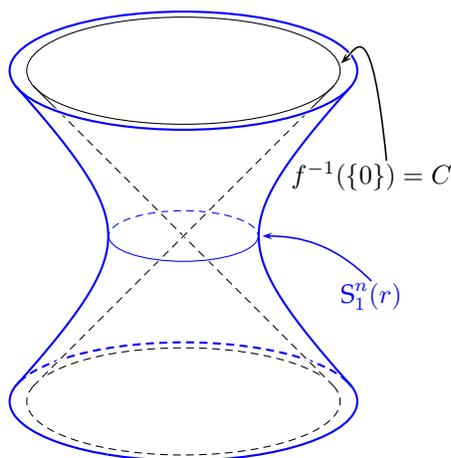
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, x \rangle = -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2. \end{aligned}$$

Sie ist eine glatte Funktion auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $dx f = -2x^0 dx^0 + 2 \sum_{i=1}^n x^i dx^i$ . Es gilt also  $dx f = 0$  g.d.w.  $x = 0$ . Insbesondere sind alle  $x \neq 0$  reguläre Punkte für  $f$ , und alle  $c \in \mathbb{R}^*$  sind reguläre Werte von  $f$ .

**Definition 1.2.1.** Für ein festes  $r > 0$  heißt die Hyperfläche

$$S_1^n(r) := f^{-1}(r^2)$$

von  $\mathbb{R}^{n+1}$   $n$ -dimensionaler de-Sitter-Raum.



Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist  $S_1^n(r)$  diffeomorph zu  $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ , wobei  $S^{n-1}$  die  $(n-1)$ -dimensionale Standardsphäre ist: ein Diffeomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S_1^n(r) &\longrightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1} \\ (x^0, \hat{x}) &\longmapsto \left(x^0, \frac{\hat{x}}{\sqrt{r^2 + (x^0)^2}}\right), \end{aligned}$$

dessen Inverses durch  $(y^0, \hat{y}) \longmapsto (y^0, \sqrt{(y^0)^2 + r^2} \hat{y})$  gegeben ist.

Als Hyperfläche hat  $S_1^n(r)$  triviales Normalenbündel. Dieses wird aufgespannt durch

$$\begin{aligned} \text{grad} f(x) &= -2x^0 \left(-\frac{\partial}{\partial x^0}\right) + 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= 2 \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Wegen  $g_{\text{Mink}}(\text{grad} f(x), \text{grad} f(x)) = 4 \langle x, x \rangle = 4f(x) = 4r^2$ , ist das Normalenbündel raumartig; die Metrik  $g_{\text{Mink}}$  induziert also eine Lorentz-Metrik auf  $S_1^n(r)$ .

Die zum Einheitsnormalenfeld  $\nu := \frac{1}{2r} \text{grad}(f)$  entsprechende Weingarten-Abbildung  $W : TS_1^n(r) \rightarrow TS_1^n(r)$  lässt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} W(X) &\stackrel{\text{Def}}{=} \nabla_X \nu \\ &= \frac{1}{r} \partial_X \text{Id} \\ &= \frac{1}{r} X, \end{aligned}$$

für alle Tangentialvektoren  $X$ , d.h.  $W = \frac{1}{r}\text{Id}$ .

Die Gauß-Formel für die Krümmung lautet:

$$\begin{aligned} R^{S_1^n(r)}(X, Y)Z &= R^{\mathbb{R}^{n+1}}(X, Y)Z + g(W(Y), Z)W(X) - g(W(X), Z)W(Y) \\ &= 0 + \frac{1}{r^2}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \end{aligned}$$

für alle Tangentialvektoren  $X, Y$  und  $Z$ . Daraus folgt für die Schnittkrümmung einer beliebigen nichtentarteten Ebene  $E$ : lege eine beliebige Basis  $X, Y$  von  $E$  fest, dann gilt

$$\begin{aligned} K(E) &\stackrel{\text{Def}}{=} \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{r^2}g(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Also  $S_1^n(r)$  hat konstante Schnittkrümmung  $\frac{1}{r^2}$ .

Der Ausdruck für die Ricci-Krümmung ist auch einfach. Wähle eine L-ON Basis  $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$  von  $T_p M$  ( $p \in M$ ), und setze  $\varepsilon_i := g(e_i, e_i)$  ( $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{ric}(X, Y) &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i g(R(X, e_i)e_i, Y) \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i g(g(e_i, e_i)X - g(X, e_i)e_i, Y) \\ &= \frac{1}{r^2} (ng(X, Y) - g(X, Y)) \\ &= \frac{(n-1)}{r^2} g(X, Y), \end{aligned}$$

für alle Tangentialvektoren  $X$  und  $Y$ . Man hat also

$$\text{ric} = \frac{(n-1)}{r^2} g.$$

Daraus folgt

$$\text{scal} = \frac{n(n-1)}{r^2}.$$

**Bemerkung.** Für  $S_1^4(r)$  lautet der Einstein-Tensor  $G := \text{ric} - \frac{1}{2}\text{scal}g = -\frac{3}{r^2}g$ : Die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $S_1^4(r)$  ist Vakuum-Lösung der Einstein'schen Feldgleichung mit kosmologischer Konstante  $\frac{3}{r^2}$ .

Wir bestimmen jetzt die Geodätischen von  $S_1^n(r)$ . Zu  $p \in S_1^n(r)$  und  $X \in T_p S_1^n(r) \setminus \{0\}$ , betrachte in  $\mathbb{R}^{n+1}$  die von  $p$  und  $X$  aufgespannte Ebene  $E$ .

Wir schränken uns zuerst auf den Fall ein, wo  $X$  raum- oder zeitartig ist. Dann ist  $E$  nicht ausgeartet, so dass  $\mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp$ . Sei  $A \in \mathcal{L}(n+1)$  die lineare Spiegelung an  $E$ , d.h.  $A|_E = \text{Id}_E$  und  $A|_{E^\perp} = -\text{Id}_{E^\perp}$ . Diese Abbildung ist eine Lorentz-Transformation: für alle  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

schreibe  $x = x_E + x_{E^\perp}$  bzw.  $y = y_E + y_{E^\perp}$  die Zerlegung von  $x$  bzw.  $y$  bzgl.  $E \oplus E^\perp$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} \langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle &= \langle\langle A(x_E + x_{E^\perp}), A(y_E + y_{E^\perp}) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle x_E - x_{E^\perp}, y_E - y_{E^\perp} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle x_E, y_E \rangle\rangle - \underbrace{\langle\langle x_E, y_{E^\perp} \rangle\rangle}_0 - \underbrace{\langle\langle x_{E^\perp}, y_E \rangle\rangle}_0 + \langle\langle x_{E^\perp}, y_{E^\perp} \rangle\rangle \\ &= \langle\langle x, y \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Wegen  $f(Ax) = \langle\langle Ax, Ax \rangle\rangle = \langle\langle x, x \rangle\rangle = f(x)$  ist  $A(S_1^n(r)) \subset S_1^n(r)$ . Damit ist  $A|_{S_1^n(r)} \in \text{Isom}(S_1^n(r))$ . Setze  $\text{Fix}(A|_{S_1^n(r)}) := \{x \in S_1^n(r) \mid Ax = x\} = S_1^n(r) \cap E$ : die Komponenten von  $S_1^n(r) \cap E$  sind (als Punktmenge) Geodätische.

Ist jetzt  $X \in T_p S_1^n(r)$  lichtartig, so wähle eine Folge  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von  $T_p S_1^n(r)$ , mit  $X_j$  nicht lichtartig und s.d.  $X_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} X$ . Dann konvergiert die von  $p$  und  $X_j$  aufgespannte Ebene gegen  $E$ , und  $\exp_p(tX_j) \rightarrow \exp_p(tX)$  für alle  $t$ ; die zusammenhängenden Komponenten von  $E \cap S_1^n(r)$  sind ebenfalls als Punktmenge (lichtartige) Geodätische von  $S_1^n(r)$ .

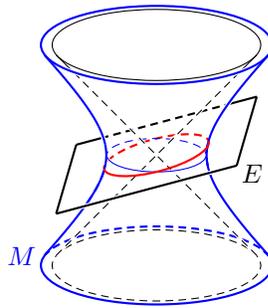
*Geometrische Interpretation:*

1. Fall:  $X$  raumartig.

Da  $p$  auch raumartig ist, ist  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_E$  positiv definit. Der Schnitt

$$E \cap S_1^n(r) = \{y \in E \mid \langle\langle y, y \rangle\rangle = r^2\}$$

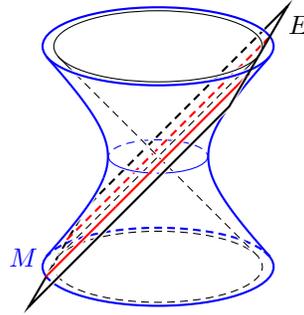
ist dann eine geschlossene raumartige Geodätische.



2. Fall:  $X$  lichtartig.

Dann ist  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_E$  positiv semidefinit, aber degeneriert. Dann besteht  $E \cap S_1^n(r)$  aus zwei parallelen Geraden, denn

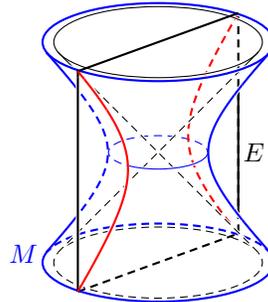
$$\begin{aligned} E \cap S_1^n(r) &= \{\alpha p + \beta X \mid \alpha^2 \underbrace{\langle\langle p, p \rangle\rangle}_{r^2} + 2\alpha\beta \underbrace{\langle\langle p, X \rangle\rangle}_0 + \beta^2 \underbrace{\langle\langle X, X \rangle\rangle}_0 = r^2\} \\ &= \{\alpha p + \beta X \mid \alpha^2 = 1, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\pm p + \beta X \mid \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$



3. Fall:  $X$  zeitartig.

Dann ist  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_E$  indefinit und nicht-degeneriert. In diesem Fall besteht  $E \cap S_1^n(r)$  aus zwei Hyperbelkomponenten, denn

$$\begin{aligned} E \cap S_1^n(r) &= \{\alpha p + \beta X \mid \alpha^2 r^2 + \beta^2 \langle\langle X, X \rangle\rangle = r^2\} \\ &= \{\alpha p + \beta X \mid \alpha^2 + \underbrace{\frac{\langle\langle X, X \rangle\rangle}{r^2}}_{<0} \beta^2 = 1\}. \end{aligned}$$

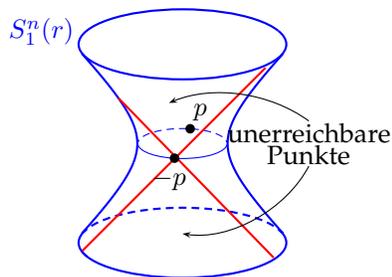


Aus der obigen Bestimmung der Geodätischen bemerkt man auch, dass  $S_1^n(r)$  *geodätisch vollständig* ist, d.h. für jeden Punkt  $p$  ist  $\exp_p$  auf ganz  $T_p S_1^n(r)$  definiert.

Fixiere  $p \in S_1^n(r)$ : Welche  $q \in S_1^n(r)$  können wir durch Geodätische aus  $p$  erreichen?

Die Fälle  $q = p$  und  $q = -p$  sind trivial. Ist  $q \neq \pm p$ , so sind  $p$  und  $q$  linear unabhängig, daher ist die Ebene  $E$ , die  $p$  und  $q$  enthält, eindeutig. Die Punkte, die nicht von  $p$  aus erreicht werden können, sind genau die Punkte, die von  $-p$  durch zeit- oder lichtartige Geodätische erreicht werden. Dies ist genau die Menge

$$\{q \in S_1^n(r) \mid \langle\langle q + p, p \rangle\rangle \leq 0 \text{ und } q \neq -p\}.$$



**Bemerkung.** In der riemannschen Geometrie sagt der Satz von Hopf-Rinow insbesondere, dass auf einer zusammenhängenden geodätisch vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit je zwei Punkte durch Geodätische verbunden werden können.

**SATZ 1.2.2.** Sei  $M$  eine zusammenhängende semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, und  $p \in M$ . Seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zwei Isometrien von  $M$  mit  $\psi_1(p) = \psi_2(p)$  und  $d\psi_1(p) = d\psi_2(p)$ . Dann gilt  $\psi_1 = \psi_2$ .

*Beweis:* Setze  $\psi := \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \in \text{Isom}(M)$ . Dann gilt  $\psi(p) = p$  und  $d\psi(p) = \text{Id}_{T_p M}$ . Wir zeigen, dass  $\psi = \text{Id}_M$ .

Setze

$$\mathcal{U} := \{q \in M \mid \psi(q) = q, \quad d\psi(q) = \text{Id}_{T_q M}\}.$$

- a) Die Menge  $\mathcal{U}$  ist wegen  $p \in \mathcal{U}$  nicht leer.
- b) Die Teilmenge  $\mathcal{U}$  ist wegen Stetigkeit von  $\psi$  und  $d\psi$  abgeschlossen in  $M$ .
- c) Die Teilmenge  $\mathcal{U}$  ist offen in  $M$ : Sei  $q \in \mathcal{U}$ . Da  $\exp_q$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, existiert es eine Umgebung  $V$  von  $q$  in  $M$  und  $W$  von  $0$  in  $T_q M$  s.d.  $\exp_q : W \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus ist. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{d\psi(q)=\text{Id}} & W \\ \downarrow \exp_q & & \downarrow \exp_q \\ V & \xrightarrow{\psi} & V \end{array}$$

liefert  $\psi|_V = \text{Id}_V$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, muss  $\mathcal{U} = M$  gelten, d.h.  $\psi = \text{Id}_M$ .

□

**PROPOSITION 1.2.3.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n+1) &\longrightarrow \text{Isom}(S_1^n(r)) \\ A &\longmapsto A|_{S_1^n(r)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Ferner gilt: die Gruppe  $\text{Isom}(S_1^n(r))$  wirkt transitiv auf  $S_1^n(r)$ , d.h. für alle  $p, q$  in  $S_1^n(r)$ , es existiert ein  $\psi$  in  $\text{Isom}(S_1^n(r))$  s.d.  $\psi(p) = q$  (man sagt, dass  $S_1^n(r)$  homogen ist). Es gilt sogar: für alle  $X$  und  $Y$  aus  $TS_1^n(r)$  mit  $\langle\langle X, X \rangle\rangle = \langle\langle Y, Y \rangle\rangle$ , existiert  $\psi$  in  $\text{Isom}(S_1^n(r))$  s.d.  $d\psi(X) = Y$  (man sagt, dass  $S_1^n(r)$  isotrop ist).

*Beweis:* Dass  $A|_{S_1^n(r)}$  in  $\text{Isom}(S_1^n(r))$  liegt, ist klar; die Abbildung (1.1) ist auch offensichtlich injektiv.

Zu  $p, q$  in  $S_1^n(r)$  (d.h.  $\langle\langle p, p \rangle\rangle = \langle\langle q, q \rangle\rangle = r^2$ ) existiert es nach Satz 1.1.9 ein  $A$  in  $\mathcal{L}^{n+1}$  mit  $Ap = q$ . O.B.d.A. haben  $X$  und  $Y$  den selben Basispunkt  $p$  in  $S_1^n(r)$ . In  $p^\perp = T_p S_1^n(r) \cong \mathbb{R}^n$ , finde  $B$  in  $\mathcal{L}(n)$  mit  $BX = Y$ . Definiere  $\tilde{B}$  in  $\mathcal{L}^{n+1}$  durch

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist  $B$  in  $\mathcal{L}(n+1)$ . Die Abbildung  $\psi := \tilde{B}|_{S_1^n(r)}$  erfüllt  $\psi(p) = p$  und  $d\psi(X) = BX = Y$ . Daraus folgt die zweite Behauptung.

Nun zeige die Surjektivität von (1.1). Sei  $\psi$  in  $\text{Isom}(S_1^n(r))$ . Fixiere  $p$  in  $S_1^n(r)$ . Zu  $q := \psi(p)$  in  $S_1^n(r)$  finde  $A$  in  $\mathcal{L}(n+1)$  mit  $Ap = q$ . Dann ist  $p$  Fixpunkt von  $\psi_1 := A^{-1} \circ \psi \in \text{Isom}(S_1^n(r))$ . Die Abbildung  $d\psi_1 : T_p S_1^n(r) \rightarrow T_p S_1^n(r)$  ist eine lineare Isometrie. Wähle dann  $B$  in  $\mathcal{L}(n+1)$  mit  $Bp = p$  und  $dB_{S_1^n(r)} = d\psi_1(p)$ . Dann gilt für  $\psi_2 := B^{-1} \circ A^{-1} \circ \psi \in \text{Isom}(S_1^n(r))$  das Folgende:  $\psi_2(p) = p$  und  $d\psi_2(p) = \text{Id}$ . Aus dem Satz 1.2.2 folgt  $\psi_2 = \text{Id}$ , somit  $\psi = A \circ B$ .

□

### 1.3 Der Anti-de-Sitter-Raum

Betrachte  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit der semi-riemannschen Metrik  $g := -dx^0 \otimes dx^0 - dx^1 \otimes dx^1 + \sum_{i=2}^n dx^i \otimes dx^i$  und die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) := g(x, x) = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^n (x^i)^2. \end{aligned}$$

**Definition 1.3.1.** Für ein festes  $r > 0$  heißt

$$H_1^n(r) := f^{-1}(-r^2)$$

$n$ -dimensionaler Anti-de-Sitter-Raum.

Wie bei  $S_1^n(r)$  sehen wir, dass  $H_1^n(r)$  eine glatte Hyperfläche von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, die diffeomorph ist zu  $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ : Ein Diffeomorphismus ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1^n(r) &\longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \\ (x^0, x^1, \underbrace{\tilde{x}}_{\in \mathbb{R}^{n-1}}) &\longmapsto \left( \frac{x^0}{\sqrt{\|\tilde{x}\|^2 + r^2}}, \frac{x^1}{\sqrt{\|\tilde{x}\|^2 + r^2}}, \tilde{x} \right), \end{aligned}$$

dessen Inverses durch  $y \mapsto (\sqrt{\|\tilde{y}\|^2 + r^2}y^0, \sqrt{\|\tilde{x}\|^2 + r^2}y^1, \tilde{y})$  gegeben ist.

Das Normalenbündel von  $H_1^n(r)$  wird erzeugt durch

$$\text{grad}f(x) = 2 \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

und wegen  $g(\text{grad}f, \text{grad}f) = 4g(x, x) = 4f(x) = -4r^2 < 0$  ist das Normalenbündel zeitartig. Die von  $g$  auf  $H_1^n(r)$  induzierte Metrik hat dann Index 1, d.h. sie ist eine Lorentzmetrik auf  $H_1^n(r)$ .

Gauß-Formeln liefern für die Krümmung:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\frac{1}{r^2} (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ K &= -\frac{1}{r^2} \\ \text{ric} &= -\frac{n-1}{r^2} g \\ \text{scal} &= -\frac{n(n-1)}{r^2}, \end{aligned}$$

für alle  $X, Y$  und  $Z$  in  $TH_1^n(r)$ .

Man bezeichnet die universelle Überlagerung  $\widetilde{H}_1^n(r)$ , die zu  $\mathbb{R}^n$  diffeomorph ist, ebenfalls mit Anti-de-Sitter-Raum.

**Bemerkung.** Die Mannigfaltigkeiten  $H_1^4(r)$  und  $\widetilde{H}_1^4(r)$  sind Vakuum-Lösungen der Einstein'schen Feldgleichung mit kosmologischer Konstante  $-\frac{3}{r^2}$ .

Geodätische ergeben sich wieder als von der Form  $E \cap H_1^n(r)$ , wobei  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein zweidimensionaler Untervektorraum ist. Es gilt wieder Punkte, die nicht durch Geodätische erreichbar sind, die von einem festen Punkt ausgehen.

Die Isometriegruppe

$$\text{Isom}(H_1^n(r)) \cong O(2, n-1)$$

wirkt transitiv auf  $H_1^n(r)$ . Isometrien von  $H_1^n(r)$  lassen sich zu Isometrien von  $\widetilde{H}_1^n(r)$  liften.

## 1.4 Robertson-Walker-Raumzeiten

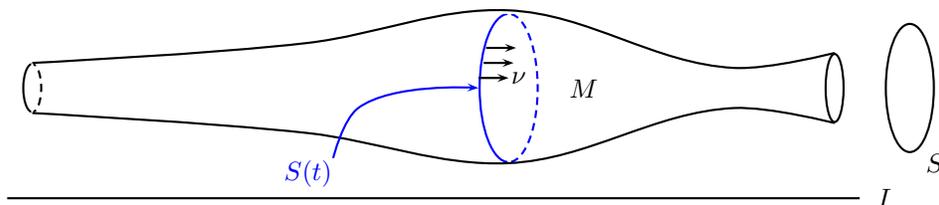
**Definition 1.4.1.** Eine  $(n+1)$ -dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt Robertson-Walker-Raumzeit, falls sie von der Form

$$M := I \times S$$

ist, wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist und  $(S, g_S)$  eine vollständige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K^S = \kappa$ . Ferner sei die Metrik  $g$  gegeben durch

$$g := -dt \otimes dt + f(t)^2 g_S,$$

wobei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte positive Funktion auf  $I$  ist.



	$\kappa = 1$	$\kappa = 0$	$\kappa = -1$
Modellraum	$S^n$ Standardsphäre	$\mathbb{R}^n$ euklidischer Raum	$H^n$ hyperbolischer Raum
Quotienten	<ul style="list-style-type: none"> <li>· <math>S^n/\mathbb{Z}_2 =: \mathbb{RP}^n</math></li> <li>· reell-projektiver Raum</li> <li>· Linsenräume</li> <li>· ...</li> <li>· alle klassifiziert</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· <math>\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n =: T^n</math></li> <li>· Torus</li> <li>· ...</li> <li>· alle klassifiziert</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· sehr viele,</li> <li>· nicht vollständig</li> <li>· verstanden</li> </ul>

**Beispiele.**

- 1.)  $\kappa = 0$ : Der euklidische Raum  $S := \mathbb{R}^n$ , das Intervall  $I := \mathbb{R}$  und die Verzerrungsfunktion  $f = 1$  liefern für  $M$  den Minkowski-Raum.
- 2.)  $\kappa = 1$ : Die Standardsphäre  $S := S^n$ , das Intervall  $I := \mathbb{R}$  und die Verzerrungsfunktion  $f = 1$  liefern für  $M$  Einsteins statistisches Universum.

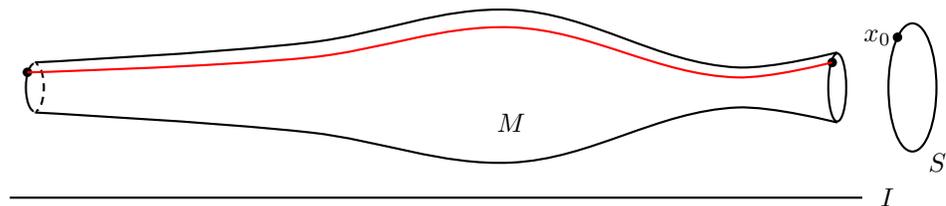
Setze  $S(t) := \{t\} \times S \subset M$  und  $\nu := \frac{\partial}{\partial t}$ . Wir berechnen die Weingarten-Abbildung  $W$  von  $S(t)$  bzgl.  $\nu$ . Von jetzt an seien  $X, Y$  und  $Z$  stets Tangentialvektoren an  $S(t)$ . O.B.d.A. mögen die paarweisen Lie-Klammern von  $X, Y$  und  $\nu$  verschwinden.

$$\begin{aligned}
 g(W(X), Y) &\stackrel{\text{Def}}{=} g(\nabla_X^M \nu, Y) \\
 &\stackrel{\text{Koszul}}{=} \frac{1}{2} \left( \underbrace{\partial_X g(\nu, Y)}_0 + \partial_\nu g(X, Y) - \underbrace{\partial_Y g(X, \nu)}_0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (f^2(t) g_S(X, Y)) \\
 &= (f \dot{f})(t) g_S(X, Y) \\
 &= \frac{\dot{f}}{f}(t) g(X, Y),
 \end{aligned}$$

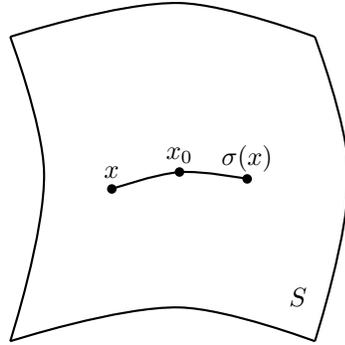
d.h.  $W = \frac{\dot{f}}{f} \text{Id}$ .

*Geodätische in  $M$ :*

- a) Zunächst betrachten wir den Spezialfall:  $t \mapsto (t, x_0)$ , wobei  $x_0 \in S$  ist fest. Wir behaupten, dass diese Kurve eine Geodätische ist.



Denn: die geodätische Spiegelung  $\sigma$  in  $S$  an  $x_0$  ist eine Isometrie von  $S$



(zumindest in einer Umgebung von  $x_0$  in  $S$ ), so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto (t, \sigma(x)) \end{aligned}$$

eine Isometrie von  $M$  ist. Daraus folgt, dass die Fixpunktmenge von  $\varphi$

$$\text{Fix}(\varphi) = \mathbb{R} \times \{x_0\}$$

als Punktmenge eine Geodätische ist. Aber  $t \mapsto (t, x_0)$  ist Eigenzeitparametrisierung dieser Punktmenge und damit Geodätische.

b) Allgemeiner Fall: sei  $c$  eine Geodätische von  $(M, g)$ . Schreibe  $c(s) =: (t(s), \gamma(s))$ , wobei  $t$  seine Werte in  $I$  hat und  $\gamma$  in  $S$ . Man hat  $c'(s) = t'(s)\nu + \gamma'(s)$ , daher gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{c'(s)}^M c'(s) &= \nabla_{c'(s)}^M (t'\nu + \gamma') \\ &= t''\nu + t'\nabla_{c'(s)}^M \nu + \nabla_{t'\nu + \gamma'}^M \gamma' \\ &= t''\nu + (t')^2 \underbrace{\nabla_{\nu}^M \nu}_{=0 \text{ nach a)}} + t'\nabla_{\gamma'}^M \nu + t'\nabla_{\nu}^M \gamma' + \nabla_{\gamma'}^M \gamma' \\ &\stackrel{[\gamma', \nu]=0}{=} t''\nu + 2t'W(\gamma') + \nabla_{\gamma'}^S \gamma' + g(W(\gamma'), \gamma')\nu. \end{aligned}$$

Damit ist  $c$  Geodätische in  $(M, g)$  g.d.w.  $\nabla_{c'}^M c' = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= t'' + g(W(\gamma'), \gamma') = t'' + f'fg_s(\gamma', \gamma') \text{ und} \\ 0 &= \nabla_{\gamma'}^S \gamma' + 2t'\frac{f'}{f}\gamma' = \nabla_{\gamma'}^S \gamma' + 2\frac{(f \circ t)'}{f \circ t}\gamma'. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt:

**PROPOSITION 1.4.2.** Eine glatte Kurve  $c = (t, \gamma)$  in  $M$  ist genau dann Geodätische, wenn

$$(1) \quad t'' = -f' f g_S(\gamma', \gamma')$$

und

$$(2) \quad \nabla_{\gamma'}^S \gamma' = -2 \frac{(f \circ t)'}{f \circ t} \gamma'.$$

Insbesondere ist  $\gamma$  eine Geodätische in  $S$  bis auf Reparametrisierung.

**KOROLLAR 1.4.3.** Für lichtartige Geodätische in  $M$  ist die Funktion

$$t'(f \circ t)$$

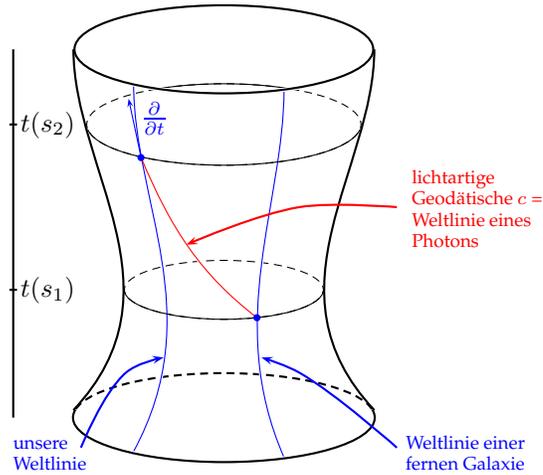
konstant.

Beweis:

$$\begin{aligned} 0 = f'g(c', c') &= -(t')^2 f' + f' f^2 g_S(\gamma', \gamma') \\ &= -(t')^2 f' - f t'' \\ &= -(t' f)'. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Erklärung der kosmologischen Rotverschiebung:



$$c' = t' \nu + \gamma'.$$

Die Weltlinie eines Photons ist eine lichtartige Geodätische  $c$ . Die Energie des Photons aus Sicht des Beobachtes  $\nu$  ist:  $-g(c', \nu) = t'$ . Sei  $\lambda := \frac{h}{E}$  dementsprechend die Wellenlänge des Photons. Dann gilt

$$\begin{aligned} t'(s_1) f(t(s_1)) &= t'(s_2) f(t(s_2)) \\ \implies \frac{\lambda(s_1)}{\lambda(s_2)} &= \frac{f(t(s_1))}{f(t(s_2))}. \end{aligned}$$

Krümmung von  $(S, g_S)$ :

$$\begin{aligned} R^S(X, Y)Z &= \kappa (g_S(Y, Z)X - g_S(X, Z)Y) \\ \text{ric}^S(X, Y) &= \kappa(n-1)g_S(X, Y) \\ \text{scal}^S &= \kappa n(n-1). \end{aligned}$$

Um jetzt den riemannschen Krümmungstensor von  $(M, g)$  zu bestimmen, müssen wir drei verschiedene Ausdrücke berechnen: tangentielle und normale Komponenten von  $R^M(X, Y)Z$  und  $g(R^M(X, \nu)\nu, Y)$ .

a) Gauß-Formel auf  $TS$ :

$$\begin{aligned} \tan(R^M(X, Y)Z) &= R^{S(t)}(X, Y)Z + g(W(Y), Z)W(X) - g(W(X), Z)W(Y) \\ &= \kappa (g_S(Y, Z)X - g_S(X, Z)Y) + (f')^2 (g_S(Y, Z)X - g_S(X, Z)Y) \\ &= \{\kappa + (f')^2\} (g_S(Y, Z)X - g_S(X, Z)Y) \\ &= \left\{ \frac{\kappa}{f^2} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right\} (g_S(Y, Z)X - g_S(X, Z)Y). \end{aligned}$$

b) Codazzi-Mainardi-Gleichung:

$$\begin{aligned} g(R^M(X, Y)Z, \nu) &= g\left(\underbrace{(\nabla_X W)(Y)}_0, Z\right) - g\left(\underbrace{(\nabla_Y W)(X)}_0, Z\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Berechnung von  $R^M(X, \nu)\nu$ :

$$\begin{aligned} R^M(X, \nu)\nu &= \nabla_X^M \underbrace{\nabla_\nu^M \nu}_0 - \nabla_\nu^M \nabla_X^M \nu - \nabla_{[X, \nu]}^M \nu \\ &= -\nabla_\nu^M (W(X)) - \nabla_{\nabla_X^M \nu - \nabla_\nu^M X}^M \nu \\ &= -(\nabla_\nu^M W)(X) - W(\nabla_\nu^M X) - W(W(X)) + W(\nabla_\nu^M X) \\ &= -(\nabla_\nu^M W)(X) - W^2(X) \\ &= -\frac{f''f - (f')^2}{f^2} X - \frac{(f')^2}{f^2} X \\ &= -\frac{f''}{f} X. \end{aligned}$$

Ricci-Krümmung von  $(M, g)$ : sei  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine lokale orthonormale Basis von  $TS(t)$ .

a) Für tangentielle Vektoren  $X$  und  $Y$  an  $S(t)$ :

$$\begin{aligned} \text{ric}^M(X, Y) &= \sum_{i=1}^n g(R^M(X, e_i)e_i, Y) - g(R^M(X, \nu)\nu, Y) \\ &= \left\{ \frac{\kappa}{f^2} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right\} (n-1)g(X, Y) + \frac{f''}{f} g(X, Y) \\ &= \left\{ \frac{n-1}{f^2} (\kappa + (f')^2) + \frac{f''}{f} \right\} g(X, Y). \end{aligned}$$

b)  $\text{ric}^M(X, \nu) = 0$ .

c) Berechnung von  $\text{ric}^M(\nu, \nu)$ :

$$\begin{aligned}\text{ric}^M(\nu, \nu) &= \sum_{i=1}^n g(R^M(e_i, \nu)\nu, e_i) \\ &= -n \frac{f''}{f}.\end{aligned}$$

Skalarkrümmung von  $(M, g)$ :

$$\begin{aligned}\text{scal}^M &= \sum_{i=1}^n \text{ric}^M(e_i, e_i) - \text{ric}^M(\nu, \nu) \\ &= n(n-1) \left\{ \frac{\kappa}{f^2} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{2}{n-1} \frac{f''}{f} \right\}.\end{aligned}$$

**Bemerkung.** Wir halten die Riccati-Gleichung fest. Ist  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, geblättert durch raumartige Hyperflächen mit Normalenfeld  $\nu$ , so dass  $\nabla_\nu^M \nu = 0$  (man spricht dann von einer *riemannschen Blätterung*), dann gilt für die Weingarten-Abbildung  $W$  der Blätter:

$$R^M(\cdot, \nu)\nu + \nabla_\nu^M W + W^2 = 0.$$

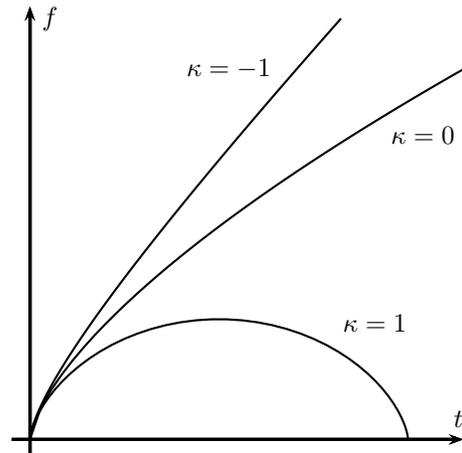
*Physikalische Interpretation.* Die Einstein'sche Feldgleichung erlaubt eine physikalische Interpretation gewisser Ausdrücke als Druck und Massedichte: für tangente  $X$  und  $Y$  an  $S(t)$ ,

$$\begin{aligned}\text{ric}^M(X, Y) - \frac{1}{2} \text{scal}^M g(X, Y) &= \underbrace{\left\{ \left(1 - \frac{n}{2}\right)(n-1) \left( \frac{\kappa}{f^2} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right) - (n-1) \frac{f''}{f} \right\}}_{=: p \text{ Druck}} g(X, Y) \\ \text{ric}^M(\nu, \nu) - \frac{1}{2} \text{scal}^M g(\nu, \nu) &= \frac{n(n-1)}{2} \underbrace{\left\{ \frac{\kappa}{f^2} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 \right\}}_{=: \rho \text{ Massedichte}}.\end{aligned}$$

**Definition 1.4.4.** Eine Robertson-Walker-Raumzeit heißt Friedmann-Kosmos, falls  $p = 0$ .

**Bemerkung.** Die Bedingung  $p = 0$  ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung an  $f$ , die man lösen kann. Für  $n = 3$  erhalten wir:

- (1)  $\kappa = 0$ :  $f(t) = C(t - t_0)^{\frac{2}{3}}$  (Neil'sche Parabel).
- (2)  $\kappa = 1$ :  $t(\theta) = C(\theta - \sin(\theta))$  und  $f(t(\theta) - t_0) = C(1 - \cos(\theta))$  (Zykloide).
- (3)  $\kappa = -1$ :  $t(\eta) = C(\sinh(\eta) - \eta)$  und  $f(t(\eta) - t_0) = C(\cosh(\eta) - 1)$ .



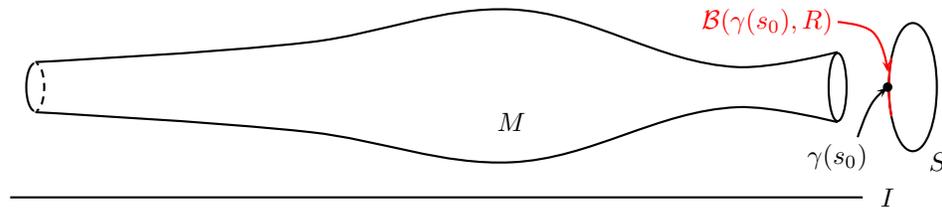
**Bemerkung.** Sei  $(M := I \times S, g := -dt \otimes dt + f(t)^2 g_S)$  eine Robertson-Walker-Raumzeit. Sei  $c(s) =: (t(s), \gamma(s))$  eine lichtartige Geodätische. Aus  $c' = t'\nu + \gamma'$  folgt

$$0 = g(c', c') = -(t')^2 + f(t)^2 \|\gamma'\|_S^2,$$

d.h.  $\|\gamma'\|_S = \frac{|t'|}{f(t)}$ .

Betrachte den Fall  $t' > 0$ : aus der letzten Gleichung folgt, für ein festes  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} L[\gamma] &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{s_0}^{\infty} \|\gamma'(s)\|_S ds \\ &= \int_{s_0}^{\infty} \frac{t'(s)}{f(t(s))} ds \\ &\leq \int_{t(s_0)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)}. \end{aligned}$$



Falls  $f$  hinreichend schnell wächst, z.B.  $f(t) = t^2$  oder  $f(t) = e^t$ , dann ist  $R := \int_{t(s_0)}^{\infty} \frac{dt}{f(t)} < \infty$ .

$\implies$  Die Kurve  $\gamma$  verlässt den Ball  $\mathcal{B}(\gamma(s_0), R) \subset S$  nicht.

$\implies$  Teile des Universums sind von einem gegebenen Beobachtungspunkt aus nicht sichtbar. Man spricht dann von einem *Horizontproblem*.

## 1.5 Die Schwarzschild-Halbebene

Fixiere  $m > 0$  (physikalisch interpretiert als Masse eines rotationssymmetrischen schwarzen Loches).

**Definition 1.5.1.** Die Lorentz-Mannigfaltigkeit

$$\left( M := \mathbb{R} \times (0, 2m) \cup (2m, \infty), g := -h(r)dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)}dr \otimes dr \right),$$

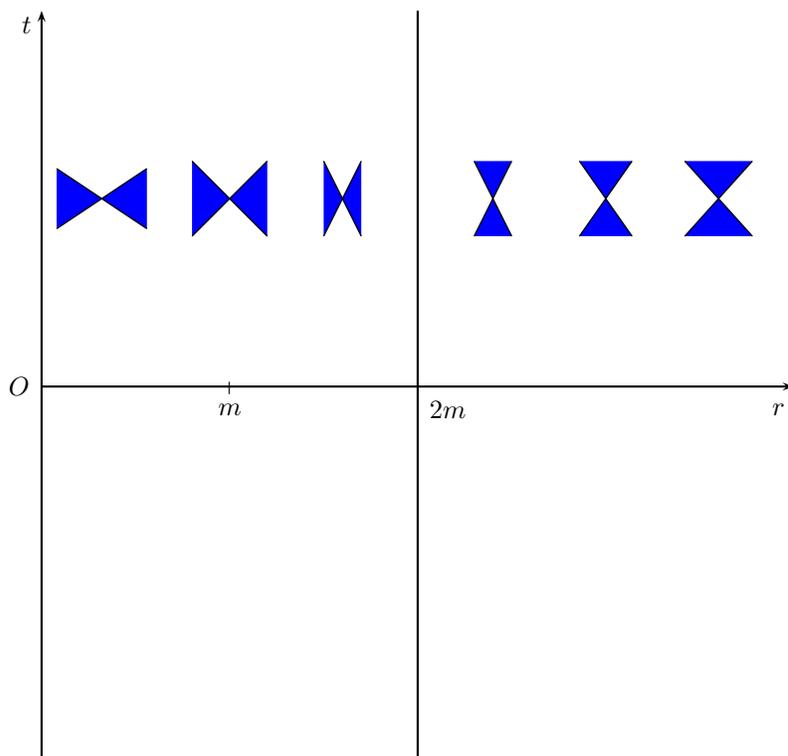
wobei  $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$ , heißt Schwarzschild-Halbebene.

Man berechnet für die Krümmung  $K = \frac{2m}{r^3}$ .

Der Lichtkegel des Tangentialraumes von  $M$  in  $(t, r)$  ist die Menge der bzgl.  $g_{(t,r)}$  lichtartigen Vektoren, d.h. Vektoren  $X = a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial r}$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= g_{(t,r)}(X, X) \\ &= -a^2 h(r) + \frac{1}{h(r)} b^2, \end{aligned}$$

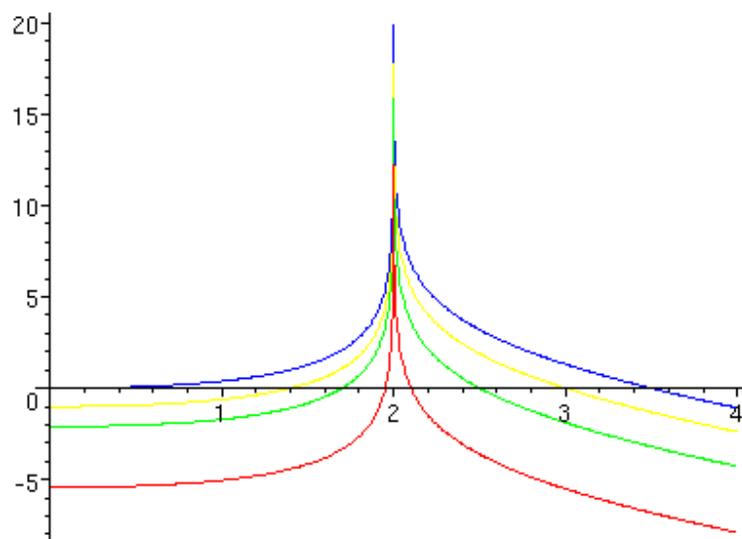
d.h.  $b = \pm h(r)a$ .



Die lichtartigen Kurven  $c(s) =: (t(s), r(s))$  von  $M$  erfüllen dann  $c'(s) = t'(s)\frac{\partial}{\partial t} + r'(s)\frac{\partial}{\partial r}$  mit  $r' = \pm h(r)t'$ , d.h., für ein festes  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 t(s) - t(s_0) &= \int_{s_0}^s t'(s) ds \\
 &= \pm \int_{s_0}^s \frac{r'(s)}{h(r(s))} ds \\
 &= \pm \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{r dr}{r - 2m} \\
 &= \pm \int_{r(s_0) - 2m}^{r(s) - 2m} \frac{\rho + 2m}{\rho} d\rho \\
 &= \pm \left\{ r(s) - r(s_0) + 2m \ln \left( \frac{r(s) - 2m}{r(s_0) - 2m} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{r \rightarrow 0} K = +\infty$  kann  $M$  nicht nach  $r = 0$  fortgesetzt werden. Es gibt ferner Geodätische, die in "endlicher Zeit" nach  $r = 0$  laufen, d.h.  $M$  ist nicht geodätisch vollständig.



Die "Singularität" bei  $r = 2m$  lässt sich durch Koordinatenwechsel (die sogenannten *Kruskal-Koordinaten*) beheben.

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} (t, r) &\longmapsto (t + t_0, r) & (t_0 \in \mathbb{R} \text{ fest}) \\ (t, r) &\longmapsto (-t, r) \end{aligned}$$

sind Isometrien. Daher gilt: die Teilmenge  $\{t_0\} \times (0, 2m)$  bzw.  $\{t_0\} \times (2m, \infty)$  ist zeitartige bzw. raumartige Geodätische.



# Kapitel 2

## Kausalität

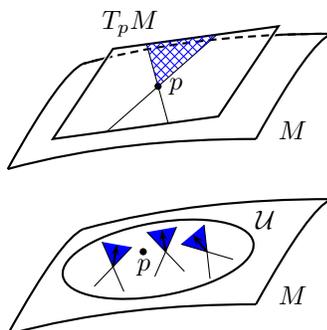
### 2.1 Grundlegende Begriffe

**Definition 2.1.1.** Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Eine Zeit-Orientierung von  $M$  ist eine Abbildung

$$\zeta : M \longrightarrow \mathcal{P}(TM)$$

(wobei  $\mathcal{P}(TM)$  die Potenzmenge von  $TM$  ist) s.d.:

- (i) Für jedes  $p \in M$  ist  $\zeta(p)$  eine der beiden Zusammenhangskomponenten der Menge der zeitartigen Vektoren in  $T_pM$ .
- (ii) Für jedes  $p \in M$  existiert eine Kartenumgebung  $(\mathcal{U}, x)$  von  $p$  so, dass  $\frac{\partial}{\partial x^0}(q) \in \zeta(q)$  für alle  $q \in \mathcal{U}$ .



Das Paar  $(M, \zeta)$  ist zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Eine Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  heißt zeitorientierbar falls sie eine Zeit-Orientierung besitzt.

**PROPOSITION 2.1.2.** Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

- (i)  $M$  ist zeitorientierbar.
- (ii)  $M$  besitzt ein stetiges zeitartiges Vektorfeld.
- (iii)  $M$  besitzt ein glattes zeitartiges Vektorfeld.

Beweis:

“(iii)  $\implies$  (ii)” ist trivial.

“(ii)  $\implies$  (i)”: Sei  $X$  ein stetiges zeitartiges Vektorfeld. Definiere  $\zeta(p)$  als die Zusammenhangskomponente, die  $X(p)$  enthält.

Sei  $p \in M$ . Wähle Karte  $(\mathcal{U}, x)$  um  $p$  so, dass  $\frac{\partial}{\partial x^0}(p) \in \zeta(p)$ . Daraus folgt, dass  $g(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0}) < 0$  in  $p$  und damit (nach eventueller Verkleinerung von  $\mathcal{U}$ ) auf ganz  $\mathcal{U}$ . Da  $X(p) \in \zeta(p)$  und  $\frac{\partial}{\partial x^0}(p) \in \zeta(p)$ , gilt  $g(X, \frac{\partial}{\partial x^0}) < 0$  in  $p$

$\implies$  nach eventueller weiterer Verkleinerung von  $\mathcal{U}$  gilt  $g(X, \frac{\partial}{\partial x^0}) < 0$  auf  $\mathcal{U}$

$\implies \frac{\partial}{\partial x^0}(q) \in \zeta(q)$  für alle  $q \in \mathcal{U}$ .

“(i)  $\implies$  (iii)”: Sei  $\zeta$  Zeit-Orientierung. Sei  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$  eine lokal-endliche Überdeckung von  $M$ , wobei  $(\mathcal{U}_\alpha, x_\alpha)$  Karte wie in (ii) ist. Sei  $\{\rho_\alpha\}_\alpha$  Teilung der Eins zu  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ .

Setze  $X := \sum_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0}$ . Das Vektorfeld  $X$  ist wohldefiniert und glatt auf  $M$ . Für  $p \in M$  ist  $X(p) = \sum_\alpha \rho_\alpha(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^0}(p) \in \zeta(p)$ , da  $\zeta(p)$  konvex ist und wegen  $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^0}(p) \in \zeta(p)$  und  $\rho_\alpha(p) \geq 0$ . Insbesondere ist  $X$  zeitartig.

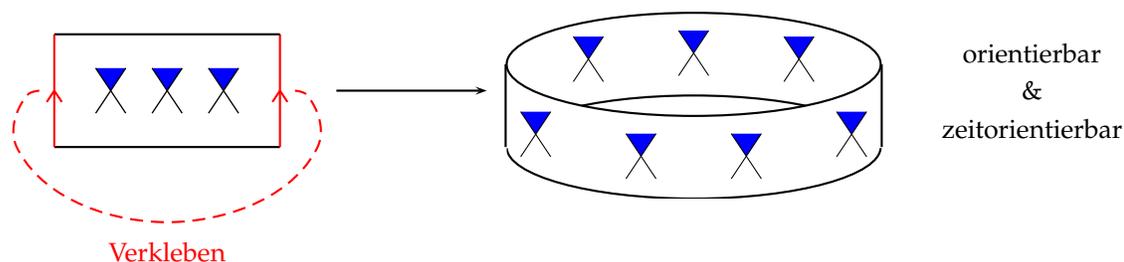
□

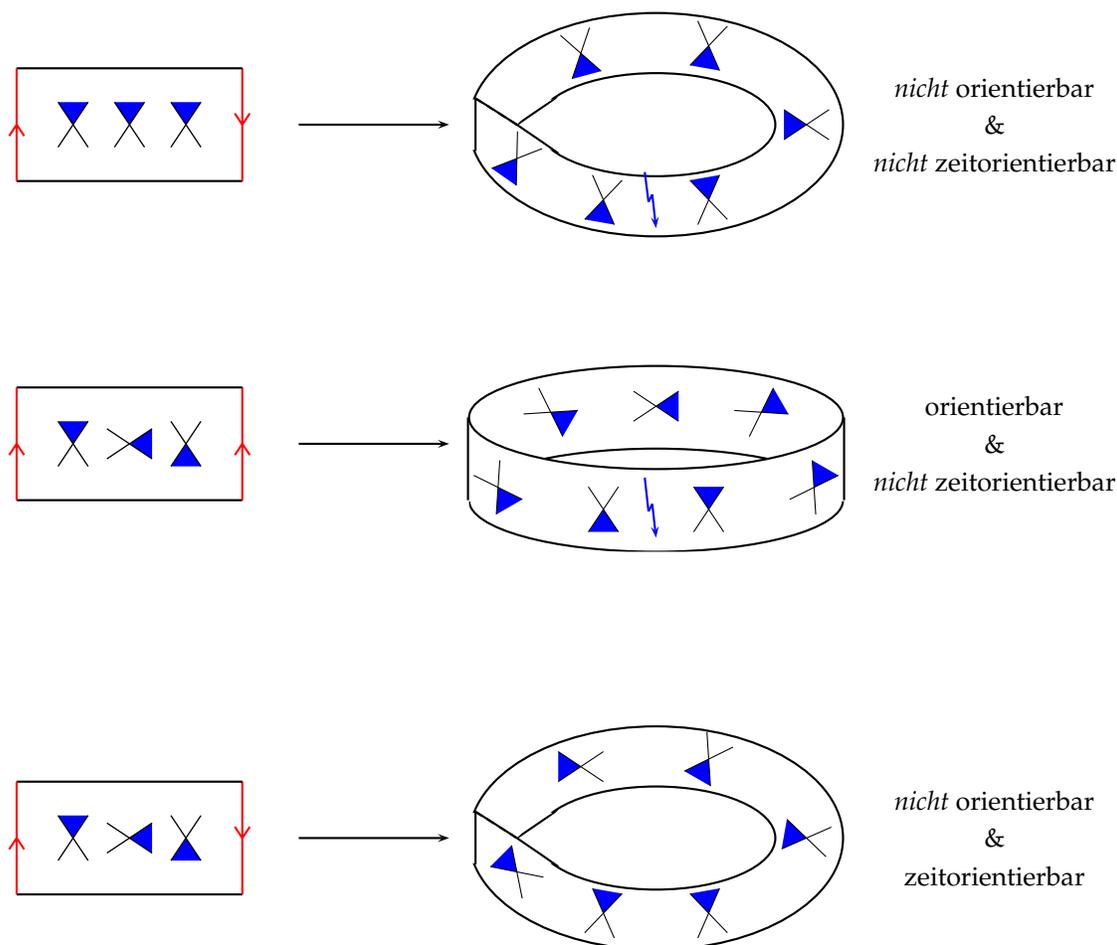
### Bemerkungen.

- 1.) Alle bisherigen Beispiele sind zeitorientierbar.
- 2.) Es gibt keine Verbindung zwischen Orientierbarkeit und Zeit-Orientierbarkeit:

orientierbar	$\nrightarrow$	zeitorientierbar
(hängt nur von $M$ ab)	$\neq$	(hängt ab von $M$ und auch von $g$ )

### Beispiele.





Von nun an sei  $(M, \zeta)$  stets zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Unter Kurve in  $M$  verstehen wir stets eine stetige stückweise glatte Kurve. Eine **kausale Kurve** heißt **zukunftsgerichtet** (bzw. **vergangenheitsgerichtet**), falls für alle  $s$  gilt  $c'(s) \in \overline{\zeta(c(s))}$  (bzw.  $c'(s) \in -\overline{\zeta(c(s))}$ ).

**Notationen.** Seien  $p, q$  in  $M$ . Man definiert die folgenden Relationen:

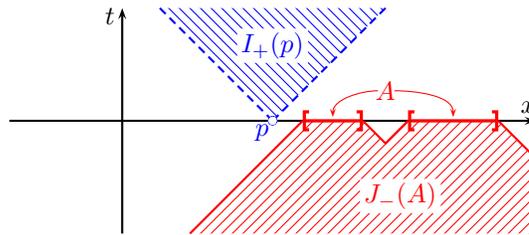
$$\begin{aligned}
 p \ll q & : \iff \exists \text{ zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von } p \text{ nach } q \\
 p < q & : \iff \exists \text{ zukunftsgerichtete kausale Kurve von } p \text{ nach } q \\
 p \leq q & : \iff p < q \text{ oder } p = q
 \end{aligned}$$

Für  $A \subset M$  definiere:

$$\begin{aligned} I_+(A) &:= \{q \in M \mid \exists p \in A : p \ll q\} && \text{die chronologische Zukunft von } A \\ J_+(A) &:= \{q \in M \mid \exists p \in A : p \leq q\} && \text{die kausale Zukunft von } A \end{aligned}$$

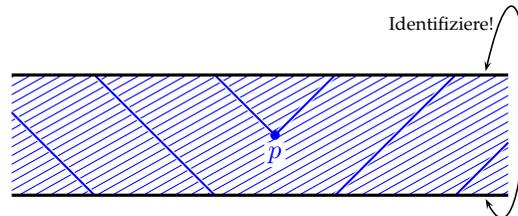
Analog definiert man die chronologische bzw. kausale Vergangenheit  $I_-(A)$  bzw.  $J_-(A)$  von  $A$ .

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum.



**Bemerkung.**  $I_+(A) = \bigcup_{p \in A} I_+(p)$  und  $J_+(A) = \bigcup_{p \in A} J_+(p)$ .

**Beispiel.** Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}}) / \mathbb{Z}e_0 \cong (S^1 \times \mathbb{R}, -d\theta^2 + dr^2)$ .



$$I_+(p) = J_+(p) = I_-(p) = J_-(p) = M.$$

Die Relation " $\ll$ " ist transitiv:

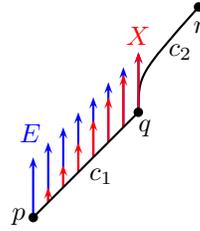
$$\left. \begin{array}{l} p \ll q \\ q \ll r \end{array} \right\} \implies p \ll r.$$

Denn: man kann immer zukunftsgerichtete zeitartige bzw. kausale Kurven zusammensetzen. Es gilt sogar eine stärkere Form der Transitivität:

**PROPOSITION 2.1.3.** Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Seien  $p, q, r$  in  $M$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} p \ll q \text{ und } q \leq r &\implies p \ll r \\ p \leq q \text{ und } q \ll r &\implies p \ll r \end{aligned}$$

*Beweis:* Betrachte nur die zweite Aussage (die erste geht analog). Der Fall  $p = q$  ist trivial. Sei also  $p < q$ . Sei  $c_1 : [0, 1] \rightarrow M$  eine kausale zukunftsgerichtete Kurve von  $p$  nach  $q$ , und  $c_2 : [1, 2] \rightarrow M$  eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve von  $q$  nach  $r$ .



Sei  $E(t)$  das parallele Vektorfeld längs  $c_1$  mit  $E(1) = \dot{c}_2(1)$ . Setze  $X(t) := tE(t)$ . Sei  $c_{1,s}$  Variation von  $c_1$  mit  $c_{1,s}(0) = p$  fix,  $c_{1,s}(1) = c_2(1 + s)$ , und  $\frac{\partial}{\partial s} c_{1,s}(t) = X(t)$ .

Nach Voraussetzung gilt  $g\left(\frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}, \frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}\right) \leq 0$  für  $s = 0$ . Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g\left(\frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}, \frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}\right) &= 2g\left(\frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} c_{1,s}, \frac{\partial}{\partial t} c_{1,s}\right) \\ &\stackrel{\text{Torsionsfreiheit des Levi-Civita Zusammenhangs}}{=} 2g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c_{1,s}, \frac{\partial}{\partial t} c_{1,s}\right) \\ &\hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{X(t)} \\ &= 2g\left(\frac{\nabla}{\partial t}(tE(t)), \dot{c}_1\right) \\ &\stackrel{E \text{ parallel}}{=} 2g(E(t), \dot{c}_1(t)). \end{aligned}$$

Da  $E(t)$  bzw.  $\dot{c}_1(t)$  zukunftsgerichtet und zeitartig ist (bzw. zukunftsgerichtet und kausal), gilt  $2g(E(t), \dot{c}_1(t)) < 0$ . Es gilt also:  $g\left(\frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}, \frac{\partial c_{1,s}}{\partial t}\right) < 0$  für  $s > 0$  hinreichend klein und alle  $t \in [0, 1]$ .  
 $\implies c_{1,s} : [0, 1] \rightarrow M$  ist zukunftsgerichtet und zeitartig für  $s > 0$  hinreichend klein  
 $\implies c : [0, 2 - s] \rightarrow M$  ist zukunftsgerichtet und zeitartig, wobei

$$c(t) := \begin{cases} c_{1,s}(t) & \text{für } t \in [0, 1] \\ c_2(t + s) & \text{für } t \in [1, 2 - s] \end{cases}$$

(von  $p$  nach  $r$ ). Also ist  $p \ll r$ .

□

**KOROLLAR 2.1.4.**

$$\begin{aligned} I_+(A) &= I_+(I_+(A)) = J_+(I_+(A)) = I_+(J_+(A)) \\ J_+(J_+(A)) &= J_+(A) \end{aligned}$$

*Beweis:* Zur ersten Behauptung:  $I_+(A) \subset I_+(I_+(A)) \underbrace{\subset}_{\text{trivial}} J_+(I_+(A)) \underbrace{\subset}_{\text{Prop. 2.1.3}} I_+(A)$ . Die erste In-

klusion kann man so erklären: es existiere eine zukunftsgerichtete Kurve von  $A$  nach  $p \in I_+(A)$ . Wähle  $q$  darauf. Dann gilt  $q \in I_+(A)$  und daher  $p \in I_+(q) \subset I_+(I_+(A))$ .

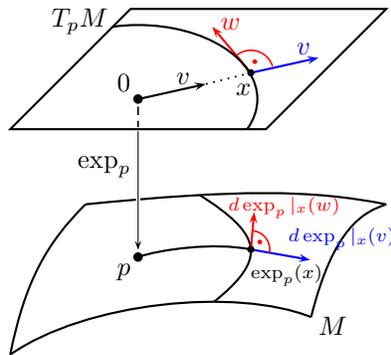
Analog zeigt man die Folge von Inklusionen:  $I_+(A) \subset I_+(I_+(A)) \underbrace{\subset}_{\text{trivial}} I_+(J_+(A)) \underbrace{\subset}_{\text{Prop. 2.1.3}} I_+(A)$ .

Zur zweiten Behauptung:  $J_+(A) \underbrace{\subset}_{\text{wegen } A \subset J_+(A)} J_+(J_+(A)) \underbrace{\subset}_{\substack{p \leq q \\ q \leq r}} J_+(A)$ .  
 $\left. \begin{matrix} p \leq q \\ q \leq r \end{matrix} \right\} \implies p \leq r$

□

**PROPOSITION 2.1.5** (Gauß-Lemma). Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Sei  $x \in T_p M$  im Definitionsbereich von  $\exp_p$ . Seien  $v := t_0 x$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ) und  $w \in T_p M$ . Dann gilt:

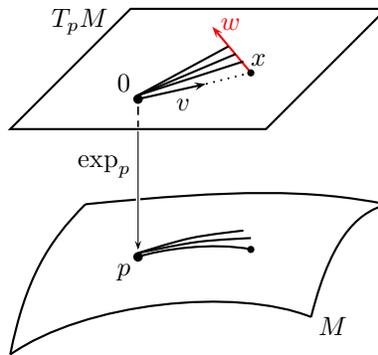
$$g(d_x \exp_p(v), d_x \exp_p(w)) = g(v, w).$$



*Beweis:* Da die zu beweisende Gleichung homogen in  $v$  ist, kann man o.B.d.A. annehmen, dass  $v = x$ , d.h.  $t_0 = 1$ .

Definiere

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \exp_p(t(v + sw)) \end{aligned}$$



Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(1, 0) &= d \exp_p(v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}(1, 0) &= d \exp_p(w) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also:  $g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial \psi}{\partial s}(1, 0)\right) = g(v, w)$ .

Die Kurve  $t \mapsto \psi(t, s)$  ist Geodätische mit Geschwindigkeitsvektor  $v + sw$  bei  $t = 0$ . Daher gilt

$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$  und  $g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = g(v + sw, v + sw)$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) &= g\left(\underbrace{\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}}_0, \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) + g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s}\right) \\ &= g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(v + sw, v + sw) \\ &= g(v, w) + sg(w, w) \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial \psi}{\partial s}(t, 0)\right) &= g(v, w) \\ g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, 0), \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial s}(0, 0)}_0\right) &= 0 \\ \implies g\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial \psi}{\partial s}(1, 0)\right) &= g(v, w). \end{aligned}$$

□

**LEMMA 2.1.6.** Sei  $M$  eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei  $p$  in  $M$ . Sei  $\gamma : [0, b] \rightarrow T_p M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = 0$  und die im Definitionsbereich von  $\exp_p$  verläuft. Sei  $c := \exp_p \circ \gamma : [0, b] \rightarrow M$  zeitartig und zukunftsgerichtet.

Dann gilt:

$$\gamma(t) \in I_+ \subset T_p M \quad \forall t \in [0, b]$$

*Beweis:*

a) Sei  $q : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(x) := g(x, x)$ , die quadratische Form zu  $g$ . In Minkowski-Koordinaten auf  $T_p M$  lautet  $q$

$$q(x) = -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2$$

Wähle Koordinaten so, dass  $\frac{\partial}{\partial x^0}$  zukunftsgerichtet ist. Wegen  $dq = -2x^0 dx^0 + 2 \sum_{i=1}^n x^i dx^i$  ist  $\text{grad}q(x) = 2 \sum_{i=0}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 2x$ . Das Gauß-Lemma für  $v := w := 2x$  liefert:

$$g(d \exp_p(\text{grad}q), d \exp_p(\text{grad}q)) = g(\text{grad}q, \text{grad}q) = 4q(x)$$

Setze  $P(x) := d \exp_p(\text{grad}q(x))$ . Für  $x \in I \subset T_p M$  ist  $P(x)$  somit zeitartig.

Ferner ist für  $x \in I_+ \subset T_p M$  der Vektor  $P(x)$  zukunftsgerichtet.

b) Betrachte zunächst den Fall, dass  $\gamma$  glatt ist.

$q(\gamma(0)) = q(0) = 0$  und  $\dot{c}(0) = \underbrace{d_0 \exp_p}_{\text{Id}}(\dot{\gamma}(0))$  ist zeitartig, somit auch  $\dot{\gamma}(0)$ .

$\implies$  Für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein ist  $\gamma(t) \in I_+$  für alle  $t$  in  $[0, \varepsilon]$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(\gamma(t)) &= g(\text{grad}q, \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(d \exp_p(\text{grad}q), d \exp_p(\dot{\gamma}(t))) \quad (\text{aus Prop. 2.1.5 für } v := \text{grad}q, w := \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(P(\gamma(t)), \dot{c}(t)) \end{aligned}$$

Angenommen, es gäbe  $t_1 \in [0, b]$  s.d.  $q(\gamma(t_1)) = 0$ . O.B.d.A. sei  $t_1$  das kleinste derartige  $t_1$ . Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, dass

$$\exists t_0 \in (0, t_1) : \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} q(\gamma(t)) = g\left( \underbrace{P(\gamma(t_0))}_{\in I_+}, \underbrace{\dot{c}(t_0)}_{\text{zeitartig, zukunftsgerichtet}} \right) < 0,$$

zeitartig, zukunftsgerichtet

was ein Widerspruch ist. Deswegen gilt  $q(\gamma(t)) < 0$  für alle  $t \in [0, b]$ , d.h.  $\gamma(t) \in I_+$  für alle  $t \in [0, b]$ .

c) Sei nun  $\gamma$  stückweise glatt. Sei  $0 := b_0 < b_1 < \dots < b_N := b$  eine Unterteilung s.d.  $\gamma|_{[b_i, b_{i+1}]}$  glatt ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach  $N$ :

Induktionsanfang  $N = 1$ : siehe b).

Induktionsschritt  $N - 1 \rightarrow N$ : Nach Induktionsannahme ist  $\gamma([0, b_{N-1}]) \subset I_+$ .

$$\underbrace{\frac{d}{dt}q(\gamma(b_{N-1}^+))}_{\text{rechtseitige Ableitung}} = g\left( \underbrace{P(\gamma(b_{N-1}^+))}_{\text{zeitartig, zukunftsgerichtet}}, \underbrace{\dot{c}(b_{N-1}^+)}_{\text{zeitartig, zukunftsgerichtet}} \right) < 0$$

Wie in b) folgt nun:  $\gamma([b_{N-1}, b_N]) \subset I_+$ .

□

**Notationen.** Ist  $\Omega \subset M$  offen und  $A \subset \Omega$  beliebig, definiere

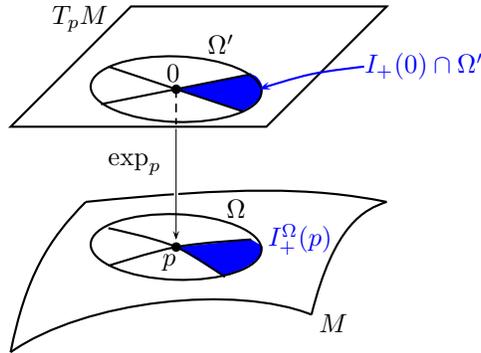
$$I_+^\Omega(A) := \{q \in \Omega \mid \exists p \in A \text{ mit } p \underbrace{\ll}_{\text{in } \Omega} q\}$$

und analog  $I_-^\Omega(A)$  bzw.  $J_\pm^\Omega(A)$ .

**KOROLLAR 2.1.7.** Sei  $M$  eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $p$  in  $M$ . Sei  $\Omega$  eine offene Umgebung von  $p$  in  $M$ , sei  $\Omega'$  eine offene Umgebung von  $0$  in  $T_p M$  s.d.  $\Omega'$  sternförmig bzgl.  $0$  ist und  $\exp_p|_{\Omega'} : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned} I_\pm^\Omega(p) &= \exp_p(I_\pm(0) \cap \Omega') \quad \text{und} \\ J_\pm^\Omega(p) &= \exp_p(J_\pm(0) \cap \Omega') \end{aligned}$$



*Beweis:*

Zu “ $\subset$ ” in erster Gleichung: Sei  $q$  in  $I_+^\Omega(p)$ . Dann existiert eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve  $c$  in  $\Omega$  von  $p$  nach  $q$ .

$\implies \gamma := \exp_p^{-1} \circ c$  verläuft nach Lemma in  $I_+(0)$

$\implies \exp_p^{-1}(q) \in I_+(0)$

$\implies q \in \exp_p(I_+(0) \cap \Omega')$ .

Zu “ $\supset$ ” in erster Gleichung: Sei  $x$  in  $I_+(0) \cap \Omega'$ . Die Abbildung  $t \mapsto t \cdot x$  ist ein Strahl, der auf  $[0, 1]$  ganz in  $I_+(0) \cap \Omega'$  läuft

$\implies t \mapsto \exp_p(tx)$  ist eine zeitartige zukunftsgerichtete Geodätische, die  $p$  mit  $\exp_p(x)$  verbindet (in  $\Omega$ )

$\implies \exp_p(x) \in I_+^\Omega(p)$ .

Zu “ $\supset$ ” in zweiter Gleichung: Sei  $x$  in  $J_+(0) \cap \Omega'$ . Dann ist  $t \mapsto \exp_p(tx)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , eine kausale zukunftsgerichtete Geodätische von  $p$  nach  $\exp_p(x)$ . Daraus folgt, dass  $\exp_p(x)$  in  $J_+^\Omega(p)$  liegt.

Zu “ $\subset$ ” in zweiter Gleichung: Sei  $q$  in  $J_+^\Omega(p)$ . Wähle eine Folge  $(q_i)_i$  mit  $q_i \gg q$  und  $q_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$ . Für  $i$  hinreichend groß ist  $q_i$  in  $\Omega$ .

Man hat also:  $p \leq q \ll q_i$ . Aus Proposition 2.1.3 folgt, dass  $p \ll q_i$ , d.h.  $q_i$  liegt in  $I_+^\Omega(p)$ . Aus der ersten Gleichung muss  $\exp_p^{-1}(q_i)$  in  $I_+(0) \cap \Omega'$  liegen; aber  $\exp_p^{-1}(q_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \exp_p^{-1}(q)$ , somit

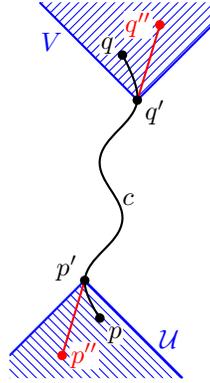
$\exp_p^{-1}(q)$  gehört zu  $\overline{I_+(0) \cap \Omega'}^{\Omega'} = J_+(0) \cap \Omega'$ , d.h.  $q$  gehört zu  $\exp_p(J_+(0) \cap \Omega')$ .

□

**PROPOSITION 2.1.8.** Die Relation “ $\ll$ ” ist offen, d.h. gilt  $p \ll q$ , dann existieren Umgebungen  $\mathcal{U}$  von  $p$  und  $V$  von  $q$  s.d.  $p' \ll q'$  für alle  $p' \in \mathcal{U}$  und  $q'$  in  $V$ .

*Beweis:* Sei  $p \ll q$ . Sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve mit  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$ . Setze  $p' := c(\varepsilon)$ , mit  $\varepsilon > 0$  so klein, dass es eine offene Umgebung  $\Omega$  von  $p'$  gibt mit  $p \in \Omega$  und  $\exp_{p'} : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus ist für geeignete sternförmige Umgebung  $\Omega'$  von  $0$  in  $T_{p'}M$ .

Setze  $\mathcal{U} := I_-^\Omega(p') = \exp_{p'}(I_-(0) \cap \Omega')$ . Dies ist eine offene Umgebung von  $p$  in  $M$ .



Definiere  $V$  analog. Sei nun  $p''$  in  $U$  und  $q''$  in  $V$ . Dann gilt  $p'' \ll p' \ll q' \ll q''$ , und somit  $p'' \ll q''$ .

□

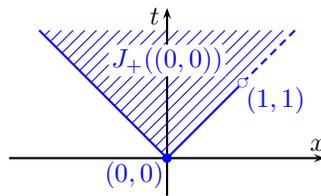
**KOROLLAR 2.1.9.** Sei  $A \subset M$  beliebig. Dann ist  $I_{\pm}(A) \subset M$  offene Teilmenge.

*Beweis:* Nach der letzten Proposition ist für  $p$  in  $M$  die Teilmenge  $I_{+}^{\Omega}(p)$  offen in  $\Omega$ . Aber  $I_{+}(A) = \bigcup_{p \in A} I_{+}^{\Omega}(p)$ , also ist auch offen.

□

**Vorsicht!** Selbst wenn  $A \subset M$  abgeschlossen ist, braucht  $I_{\pm}(A)$  nicht abgeschlossen zu sein.

**Beispiel.** Sei  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$  mit Minkowski-Metrik. Dann ist  $J_{+}((0, 0))$  nicht abgeschlossen.



**PROPOSITION 2.1.10.** Für beliebiges  $A \subset M$  gilt:

- (1)  $I_{+}(A) = \overset{\circ}{J}_{+}(A)$
- (2)  $J_{+}(A) \subset \overline{I_{+}(A)}$ , mit Gleichheit g.d.w.  $J_{+}(A)$  abgeschlossen ist.

*Beweis:*

Zu (1): Da  $I_{+}(A)$  offen ist, und wegen  $I_{+}(A) \subset J_{+}(A)$ , gilt  $I_{+}(A) \subset \overset{\circ}{J}_{+}(A)$ .

Sei nun  $p$  in  $\overset{\circ}{J}_{+}(A)$ . Wähle  $q \ll p$  s.d.  $q$  in  $\overset{\circ}{J}_{+}(A)$ . Dann existiert  $r$  in  $A$  mit  $r < q$ . Also  $r < q \ll p$ , und daher  $r \ll p$  und  $p \in I_{+}(A)$ . Daraus folgt die erste Behauptung.

Zu (2): a) Zeige zunächst  $J_+^\Omega(p) \subset \overline{I_+^\Omega(p)}$ .

Sei  $q$  in  $J_+^\Omega(p)$ . Falls  $q = p$ , dann  $p \in I_+^\Omega(p)$ .

Sei also  $p < q$ . Sei  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine zukunftsgerichtete kausale Kurve von  $p$  nach  $q$ . Setze, für  $i \geq 1$ ,  $q_i := c(1 - \frac{1}{i})$ . Wähle  $r_i \gg q_i$  s.d.  $r_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q$ . Dann gilt  $r_i \gg q_i > p$ , somit  $r_i \gg p$ , d.h.  $r_i \in I_+^\Omega(p)$ .

b) Sei nun  $A$  beliebig. Dann gilt  $J_+(A) = \bigcup_{p \in A} J_+^\Omega(p) \subset \bigcup_{p \in A} \underbrace{\overline{I_+^\Omega(p)}}_{\subset I_+(A)} \subset \overline{I_+(A)}$ . Die Inklusion in der

zweiten Behauptung wird dadurch gezeigt.

c) Zum Gleichheitsfall: Falls sie gilt, ist  $J_+(A)$  offensichtlich abgeschlossen. Umgekehrt, ist  $J_+(A)$  abgeschlossen, dann folgt aus  $I_+(A) \subset J_+(A)$  und  $J_+(A) = \overline{J_+(A)}$  die Inklusion  $\overline{I_+(A)} \subset \overline{J_+(A)} = J_+(A)$ , also  $\overline{I_+(A)} = J_+(A)$ .

□

**PROPOSITION 2.1.11.** Sei  $M$  eine kompakte zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine geschlossene zeitartige Kurve.

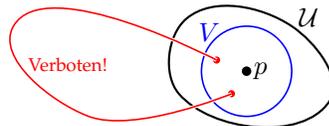
*Beweis:* Die Familie  $\{I_+^M(p)\}_{p \in M}$  bildet eine offene Überdeckung von  $M$ . Da  $M$  kompakt ist, existieren  $p_1, \dots, p_N$  in  $M$  s.d.  $M = \bigcup_{i=1}^N I_+^M(p_i)$ . O.B.d.A. sei kein  $I_+^M(p_i)$  in einem  $I_+^M(p_j)$  mit  $j \neq i$  enthalten.

Wäre  $p_1$  in  $I_+^M(p_i)$  für ein  $i \geq 2$ , dann wäre auch  $I_+^M(p_1)$  in  $I_+^M(p_i)$  enthalten, was ein Widerspruch zur letzten Wahl der  $p_i$  ist. Daraus folgt, dass  $p_1$  in  $I_+^M(p_1)$  liegen muss, d.h. es existiert eine zeitartige Kurve von  $p_1$  nach  $p_1$ .

□

**Definition 2.1.12.** Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeit  $M$  erfüllt die

- Chronologiebedingung falls es in  $M$  keine geschlossenen zeitartigen Kurven gibt
- Kausalitätsbedingung falls es in  $M$  keine geschlossenen kausalen Kurven gibt
- starke Kausalitätsbedingung falls es zu jedem  $p$  in  $M$  und zu jeder Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $p$  eine Umgebung  $V$  von  $p$  gibt s.d. jede kausale Kurve, die in  $V$  startet und endet ganz in  $\mathcal{U}$  verläuft.



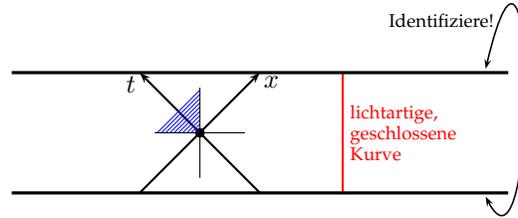
**Bemerkung.** Es gilt:

$$\text{Starke Kausalitätsbedingung} \implies \text{Kausalitätsbedingung} \implies \text{Chronologiebedingung}$$

Die entgegengesetzten Implikationen gelten nicht.

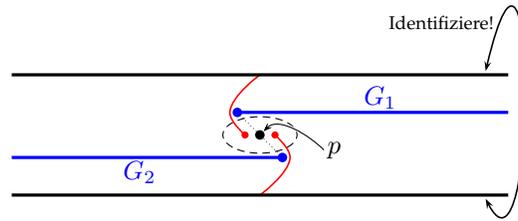
**Beispiele.**

1.) Sei  $M := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \cdot (1, 1)$  mit vom Minkowski-Raum induzierten Metrik und Zeitorientierung.



Die Gerade  $t \mapsto t \cdot (1, 1)$  liefert eine geschlossene lichtartige Kurve in  $M$ , daher  $M$  erfüllt nicht die Kausalitätsbedingung. Aber  $M$  erfüllt die Chronologiebedingung.

2.) Sei  $M := \left\{ \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \cdot (1, 0) \right\} \setminus (G_1 \cup G_2)$ , wobei  $G_1 := \left\{ \left( \frac{1}{8}, s \right) \mid s \geq -\frac{1}{8} \right\}$  und  $G_2 := \left\{ \left( -\frac{1}{8}, s \right) \mid s \leq \frac{1}{8} \right\}$ .



Die Mannigfaltigkeit  $M$  erfüllt die Kausalitätsbedingung, aber nicht die starke Kausalitätsbedingung.

**Definition 2.1.13.** Die Länge einer Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  ist

$$L[c] := \int_a^b \sqrt{|g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))|} dt$$

**Bemerkung.** Lichtartige Kurven haben Länge 0.

**Definition 2.1.14.** Für  $p, q$  in  $M$  heißt

$$\tau(p, q) := \begin{cases} \sup\{L[c] \mid c \text{ zukunftsgerichtete kausale Kurve von } p \text{ nach } q\} & \text{falls } p < q \\ 0 & \text{falls } p \not< q \end{cases}$$

Zeitunterschied zwischen  $p$  und  $q$ .

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum. Für  $p < q$  ist  $\tau(p, q) = \sqrt{|\langle p - q, p - q \rangle|}$ . Denn: Das Geradensegment  $t \mapsto tq + (1 - t)p$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist kausale zukunftsgerichtete Kurve von  $p$  nach  $q$  mit Länge  $\sqrt{|\langle p - q, p - q \rangle|}$ .

1. Fall:  $p - q$  zeitartig.

Nach Anwendung einer Poincaré-Transformation können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $p = (0, \dots, 0)$  und  $q = (T, \dots, 0)$  mit  $T > 0$ . Sei nun  $c$  eine kausale zukunftsgerichtete Kurve von  $p$  nach  $q$ . Es gilt  $(c^0)' > 0$ ; nach Umparametrisierung gilt dann  $c^0(t) = t$  und somit  $c(t) = (t, x(t))$  wobei  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

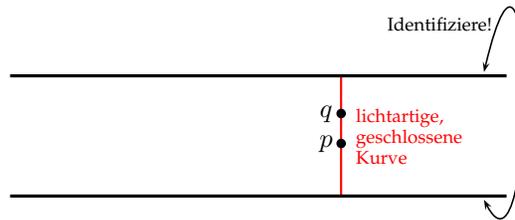
Wir berechnen  $L[c]$ :

$$\begin{aligned} L[c] &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^T \sqrt{|\langle (1, \dot{x}(t)), (1, \dot{x}(t)) \rangle|} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{|-1 + \|\dot{x}(t)\|^2|} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{1 - \|\dot{x}(t)\|^2} dt \\ &\leq \int_0^T 1 dt = T = \sqrt{|\langle p - q, p - q \rangle|}. \end{aligned}$$

2. Fall:  $p - q$  lichtartig.

Alle kausalen Kurven von  $p = 0$  nach  $q \in C_+(0)$  sind lichtartig, haben also Länge 0; daher gilt  $\tau(p, q) = 0 = \sqrt{|\langle p - q, p - q \rangle|}$ .

**Beispiel.** Sei  $M :=$  Lorentz-Zylinder  $= \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}e_0$ .



Es gilt  $\tau(p, q) = \infty$ .

**PROPOSITION 2.1.15.** Sei  $M$  eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann gelten:

- (1)  $\tau(p, q) > 0 \iff p \ll q$
- (2) Inverse Dreiecksungleichung: sei  $p \leq q$  und  $q \leq r$ , dann

$$\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$$

- (3) Die Funktion  $\tau : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ist unterhalbstetig.

*Beweis:*

Zu (1):

" $\Leftarrow$ ": Ist  $p \ll q$ , so existiert eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$ . Daraus folgt  $\tau(p, q) \geq L[c] > 0$ .

" $\Rightarrow$ ": Sei  $\tau(p, q) > 0$ . Dann existiert eine zukunftsgerichtete kausale Kurve  $c$  von  $p$  nach  $q$  mit  $L[c] > 0$ . Da  $L[c]$  positiv ist, enthält  $c$  ein zeitartiges Segment  $\sigma$ . Wähle  $p_1, q_1$  auf  $\sigma$  mit  $p_1 \ll q_1$ . Es gilt:  $p \leq p_1 \ll q_1 \leq q$ , und aus Proposition 2.1.3 somit  $p \ll q$ .

Zu (2):

1. Fall:  $\tau(p, q) < \infty$  und  $\tau(q, r) < \infty$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine zukunftsgerichtete kausale Kurve  $c_1$  von  $p$  nach  $q$  mit Länge  $L[c_1] \geq \tau(p, q) - \varepsilon$ , und ebenfalls eine zukunftsgerichtete kausale Kurve  $c_2$  von  $q$  nach  $r$  mit Länge  $L[c_2] \geq \tau(q, r) - \varepsilon$ . Daraus folgt:  $\tau(p, r) \geq L[c_1 \cup c_2] = L[c_1] + L[c_2] \geq \tau(p, q) - \varepsilon + \tau(q, r) - \varepsilon$ . Da

$\varepsilon > 0$  beliebig gewählt werden kann, gilt die Behauptung.

2. Fall:  $\tau(p, q) = \infty$  oder  $\tau(q, r) = \infty$ .

O.B.d.A. sei  $\tau(p, q) = \infty$ . Dann existieren beliebig lange zukunftsgerichtete kausale Kurven von  $p$  nach  $q$ . Zusammensetzen dieser Kurven mit einer festen zukunftsgerichteten kausalen Kurve von  $q$  nach  $r$  liefert  $\tau(p, r) = \infty$ .

Zu (3): Seien  $p, q$  in  $M$ .

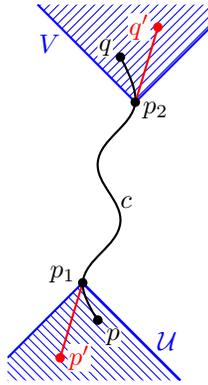
1. Fall:  $\tau(p, q) = 0$ . Es gibt nichts zu zeigen.

2. Fall:  $0 < \tau(p, q) < \infty$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . O.B.d.A. sei  $\varepsilon < \frac{\tau(p, q)}{2}$ . Wähle zukunftsgerichtete kausale Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$  mit  $L[c] \geq \tau(p, q) - \frac{\varepsilon}{2}$  ( $> \frac{3}{4}\tau(p, q)$ ). Wähle  $\delta_1 \in (0, 1)$  s.d.  $0 < L[c|_{[0, \delta_1]}] < \frac{\varepsilon}{4}$  ( $< \frac{\tau(p, q)}{8}$ ), und  $\delta_2 \in (0, 1)$  s.d.  $0 < L[c|_{[\delta_2, 1]}] < \frac{\varepsilon}{4}$  ( $< \frac{\tau(p, q)}{8}$ ).

Setze  $\mathcal{U} := I_-(p_1)$  und  $\mathcal{V} := I_+(p_2)$ . Da  $L[c|_{[0, \delta_1]}] > 0$  ist  $p \in I_-(p_1) = \mathcal{U}$  offene Umgebung von  $p$ . Analog ist  $V$  offene Umgebung von  $q$ .

Seien nun  $p' \in \mathcal{U}$  und  $q' \in \mathcal{V}$ .



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \tau(p', q') &\geq \tau(p', p_1) + \tau(p_1, q_1) + \tau(q_1, q') \\
 &\geq 0 + L[c|_{[\delta_1, \delta_2]}] + 0 \\
 &\geq L[c] - L[c|_{[0, \delta_1]}] - L[c|_{[\delta_2, 1]}] \\
 &\geq \tau(p, q) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \\
 &\geq \tau(p, q) - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

3. Fall:  $\tau(p, q) = \infty$ .

Es gibt beliebig lange zukunftsgerichtete zeitartige Kurven von  $p$  nach  $q$ . Dieselbe Konstruktion wie im 2. Fall liefert Umgebungen von  $p$  und  $q$  s.d. für Punkte aus diesen Umgebungen sich beliebig lange kausale Kurven ergeben.

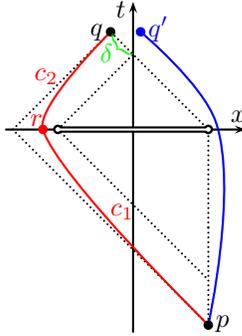
□

**Bemerkung.** Im Allgemeinen ist  $\tau$  nicht oberhalbstetig.

**Beispiel.** Sei  $M := \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [-1, 1])$ . Sei für zukunftsgerichtete kausale Kurven von  $p$  nach  $q$  der Schnittpunkt mit  $\{t = 0\}$  mit  $p$  bezeichnet. Es gilt

$$\tau(p, q) = \tau(p, r) + \tau(r, q) = \sqrt{|\langle p - r, p - r \rangle|} + \sqrt{|\langle r - q, r - q \rangle|} < \varepsilon$$

für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein.



Für " $q'$  rechts von  $q$ " gibt es zukunftsgerichtete kausale Kurven von  $p$  nach  $q'$ , die  $\{t = 0\}$  in  $(t, 0) = r$  mit  $t > 1$  schneiden. Z.B. sei  $c := c_1 \cup c_2$  mit Geradensegment  $c_1$  von  $q$  nach  $r'$  und Geradensegment  $c_1$  von  $r'$  nach  $q'$  zusammengesetzt. Dann kann  $L[c_1]$  länger als 2 gewählt werden.

## 2.2 Kurvendeformationen

**Definition 2.2.1.** Eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$ , für die es eine Funktion  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = \alpha(t) \dot{c}(t)$$

für alle  $t \in [a, b]$ , heißt Prägeodätische.

Geodätische sind somit Prägeodätische mit  $\alpha \equiv 0$ . Jede Umparametrisierung einer Geodätischen ist Prägeodätische, denn ist  $c$  Geodätische und  $\tilde{c} = c \circ \phi$ , so gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\tilde{c}}(t) = \frac{\nabla}{dt} (\dot{\phi} \cdot (\dot{c} \circ \phi)) = \ddot{\phi} \cdot (\dot{c} \circ \phi) + \dot{\phi}^2 \cdot \left( \frac{\nabla}{dt} \dot{c} \circ \phi \right) = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \cdot \dot{\tilde{c}}(t).$$

Ist umgekehrt  $\tilde{c}$  eine Prägeodätische, so löst man  $\alpha = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}$  nach  $\phi$  (durch  $\phi(t) = \int_a^t e^{\int_a^\tau \alpha(s) ds} d\tau$ ) und erhält durch  $c := \tilde{c} \circ \phi^{-1}$  eine Geodätische.

**Bemerkung.** Im Beweis von Proposition 2.1.3 haben wir bereits gesehen: Ist  $c : [a, b] \rightarrow M$  kausale Kurve, ist  $c_s : [a, b] \rightarrow M$  Variation von  $c$  (wobei  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ) mit Variationsfeld  $X$  s.d.  $g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) < 0$ , dann ist  $c_s$  zeitartig für  $s > 0$  hinreichend klein.

**LEMMA 2.2.2.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  kausale Kurve, aber keine lichtartige Prägeodätische. Dann gibt es beliebig nahe bei  $c$  (in der kompakt-offenen Topologie) eine zeitartige Kurve mit denselben Endpunkten.

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $[a, b] = [0, 1]$ .

a) Betrachte zunächst den Fall, dass  $t_0 \in [0, 1]$  existiert s.d.  $\dot{c}(t_0)$  zeitartig ist. Dann enthält  $c$  ein zeitartiges Segment. Wie im Beweis von Proposition 2.1.3 erhalte Deformation zu zeitartiger Kurve.

O.B.d.A. sei von nun an  $c$  rein lichtartig.

b) Betrachte nun den Fall, dass  $c$  glatt und lichtartig ist (aber keine Prägeodätische).

Wegen  $g(\dot{c}, \dot{c}) = 0$  gilt  $0 = \frac{d}{dt}g(\dot{c}, \dot{c}) = 2g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right)$ , d.h.  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$  steht senkrecht auf  $\dot{c}(t)$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$ . Aber für ein lichtartiges  $v$  gilt  $v^\perp = \mathbb{R}v \oplus_\perp E$ , wobei  $E$  ein raumartiger Untervektorraum des

Minkowski-Raums ist.

Wäre  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t) = \alpha(t)\dot{c}(t)$  für alle  $t$ , dann wäre  $c$  eine Prägeodätische, was der Voraussetzung widersprechen würde. Es existiert also  $t > 0$  s. d.  $\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$  raumartig ist. Insbesondere ist  $t \mapsto g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\right) \geq 0$  nicht konstant 0.

Wähle  $Y_0$  in  $T_{c(0)}M$  zeitartig s. d.  $g(Y_0, \dot{c}(0)) < 0$ . Sei  $Y$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $Y(0) = Y_0$ . Dann ist  $Y(t)$  zeitartig und  $g(Y(t), \dot{c}(t)) < 0$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$ .

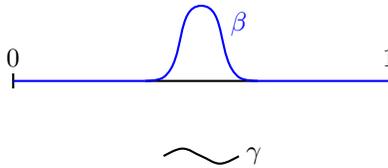
Setze  $X(t) := \alpha(t)Y(t) + \beta(t)\frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  noch in  $C^\infty([0, 1])$  zu finden sind, s. d.  $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = 0$  und  $g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) < 0$ . Dann folgt die Behauptung aus der Vorbemerkung. Aus  $g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right) = 0$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla^2}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right) + g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) &= \dot{\alpha}g(Y, \dot{c}) + \underbrace{\dot{\beta}g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right)}_{=0} + \beta g\left(\frac{\nabla^2}{dt}\dot{c}, \dot{c}\right) \\ &= \dot{\alpha}g(Y, \dot{c}) - \beta g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right). \end{aligned}$$

Nun ist  $\gamma := \frac{g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right)}{g(Y, \dot{c})} \geq 0$  aber nicht identisch 0, so dass es ein glattes  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $\beta(0) = \beta(1) = 0$  und  $\int_0^1 \beta(t)\gamma(t)dt = -1$ .



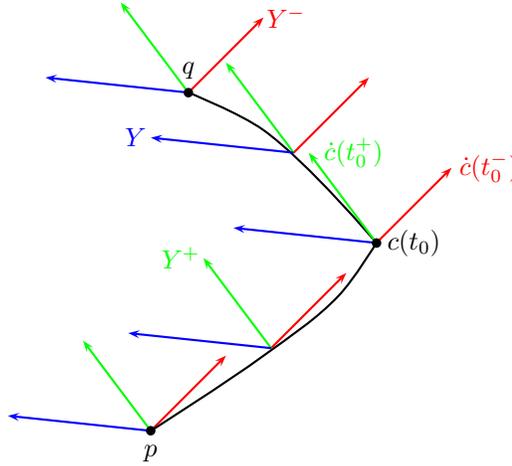
Setze  $\alpha(t) := \int_0^t (\beta\gamma + 1)(s) ds$ . Dann ist  $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$ , und es gilt

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) &= \underbrace{(\beta\gamma + 1)}_{>\beta\gamma} g(Y, \dot{c}) - \beta g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right) \\ &< \beta g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right) - \beta g\left(\frac{\nabla}{dt}\dot{c}, \frac{\nabla}{dt}\dot{c}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Sei nun  $c$  stückweise glatt und lichtartig. Ist eines dieser Segmente keine Prägeodätische, dann kann es nach b) zu zeitartigem Segment deformiert werden. Nach a) kann dann die ganze Kurve zu einer zeitartigen deformiert werden.

Sei also jedes Segment Prägeodätische. Wir haben mindestens einen Knick, d.h. es existiert  $t_0$  in  $(0, 1)$  s.d.  $\dot{c}(t_0^-)$  und  $\dot{c}(t_0^+)$  linear unabhängig sind. Wegen a) können wir annehmen, dass genau ein Knick vorliegt, d.h. es existiert ein solches  $t_0$  und auf  $[0, t_0^-]$  und  $[t_0^+, 1]$  ist  $c$  glatt.

Sei  $Y^\pm(t)$  die Parallelverschiebung von  $\dot{c}(t_0^\pm)$  längs  $c$ . Weil  $c|_{[0, t_0]}$  Prägeodätische ist, sind  $\dot{c}(t)$  und  $Y^-(t)$  kollinear für  $t \in [0, t_0]$ . Analog sind  $\dot{c}(t)$  und  $Y^+(t)$  kollinear und haben gleiche Orientierung für  $t$  in  $[t_0, 1]$ .

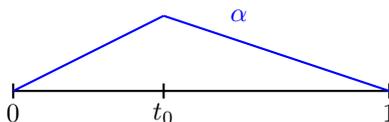


Setze  $Y := Y^+ - Y^-$ . Dann gilt auf  $[0, t_0]$ :

$$g(Y, \dot{c}) = g(Y^+, \dot{c}) - \underbrace{g(Y^-, \dot{c})}_{=0} < 0,$$

da  $Y^+$  und  $\dot{c}$  linear unabhängige lichtartige und gleich orientierte Vektoren sind. Analog gilt auf  $[t_0, 1]$ :  $g(Y, \dot{c}) = \underbrace{g(Y^+, \dot{c})}_{=0} - \underbrace{g(Y^-, \dot{c})}_{<0} > 0$ . Sei  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktion, die glatt auf  $[0, t_0^-]$

und  $[t_0^+, 1]$  ist mit  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$  und  $\alpha' > 0$  auf  $[0, t_0]$  sowie  $\alpha' < 0$  auf  $[t_0, 1]$ .

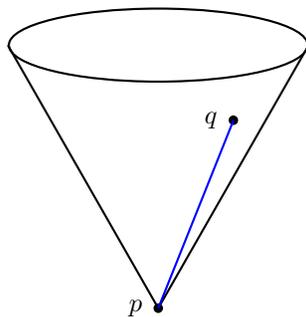


Setze  $X(t) := \alpha(t)Y(t)$ . Dann ist  $X(0) = 0$ ,  $X(1) = 0$  und  $g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) = \alpha'g(Y, \dot{c}) < 0$ , somit liefert die zu  $X$  gehörige Variation mit festen Endpunkten die gesuchte zeitartige deformierte Kurve.

□

**Bemerkung.** Ist  $c$  lichtartige Prägeodätische, so kann  $c$  im Allgemeinen nicht in zeitartige Kurve mit denselben Endpunkten deformiert werden.

**Beispiel.** Sei  $M :=$  der Minkowski-Raum.



Die Geodätische, die  $p$  mit  $q$  verbindet, kann nicht in zeitartige Kurve deformiert werden.

**LEMMA 2.2.3.** Sei  $c$  eine lichtartige Geodätische. Sei  $c_s$  eine Variation von  $c$  mit Variationsfeld  $X$ . Sei  $X \perp \dot{c}$  in den Endpunkten.

Falls es eine Folge  $s_i \rightarrow 0$  gibt, so dass  $c_{s_i}$  zeitartig ist, dann ist  $X \perp \dot{c}$  überall.

*Beweis:* O.B.d.A. seien alle  $s_i > 0$  oder alle  $s_i < 0$ . Es gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(\dot{c}_{s_i}, \dot{c}_{s_i})}{s_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(\dot{c}_{s_i}, \dot{c}_{s_i}) - g(\dot{c}, \dot{c})}{s_i - 0} = \frac{\partial}{\partial s} g(\dot{c}_s, \dot{c}_s) |_{s=0},$$

mit  $g(\dot{c}, \dot{c}) = 0$ , da  $c$  lichtartig ist. Wegen der Annahmen an  $s_i$  und  $c_{s_i}$  gilt dann  $\frac{\partial}{\partial s} g(\dot{c}_s, \dot{c}_s)|_{s=0} \leq 0$  bzw.  $\geq 0$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$ . Aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(\dot{c}_s, \dot{c}_s)|_{s=0} &= 2g\left(\frac{\nabla}{\partial s} \dot{c}_s|_{s=0}, \dot{c}\right) \\ &= 2g\left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} c_s|_{s=0}, \dot{c}\right) \\ &= 2g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0}, \dot{c}\right) \\ &= 2g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right), \end{aligned}$$

so dass  $g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) \leq 0$  bzw.  $\geq 0$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$ . Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) dt &= \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} (g(X, \dot{c})) - \underbrace{g(X, \frac{\nabla \dot{c}}{dt})}_{=0} \right\} dt \\ &= g(X, \dot{c})|_0^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\frac{d}{dt} (g(X, \dot{c})) = g\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot{c}\right) = 0$ . Somit ist  $g(X, \dot{c})$  konstant auf  $[0, 1]$ , also gleich 0.

□

Ist  $c_s$  eine Variation von  $c$  so, dass jedes  $c_s$  Geodätische ist, dann gilt für das zugehörige Variationsfeld  $\mathcal{J}(t) := \frac{\partial c_s(t)}{\partial s}|_{s=0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2}{dt^2} \mathcal{J} &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial t}|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{\partial s} \underbrace{\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial t}}_{=0}|_{s=0} + R(\dot{c}, \mathcal{J})\dot{c}. \end{aligned}$$

**Definition 2.2.4.** Ein Vektorfeld  $\mathcal{J}$  längs einer Geodätischen  $c$  heißt Jacobifeld, falls gilt

$$\frac{\nabla^2}{dt^2} \mathcal{J} + R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c} = 0.$$

Die Jacobifeldgleichung ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung an  $\mathcal{J}$ . Ein Jacobifeld ist somit festgelegt durch  $\mathcal{J}(0)$  und  $\frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}(0)$ . Man kann wegen der Linearität (in  $\mathcal{J}$ ) der Jacobifeldgleichung zu vorgegebenen  $\mathcal{J}(0)$  und  $\frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}(0)$  Lösung längs ganz  $c$  finden. Die Menge der Jacobifelder bildet einen  $2 \dim(M)$ -dimensionalen Vektorraum.

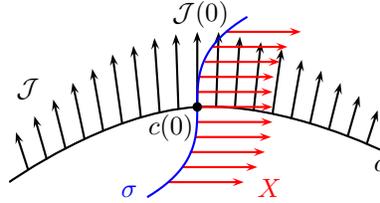
**LEMMA 2.2.5.** Sei  $\mathcal{J}$  ein glattes Vektorfeld längs einer Geodätischen  $c$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $\mathcal{J}$  ist Jacobifeld
- (2) Es existiert eine Variation  $c_s$  von  $c$  mit Variationsfeld  $\mathcal{J}$ .

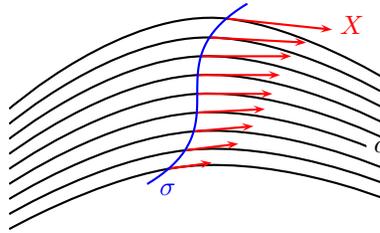
*Beweis:*

(2) $\implies$ (1): bereits gezeigt

(1) $\implies$ (2): Sei  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld. Wähle eine Kurve  $\sigma$  mit  $\sigma(0) = c(0)$  und  $\sigma'(0) = \mathcal{J}(0)$ . Wähle ein Vektorfeld  $X$  längs  $\sigma$  mit  $X(0) = \dot{c}(0)$  und  $\frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)$ .



Setze  $c_s(t) := \exp_{\sigma(s)}(tX(s))$ .



Es gilt

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \exp_{\sigma(0)}(tX(0)) \\ &= \exp_{c(0)}(t\dot{c}(0)) \\ &= c(t). \end{aligned}$$

Somit ist  $c_s$  geodätische Variation von  $c$ .

Sei  $\tilde{\mathcal{J}} := \frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0}$  das Variationsfeld von  $c_s$ . Dann ist  $\tilde{\mathcal{J}}$  Jacobifeld. Zu zeigen sind jetzt:  $\tilde{\mathcal{J}}(0) = \mathcal{J}(0)$  und  $\frac{\nabla \tilde{\mathcal{J}}}{dt}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(0) &= \frac{d}{ds} \exp_{\sigma(s)}(0)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \sigma(s)|_{s=0} \\ &= \mathcal{J}(0), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \tilde{\mathcal{J}}}{dt}(0) &= \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \exp_{\sigma(s)}(tX(s))|_{s=t=0} \\ &= \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \exp_{\sigma(s)}(tX(s))|_{s=t=0} \\ &= \frac{\nabla}{ds} X(s)|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0). \end{aligned}$$

□

**Beispiele.**

1. Sei  $\mathcal{J}(t) := (at + b)\dot{c}(t)$ , wobei  $c$  Geodätische ist. Wegen  $\frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J}(t) = \frac{\nabla}{dt}\left(a\dot{c} + (at + b)\underbrace{\frac{\nabla\dot{c}}{dt}}_{=0}\right) = a\frac{\nabla\dot{c}}{dt} = 0$  und  $R(\dot{c}, \mathcal{J})\dot{c} = (at + b)R(\dot{c}, \dot{c})\dot{c} = 0$ , ist  $\mathcal{J}$  ein Jacobifeld. Als geodätische Variation können wir hier wählen

$$c_s(t) := c((1 + as)t + bs),$$

da  $\frac{\partial c_s(t)}{\partial s}|_{s=0} = (at + b)\dot{c}(t) = \mathcal{J}(t)$ .

2. Für  $M := \mathbb{R}^n$  mit euklidischer oder Minkowski-Metrik ist  $R = 0$ . Die Jacobifeldgleichung lautet also  $\frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J} = 0$ . Die allgemeine Lösung ist  $\mathcal{J}(t) = tX(t) + Y(t)$  mit  $X, Y$  parallel. Die zugehörige geodätische Variation lautet dann

$$c_s(t) = c(t) + s(tX(t) + Y(t)).$$

3. Hat  $M$  konstante Schnittkrümmung  $\kappa$ , dann ist

$$R(X, Y)Z = \kappa\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}.$$

Sei  $c$  eine Geodätische in  $M$ . Setze  $\eta := g(\dot{c}, \dot{c})$ . Sind  $X(t)$  und  $Y(t)$  parallele Vektorfelder längs  $c$ , die punktweise senkrecht zu  $\dot{c}$  stehen. Dann ist

$$\mathcal{J}(t) := \mathfrak{s}_{\eta\kappa}(t)X(t) + \mathfrak{c}_{\eta\kappa}(t)Y(t)$$

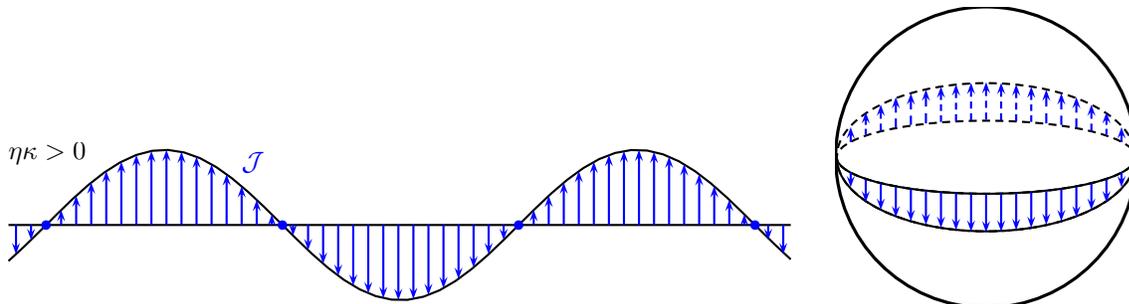
ein Jacobifeld, wobei, für  $\delta$  in  $\mathbb{R}$ ,

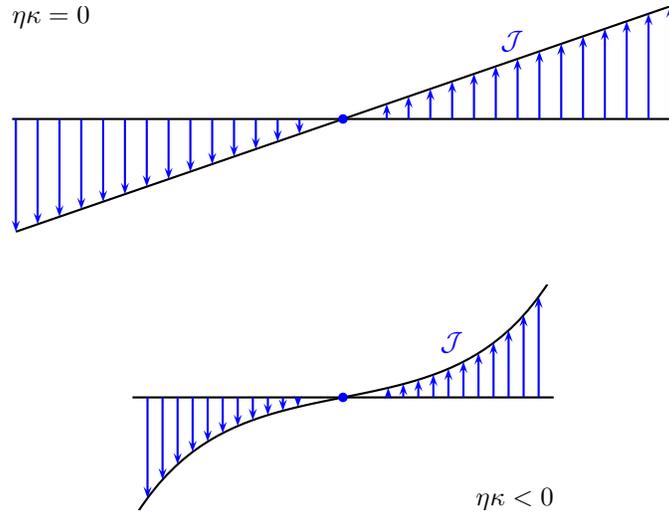
$$\mathfrak{s}_\delta(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta}t) & \text{falls } \delta > 0 \\ t & \text{falls } \delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\delta|}} \sinh(\sqrt{|\delta|}t) & \text{falls } \delta < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_\delta(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\delta}t) & \text{falls } \delta > 0 \\ 1 & \text{falls } \delta = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\delta|}t) & \text{falls } \delta < 0 \end{cases}$$

Es gilt  $\mathfrak{s}_\delta'' = -\delta\mathfrak{s}_\delta$  bzw.  $\mathfrak{c}_\delta'' = \delta\mathfrak{c}_\delta$ , daher  $\frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J} = -\eta\kappa\mathcal{J}$ . Andererseits gilt für  $R$ :

$$R(\dot{c}, \mathcal{J})\dot{c} = \kappa\left\{\underbrace{g(\mathcal{J}, \dot{c})}_{=0}\dot{c} - \underbrace{g(\dot{c}, \dot{c})}_{=\eta}\mathcal{J}\right\} = -\kappa\eta\mathcal{J},$$

und somit ist die Jacobifeldgleichung erfüllt.





Sei  $P \subset M$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, sei  $p \in P$ . Dann gilt für Vektorfelder auf  $P$ :

$$(\nabla_X^M Y)(p) = \underbrace{(\nabla_X^P Y)(p)}_{\in T_p P} + \underbrace{II_p(X(p), Y(p))}_{\in N_p P}.$$

Die Abbildung  $II_p : T_p P \times T_p P \rightarrow N_p P$  ist bilinear und symmetrisch.

Definiere  $\widetilde{II}_p : T_p P \times N_p P \rightarrow T_p P$  durch

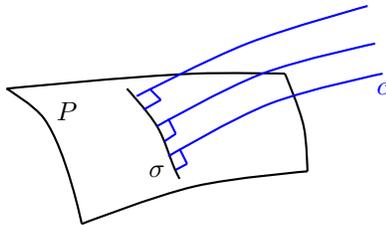
$$g(\widetilde{II}(X, \nu), Y) := -g(II_p(X, Y), \nu)$$

für alle  $X, Y$  tangential an  $P$  und  $\nu$  normal an  $P$  (für fixiertes  $X$  ist also  $\widetilde{II}(X, \cdot) = -(II(X, \cdot))^t : N_p P \rightarrow T_p P$ ). Die Abbildung  $\widetilde{II}$  ist bilinear.

**LEMMA 2.2.6.** Sei  $P \subset M$  semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei  $c$  Geodätische in  $M$  mit  $p := c(0) \in P$  und  $\dot{c}(0) \perp P$ . Sei  $\mathcal{J}$  Jacobifeld längs  $c$ . Dann sind äquivalent:

(1) Das Feld  $\mathcal{J}$  ist Variationsfeld einer geodätischen Variation  $c_s$  von  $c$  mit  $c_s(0) \in P$  und  $\dot{c}_s(0) \in N_{c_s(0)}P$  für alle  $s$ .

(2) Es gilt  $\mathcal{J}(0) \in T_p P$  und  $\tan(\frac{\nabla^M}{dt} \mathcal{J}(0)) = \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))$ , wobei  $\tan : T_p M \rightarrow T_p P$  die Orthogonalprojektion ist.



*Beweis:*

(1) $\implies$ (2): Die Kurve  $\sigma(s) := c_s(0)$  verläuft in  $P$ , also  $\mathcal{J}(0) = \sigma'(0) \in T_p P$ . Sei  $X$  ein tangentiales

Vektorfeld auf  $P$ . Wegen  $g(X(\sigma(s)), \dot{c}_s(0)) = 0$  für alle  $s$ , gilt

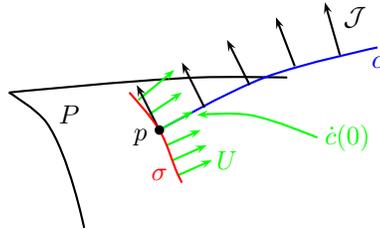
$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{ds} g(X(\sigma(s)), \dot{c}_s(0)) \Big|_{s=0} \\
 &= g\left(\left(\frac{\nabla^M}{ds}\right)\Big|_{s=0} X(\sigma(s)), \dot{c}(0)\right) + g\left(X(p), \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} c_s \Big|_{s=t=0}\right) \\
 &= g\left(\left(\frac{\nabla^P}{ds}\right)\Big|_{s=0} X(\sigma(s)) + II_p(\dot{\sigma}(0), X(p)), \dot{c}(0)\right) + g\left(X(p), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} c_s \Big|_{s=t=0}\right) \\
 &= -g\left(\widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)), X(p)\right) + g\left(\frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}(0), X(p)\right) \\
 &= g\left(\tan\left(\frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}(0)\right) - \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)), X(p)\right).
 \end{aligned}$$

Da  $X(p) \in T_p P$  beliebig vorgegeben werden kann, folgt

$$\tan\left(\frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}(0)\right) - \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)) = 0.$$

(2) $\implies$ (1): Wie im Beweis von Lemma 2.2.5 ist die geodätische Variation gegeben durch  $c_s(t) = \exp_{\sigma(s)}(tX(s))$  mit  $\sigma(0) = p$ ,  $\dot{\sigma}(0) = \mathcal{J}(0)$ ,  $X(0) = \dot{c}(0)$  und  $\frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)$ . Jetzt brauchen wir ferner  $\sigma(s) \in P$  und  $X(s) \in N_{\sigma(s)} P$  für alle  $s$ .

Wegen der Voraussetzung " $\mathcal{J}(0) \in T_p P$ " können wir  $\sigma$  so wählen, dass  $\sigma(s) \in P$ .



Verschiebe  $\dot{c}(0)$  normal-parallel längs  $\sigma$  und erhalte  $U(s) \in N_{\sigma(s)} P$ , d.h.  $\text{nor}\left(\frac{\nabla^M}{ds} U(s)\right) = 0$  mit  $U(0) = \dot{c}(0)$ . Verschiebe  $\text{nor}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right)$  normal-parallel längs  $\sigma$  und erhalte  $V(s) \in N_{\sigma(s)} P$ . Setze  $X(s) := U(s) + sV(s) \in N_{\sigma(s)} P$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 X(0) &= U(0) = \dot{c}(0) \\
 \text{nor}\left(\frac{\nabla X}{ds}(0)\right) &= \text{nor}\left(\frac{\nabla U}{ds}(0) + V(0)\right) = \text{nor}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right).
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die tangentielle Komponente von  $\frac{\nabla X}{ds}(0)$ :

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\frac{\nabla X}{ds}(0)\right) &= \tan\left(\frac{\nabla U}{ds}(0) + V(0)\right) \\
 &= \frac{\nabla U}{ds}(0).
 \end{aligned}$$

Es gilt also für beliebiges an  $P$  tangentiales Vektorfeld  $Y$  längs  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 g\left(\tan\left(\frac{\nabla X}{ds}\right)(0), Y(0)\right) &= g\left(\frac{\nabla U}{ds}(0), Y(0)\right) \\
 &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \underbrace{g(U(s), Y(s))}_{=0} - \underbrace{g(U(0), \frac{\nabla Y}{ds}(0))}_{\in N_p P} \\
 &= -g(\underbrace{U(0)}_{=\dot{c}(0)}, \underbrace{II_p(\dot{c}(0), Y(0))}_{=\mathcal{J}(0)}) \\
 &= g(\widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)), Y(0)) \\
 &= g\left(\tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}\right)(0), Y(0)\right).
 \end{aligned}$$

Da  $Y(0) \in T_p P$  beliebig gewählt werden kann, gilt

$$\tan\left(\frac{\nabla X}{ds}\right)(0) = \tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}\right)(0),$$

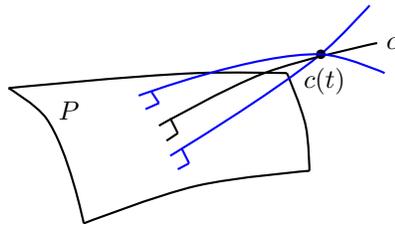
und somit  $\frac{\nabla X}{ds}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)$ .

□

**Definition 2.2.7.** Sei  $P \subset M$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei  $p \in P$ , sei  $c$  Geodätische in  $M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) \in N_p P$ . Wir sagen,  $P$  hat Brennpunkt längs  $c$  der Ordnung  $\mu$  bei  $t$ , falls

$$\mu := \dim\{\text{Jacobifelder } \mathcal{J} \text{ längs } c \mid \mathcal{J}(0) \in T_p P, \tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}\right)(0) = \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)) \text{ und } \mathcal{J}(t) = 0\}$$

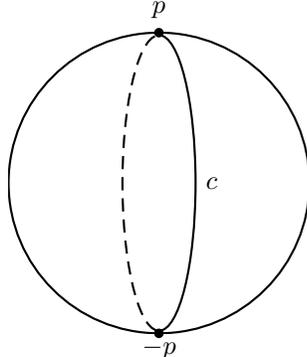
positiv ist. Wir nennen  $t$  dann auch Brennstelle von  $P$  längs  $c$ .



### Beispiele.

1. Im Fall  $P = \{p\}$  ist  $\mu = \dim\{\text{Jacobifelder } \mathcal{J} \text{ längs } c \mid \mathcal{J}(0) = \mathcal{J}(t) = 0\}$ . Man spricht dann statt von Brennpunkten von *konjugierten Punkten*.

2. Sei  $M := S^n$  und  $P := \{p\}$ . Der Punkt  $p$  hat längs jeder nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c$  mit  $c(0) = p$  einen konjugierten Punkt bei  $t = k\pi$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) der Ordnung  $\mu = n - 1$ .



Denn: Ist  $E$  parallel längs  $c$  mit  $E \perp c$ , dann ist  $\mathcal{J}(t) = \sin(t)E(t)$  Jacobifeld mit  $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}(k\pi) = 0$ .

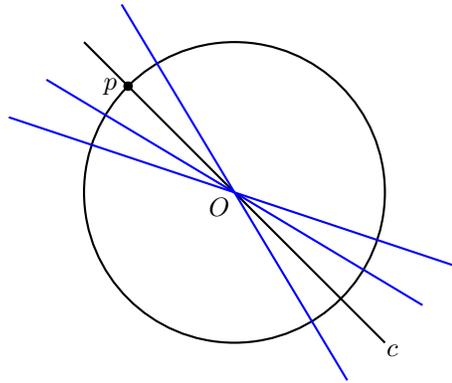
**Bemerkung.** Sei  $\dim(M) = n$  und  $\dim(P) = m$ . Die Bedingung  $\mathcal{J}(0) \in T_p P$  verringert den  $2n$ -dimensionalen Vektorraum der Jacobifelder längs  $c$  um  $n - m$  Dimensionen, die Bedingung  $\tan(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)) = \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))$  um weitere  $m$  Dimensionen. Also ist

$$\dim\{\text{Jacobifelder } \mathcal{J} \text{ längs } c \mid \mathcal{J}(0) \in T_p P, \quad \tan(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)) = \widetilde{II}_p(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))\} = n.$$

Da das Jacobifeld  $\mathcal{J}(t) = t\dot{c}(t)$  diese beiden Bedingungen erfüllt, aber für  $t \neq 0$  nie verschwindet, gilt stets

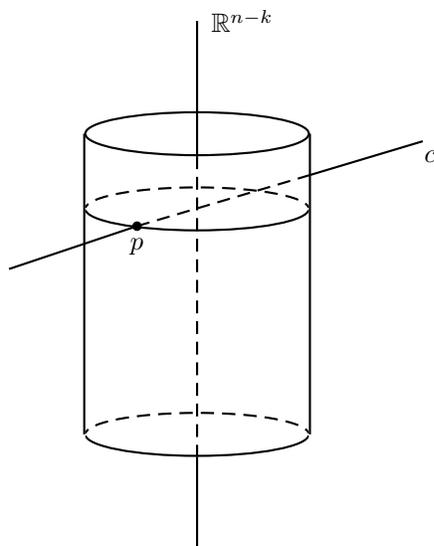
$$\mu \leq n - 1.$$

3. Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{eukl}})$  und  $P := S^n$ . Sei  $p \in P$  und setze  $c(t) := (1 - t)p$ .



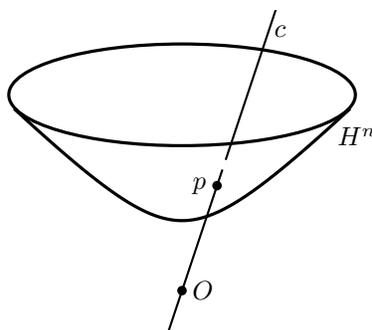
Zu  $E \in T_p P$  sei  $E(t)$  das parallelverschobene Vektorfeld längs  $c$ . Dann ist  $\mathcal{J}(t) := (1 - t)E(t)$  Jacobifeld mit  $\mathcal{J}(0) = E \in T_p P$  und  $\mathcal{J}(1) = 0$ . Außerdem gilt  $\tan(\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}(0)) = \tan(-E) = -E$ . Ferner ist  $II(X, Y) = \langle X, Y \rangle \cdot \dot{c}(0)$  und somit  $\widetilde{II}(X, \dot{c}(0)) = -X$ . Also ist  $\tan(\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}(0)) = -E = \widetilde{II}(E, \dot{c}(0)) = \widetilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))$ . Daraus folgt, dass  $S^n$  Brennpunkt längs  $c$  der Ordnung  $n$  bei  $t = 1$  hat.

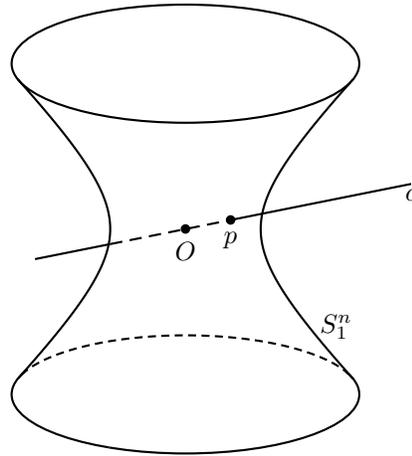
4. Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{eukl}})$  und  $P := S^k \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^{n+1}$ .



Sei  $p := (p_1, p_2) \in P$  und setze  $c(t) := ((1-t)p_1, p_2)$ . Ist  $E \in T_{p_1}S^k$ , so ist für längs  $c$  parallel verschobenes  $E(t)$  das Feld  $\mathcal{J}(t) := (1-t)E(t)$  Jacobifeld längs  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) = E \in T_{p_1}S^k \subset T_pP$  und  $\mathcal{J}(1) = 0$ . Wie im vorangegangenen Beispiel sieht man, dass auch die Bedingung an  $\tan(\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}(0))$  erfüllt ist. Daraus folgt, dass  $P$  Brennpunkt der Ordnung  $\mu = k$  längs  $c$  bei  $t = 1$  hat.

5. Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$  und  $P := H^n$  oder  $P := S_1^n$ .



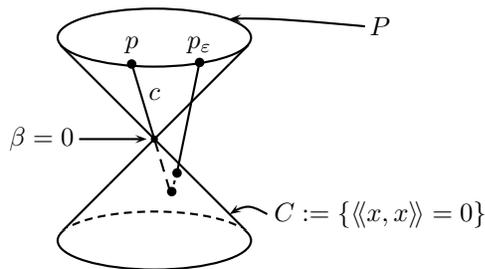


Sei  $p \in P$  fest. Setze  $c(t) := (1 - t)p$ . Diese Kurve ist eine Geodätische von  $M$ , und aus den elementaren Eigenschaften von den Untermannigfaltigkeiten  $H^n$  und  $S_1^n$  (siehe Abschnitt 1.2) trifft  $c$  die Hyperfläche  $H^n$  bzw.  $S_1^n$  senkrecht (bzgl. der Minkowski-Metrik). Zu  $c$  und  $E \in T_p P$  ist also  $\dot{c}(0) \in N_p P$  und für das parallel verschobene  $E(t)$  längs  $c$  ist  $\mathcal{J}(t) := (1 - t)E(t)$  Jacobifeld mit den erforderlichen Eigenschaften. Daraus folgt, dass  $P$  Brennpunkt der Ordnung  $n$  längs  $c$  bei  $t = 1$  hat.

**PROPOSITION 2.2.8.** Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $P \subset M$  eine raumartige Untermannigfaltigkeit. Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  lichtartige Geodätische in  $M$  mit  $c(0) =: p \in P$  und  $\dot{c}(0) \in N_p P$ . Setze  $q := c(b)$ .

Hat  $P$  einen Brennpunkt längs  $c$  vor  $q$  (d.h. für ein  $t \in (0, b)$ ) dann gibt es beliebig nahe bei  $c$  eine zeitartige Kurve von  $P$  nach  $q$ .

**Beispiel.** Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^3, g_{\text{Mink}})$  und  $P := \{1\} \times S^1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ . Betrachte den Punkt  $p := (1, 1, 0)$ .



Die Kurve  $c(t) := (1 - t)(1, 1, 0)$  ist lichtartige Geodätische.

Setze  $q := c(b) = \underbrace{(1 - b, 1 - b, 0)}_{\beta} = (\beta, \beta, 0)$  ( $\beta < 1$ ). Zu  $p_\varepsilon := (1, \cos(\varepsilon), \sin(\varepsilon))$  (wobei  $\varepsilon > 0$  klein

ist), betrachte

$$\begin{aligned}
 \langle\langle q - p_\varepsilon, q - p_\varepsilon \rangle\rangle &= \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} \beta - 1 \\ \beta - \cos(\varepsilon) \\ -\sin(\varepsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta - 1 \\ \beta - \cos(\varepsilon) \\ -\sin(\varepsilon) \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \\
 &= -(\beta - 1)^2 + (\beta - \cos(\varepsilon))^2 + \sin^2(\varepsilon) \\
 &= -\beta^2 + 2\beta - 1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\varepsilon) + \cos^2(\varepsilon) + \sin^2(\varepsilon) \\
 &= \underbrace{2\beta(1 - \cos(\varepsilon))}_{>0}.
 \end{aligned}$$

Für  $\beta < 0$  ist die Verbindungskurve

$$c_\varepsilon(t) := p_\varepsilon + \frac{t}{b}(q - p_\varepsilon) = \left(1 - t, \cos(\varepsilon) + \frac{t}{b}(\beta - \cos(\varepsilon)), \sin(\varepsilon)(1 - \frac{t}{b})\right)$$

eine zeitartige Geodätische, die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $[0, b]$  gegen  $c$  konvergiert.

**LEMMA 2.2.9.** Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und  $P \subset M$  eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  Geodätische mit  $c(0) =: p \in P$  und  $\dot{c}(0) \in N_p P$ . Dann ist

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, b] \mid P \text{ hat Brennpunkt längs } c \text{ in } t\}$$

kompakt.

*Beweis des Lemmas 2.2.9:*

a) Setze  $\mathcal{V} := \{\text{Jacobifelder } \mathcal{J} \text{ längs } c \mid \mathcal{J}(0) \in T_p P \text{ und } \tan(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)) = \widetilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))\}$ . Wähle eine riemannsche Metrik  $h$  auf  $M$  und definiere für  $\mathcal{J} \in \mathcal{V}$ :

$$\|\mathcal{J}\| := \sup_{t \in [0, b]} |\mathcal{J}(t)|_h + \sup_{t \in [0, b]} \left| \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(t) \right|_h.$$

Dann ist  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$  ein  $n$ -dimensionaler normierter Vektorraum, wobei  $n := \dim(M)$ .

b) **Behauptung:**  $\mathcal{T} \subset (0, b]$  ist abgeschlossen.

*Beweis:* Seien  $t_i \in \mathcal{T}$  mit  $t_i \rightarrow t \in (0, b]$ . Zu zeigen ist,  $t \in \mathcal{T}$ .

Es existiert  $\mathcal{J}_i \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{J}_i \neq 0$ , mit  $\mathcal{J}_i(t_i) = 0$ . O.B.d.A. sei  $\|\mathcal{J}_i\| = 1$ . Nach Übergang zu Teilfolge können wir auch annehmen, dass  $\mathcal{J}_i \rightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{V}$ . Dann ist  $\|\mathcal{J}\| = 1$  und insbesondere  $\mathcal{J} \neq 0$ .

Sei  $P_{s,t}^c$  die Parallelverschiebung (bzgl. des Levi-Civita Zusammenhangs der ursprünglichen semi-riemannschen Metrik) längs  $c$  von  $T_{c(s)}M$  nach  $T_{c(t)}M$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{J}(t)|_h &\leq |\mathcal{J}(t) - P_{t_i,t}^c \mathcal{J}(t_i) + P_{t_i,t}^c \mathcal{J}(t_i) - \underbrace{P_{t_i,t}^c \mathcal{J}_i(t_i)}_{=0}|_h \\
 &\leq \underbrace{|\mathcal{J}(t) - P_{t_i,t}^c \mathcal{J}(t_i)|}_{\rightarrow 0 \text{ (}\mathcal{J} \text{ stetig)}} + C \underbrace{\|\mathcal{J} - \mathcal{J}_i\|}_{\rightarrow 0},
 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstante  $C > 0$ . Daraus folgt  $\mathcal{J}(t) = 0$ , d.h.  $t \in \mathcal{T}$ . ✓

c) **Behauptung:**  $\exists \varepsilon > 0$ , so dass  $\mathcal{T} \subset [\varepsilon, b]$ .

*Beweis:* Angenommen, das wäre falsch. Dann existiert eine Folge  $t_i \in \mathcal{T}$  mit  $t_i \rightarrow 0$ . Wie in b) erhalte  $\mathcal{J}_i \rightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{V}$  mit  $\mathcal{J}_i(t_i) = 0$ ,  $\|\mathcal{J}_i\| = 1 = \|\mathcal{J}\|$  und  $\mathcal{J}(0) = 0$ . Dann gilt

$$\tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) = \widetilde{II}\left(\underbrace{\mathcal{J}(0)}_{=0}, \dot{c}(0)\right) = 0.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass  $\text{nor}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) = 0$ , denn dann ist  $\mathcal{J}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) = 0$  und somit  $\mathcal{J} = 0$  im Widerspruch zu  $\|\mathcal{J}\| = 1$ . Dafür benutzen wir

$$\left| \text{nor}\left(\frac{P_{t_i,0}^c \mathcal{J}(t_i) - \mathcal{J}(0)}{t_i - 0}\right) \right|_h \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left| \text{nor}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) \right|_h.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \text{nor}\left(\frac{P_{t_i,0}^c \mathcal{J}(t_i) - \mathcal{J}(0)}{t_i - 0}\right) \right|_h &= \frac{1}{t_i} \left| \text{nor}\left(P_{t_i,0}^c (\mathcal{J}(t_i) - \mathcal{J}_i(t_i))\right) \right|_h \\ &= \frac{1}{t_i} \left| \text{nor}\left(\int_0^{t_i} P_{\tau,0}^c \left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{d\tau}(\tau) - \frac{\nabla \mathcal{J}_i}{d\tau}(\tau)\right) d\tau + \underbrace{\mathcal{J}(0) - \mathcal{J}_i(0)}_{\text{tangential}}\right) \right|_h \\ &\leq \frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} |P_{\tau,0}^c \left(\frac{\nabla(\mathcal{J} - \mathcal{J}_i)}{d\tau}(\tau)\right)|_h d\tau \\ &\leq \frac{C}{t_i} \int_0^{t_i} \|\mathcal{J} - \mathcal{J}_i\| d\tau = C \|\mathcal{J} - \mathcal{J}_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

für eine gewisse Konstante  $C$ . Daher gilt  $\text{nor}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) = 0$ .

□

**KOROLLAR 2.2.10.** Die Voraussetzungen seien wie im Lemma 2.2.9. Falls  $P$  Brennpunkte längs  $c$  hat, so gibt es eine erste Brennstelle  $\min \mathcal{T}$ .

**Bemerkung.** Man kann auch zeigen:

$$\begin{aligned} M \text{ riemannsch} &\implies \mathcal{T} \text{ diskret} \\ M \text{ lorentzsch \& } c \text{ kausal} &\implies \mathcal{T} \text{ diskret} \\ M \text{ lorentzsch \& } c \text{ raumartig} &\implies \text{jedes kompakte } \mathcal{K} \subset (0, b] \text{ ist Menge von Brennstellen für geeignete } M \text{ und } c. \end{aligned}$$

*Beweis von Proposition 2.2.8:*

Sei  $t_0 \in (0, b)$  die erste Brennstelle von  $P$  längs  $c$ . Sei  $\mathcal{J} \neq 0$  Jacobifeld längs  $c$  mit  $\mathcal{J}(0) \in T_p P$ ,  $\text{tan}\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) = \widetilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0))$  und  $\mathcal{J}(t_0) = 0$ . Da  $t_0$  die erste Brennstelle ist, gilt  $\mathcal{J}(t) \neq 0$  für alle  $t$  in  $(0, t_0)$ .

a) **Behauptung:**  $\exists \delta \in (0, b - t_0)$  s.d.  $\mathcal{J} = fU$  auf  $[0, t_0 + \delta]$ , wobei  $U$  raumartiges Einheitsvektorfeld längs  $c$  ist und  $f$  eine glatte Funktion mit  $f > 0$  auf  $(0, t_0)$  und  $f < 0$  auf  $(t_0, t_0 + \delta)$ .

*Beweis:* Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle &= \left\langle \frac{\nabla^2 \mathcal{J}}{dt^2}, \dot{c} \right\rangle \\ &= \langle R(\dot{c}, \mathcal{J})\dot{c}, \dot{c} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

und wegen  $\langle \mathcal{J}(0), \dot{c}(0) \rangle = 0$ , existiert es ein reelles  $\alpha$  s.d. für alle  $t$  gilt

$$\langle \mathcal{J}(t), \dot{c}(t) \rangle = \alpha t.$$

Für  $t = t_0$  gilt dann  $\alpha t_0 = \underbrace{\langle \mathcal{J}(t_0), \dot{c}(t_0) \rangle}_{=0} = 0$ , und somit  $\alpha = 0$ . Daraus folgt  $\mathcal{J} \perp \dot{c}$  auf  $[0, b]$ .

Da  $c$  lichtartig ist, könnte  $\mathcal{J}$  a priori trotzdem an manchen Stellen auch tangential an  $c$  sein. Wäre aber  $\mathcal{J}(t_1) = \beta \dot{c}(t_1)$  für ein  $t_1 \in (0, t_0)$ , so wäre  $\tilde{\mathcal{J}}(t) := \mathcal{J}(t) - \frac{\beta t}{t_1} \dot{c}(t)$  ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $\tilde{\mathcal{J}}(0) = \mathcal{J}(0) \in T_p P$ . Ferner würde auch gelten  $\frac{\nabla \tilde{\mathcal{J}}}{dt}(0) = \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) - \frac{\beta}{t_1} \dot{c}(0)$ , und somit

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\nabla \tilde{\mathcal{J}}}{dt}(0)\right) &= \tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right) \\ &= \tilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)) \\ &= \tilde{II}(\tilde{\mathcal{J}}(0), \dot{c}(0)). \end{aligned}$$

Aus  $\tilde{\mathcal{J}}(t_1) = \mathcal{J}(t_1) - \beta \dot{c}(t_1) = 0$  würde man schließen, dass  $t_1$  eine Brennstelle vor  $t_0$  wäre, was ein Widerspruch zu den Annahmen wäre.

$\implies$  Das Feld  $\mathcal{J}$  ist nirgends tangential an  $c$  auf  $(0, t_0)$ .

$\implies$  Das Feld  $\mathcal{J}$  ist raumartig auf  $(0, t_0)$ .

Schreibe jetzt  $\mathcal{J}(t) =: \gamma(t)Y(t)$ , wobei

$$\gamma(t) := \begin{cases} t(t_0 - t) & \text{falls } \mathcal{J}(0) = 0 \\ t_0 - t & \text{falls } \mathcal{J}(0) \neq 0 \end{cases}$$

und  $Y$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$  ist. Das Feld  $Y$  ist raumartig auf  $(0, t_0)$ . Falls  $\mathcal{J}(0) \neq 0$ , so auch  $Y(0) \neq 0$ . Falls  $\mathcal{J}(0) = 0$ , so gilt  $\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) \neq 0$  und dann ebenfalls  $Y(0) \neq 0$ . Analog zeigt man, dass  $Y(t_0) \neq 0$ .

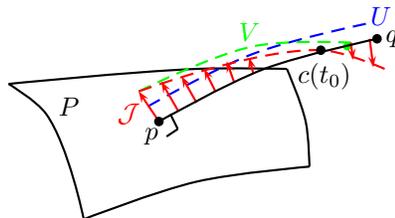
**Zwischenbehauptung:**  $Y(0)$  und  $Y(t_0)$  sind ebenfalls raumartig.

*Beweis:* Falls  $\mathcal{J}(0) \neq 0$ , so ist  $Y(0) = \frac{1}{\gamma(0)} \mathcal{J}(0) \in T_p P$  raumartig.

Sei also  $\mathcal{J}(0) = 0$ . Wegen  $\langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle = 0$  gilt  $0 = \frac{d}{dt} \langle \mathcal{J}, \dot{c} \rangle = \langle \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}, \dot{c} \rangle$ , d.h.  $\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt} \perp \dot{c}$ . Wäre  $Y(0)$  tangential an  $c$ , d.h.  $Y(0) = \beta \cdot \dot{c}(0)$ , so wäre  $\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) = \dot{\gamma}(0)Y(0) = t_0 \beta \dot{c}(0)$ . Dann müsste auf Grund der Anfangsbedingungen  $\mathcal{J}(t) = t_0 \beta t \dot{c}(t)$  sein im Widerspruch zu  $\mathcal{J}(t_0) = 0$ . Also ist  $Y(0) = \frac{1}{t_0} \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)$  orthogonal zu  $c$ , aber nicht tangential, somit raumartig. Genauso sieht man, dass  $Y(t_0)$  raumartig ist.  $\checkmark$

Daraus folgt, dass  $Y$  ein nirgends verschwindendes raumartiges Vektorfeld auf  $[0, t_0]$  ist, damit auch auf  $[0, t_0 + \delta]$  für ein kleines  $\delta > 0$ . Setze nun  $U := \frac{Y}{|Y|}$  und  $f := \gamma|Y|$ . Da  $Y$  nicht verschwindet und raumartig ist, ist  $|Y| = \sqrt{\langle Y, Y \rangle}$  eine wohldefinierte positive glatte Funktion.  $\checkmark$

b) **Behauptung:**  $\exists \delta \in (0, b - t_0)$  und  $\exists V$  Vektorfeld längs  $c$  s.d.  $V(0) = \mathcal{J}(0)$ ,  $V(t_0 + \delta) = 0$ ,  $V \perp \dot{c}(0)$  auf  $[0, t_0 + \delta]$  und  $\left\langle \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}, V \right\rangle > 0$  auf  $(0, t_0 + \delta)$ .



*Beweis:* Ansatz: Wir schreiben  $V := (f+g)U = \mathcal{J} + gU$  für ein noch zu findendes  $g$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c} &= \frac{\nabla^2 \mathcal{J}}{dt^2} + g''U + 2g' \frac{\nabla U}{dt} + g \frac{\nabla^2 U}{dt^2} + R(\mathcal{J}, \dot{c})\dot{c} + gR(U, \dot{c})\dot{c} \\ &= g''U + 2g' \frac{\nabla U}{dt} + g \cdot \left( \frac{\nabla^2 U}{dt^2} + R(U, \dot{c})\dot{c} \right). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}, V \right\rangle &= (f+g) \left( g'' \langle U, U \rangle + 2g' \underbrace{\left\langle \frac{\nabla U}{dt}, U \right\rangle}_{=0} + g \underbrace{\left\langle \frac{\nabla^2 U}{dt^2} + R(U, \dot{c})\dot{c}, U \right\rangle}_{=-l} \right) \\ &= (f+g)(g'' + gl). \end{aligned}$$

Wähle  $a > 0$  so, dass  $l \geq -a^2$  auf  $[0, t_0 + \delta]$ . Setze  $g(t) := b(e^{at} - 1)$  mit  $b > 0$  so, dass  $g(t_0 + \delta) = -f(t_0 + \delta)$ . Dies ist mit positivem  $b$  möglich, da  $f(t_0 + \delta) < 0$ . Dann ist  $V(t_0 + \delta) = 0$ , und  $V(0) = \mathcal{J}(0)$ . Es ist  $f+g > 0$  auf  $(0, t_0]$  und  $(f+g)(t_0 + \delta) = 0$ . Nach eventueller Verkleinerung von  $\delta$  können wir annehmen, dass  $t_0 + \delta$  die erste positive Nullstelle von  $f+g$  ist, d.h.  $f+g > 0$  auf  $(0, t_0 + \delta)$  und  $(f+g)(t_0 + \delta) = 0$ . Schließlich gilt

$$\left\langle \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}, V \right\rangle = \underbrace{(f+g)}_{>0} (g'' + gl),$$

mit  $g'' + gl = a^2g + a^2b + gl \geq a^2b > 0$ , also  $\left\langle \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}, V \right\rangle > 0$ . ✓

**c) Behauptung:** Es existiert ein glattes Vektorfeld  $A$  längs  $c$  mit  $A(0) = II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0))$ ,  $A(t_0 + \delta) = 0$  und  $\frac{d}{dt} \left( \langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle + \langle A, \dot{c} \rangle \right) \leq 0$  auf  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

*Beweis:* Es gilt

$$\begin{aligned} \langle II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)), \dot{c}(0) \rangle &= -\langle \widetilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)), \mathcal{J}(0) \rangle \\ &= -\langle \tan\left(\frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0)\right), \mathcal{J}(0) \rangle \\ &= -\left\langle \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0), \mathcal{J}(0) \right\rangle, \end{aligned}$$

und ebenfalls

$$\begin{aligned} \left\langle V, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle &= \left\langle \mathcal{J} + b(e^{at} - 1)U, \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt} + abe^{at}U + b(e^{at} - 1) \frac{\nabla U}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{J}, \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt} \right\rangle + \langle V, abe^{at}U \rangle + b(e^{at} - 1) \left\langle U, \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt} \right\rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere für  $t = 0$  gilt:  $\langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle|_0 = \langle \mathcal{J}, \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt} \rangle|_0 + ab|\mathcal{J}(0)|$ .

1. Fall:  $\langle II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)), \dot{c}(0) \rangle \neq 0$ .

Schreibe  $II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)) = \alpha L_0$  mit  $\langle L_0, \dot{c}(0) \rangle = -1$ . Es gilt

$$-\alpha = \langle \alpha L_0, \dot{c}(0) \rangle = \langle II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)), \dot{c}(0) \rangle = -\left\langle \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0), \mathcal{J}(0) \right\rangle$$

und somit  $\alpha = \left\langle \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0), \mathcal{J}(0) \right\rangle$ .

Sei  $L$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $L(0) = L_0$ . Dann ist  $\langle L, \dot{c} \rangle \equiv -1$ . Setze

$$A(t) := \left( \langle V(t), \frac{\nabla V}{dt}(t) \rangle + \frac{ab|\mathcal{J}(0)|}{t_0 + \delta} (t - t_0 - \delta) \right) L(t).$$

Das Vektorfeld  $A$  längs  $c$  erfüllt dann

$$\begin{aligned} A(0) &= \left( \langle \mathcal{J}(0), \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) \rangle + ab|\mathcal{J}(0)| - ab|\mathcal{J}(0)| \right) L(0) \\ &= \alpha L_0 \\ &= II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)) \end{aligned}$$

wie in der Behauptung. Ferner gilt

$$\begin{aligned} A(t_0 + \delta) &= \left( \underbrace{\langle V(t_0 + \delta), \frac{\nabla V}{dt}(t_0 + \delta) \rangle}_{=0} + 0 \right) L(t_0 + \delta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es bleibt die letzte Bedingung zu überprüfen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle + \langle A, \dot{c} \rangle \right) &= \frac{d}{dt} \left( \langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle - \left( \langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle + \frac{ab|\mathcal{J}(0)|}{t_0 + \delta} (t - t_0 - \delta) \right) \right) \\ &= -\frac{ab|\mathcal{J}(0)|}{t_0 + \delta} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

✓

2. Fall:  $\langle II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)), \dot{c}(0) \rangle = 0$ .

Wähle  $L$  parallel längs  $c$  mit  $\langle L, \dot{c} \rangle \equiv -1$ . Sei ferner  $Z$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $Z(0) = II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0))$  (somit ist  $\langle Z, \dot{c} \rangle \equiv 0$ ). Setze diesmal

$$A(t) := \left( \langle V(t), \frac{\nabla V}{dt}(t) \rangle + \frac{ab|\mathcal{J}(0)|}{t_0 + \delta} (t - t_0 - \delta) \right) L(t) + \left( 1 - \frac{t}{t_0 + \delta} \right) Z(t).$$

Wie vorher prüfen wir die Bedingungen an  $A$  nach:

$$\begin{aligned} A(0) &= \langle \mathcal{J}(0), \frac{\nabla \mathcal{J}}{dt}(0) \rangle L(0) + Z(0) \\ &= -\underbrace{\langle II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)), \dot{c}(0) \rangle}_{=0} L(0) + II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)) \\ &= II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)). \end{aligned}$$

Es gilt in  $t_0 + \delta$ :

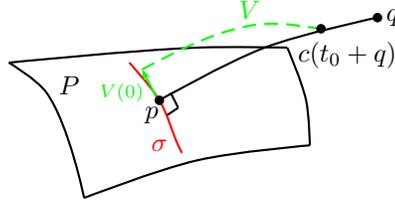
$$A(t_0 + \delta) = 0 \cdot L(t_0 + \delta) + 0 \cdot Z(t_0 + \delta) = 0$$

und auf  $[0, t_0 + \delta]$

$$\frac{d}{dt} \left( \langle V, \frac{\nabla V}{dt} \rangle + \langle A, \dot{c} \rangle \right) = -\frac{ab|\mathcal{J}(0)|}{t_0 + \delta} \leq 0.$$

✓

d) Wähle eine glatte Kurve  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow P$  mit  $\sigma(0) = p$ ,  $\dot{\sigma}(0) = \mathcal{J}(0) = V(0)$ , und  $\frac{\nabla^P \dot{\sigma}}{ds}(0) = 0$  (z.B. setze  $\sigma(s) := \exp_p^P(s\mathcal{J}(0))$ ).



Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^M \dot{\sigma}}{ds}(0) &= \underbrace{\frac{\nabla^P \dot{\sigma}}{ds}(0)}_{=0} + II(\dot{\sigma}(0), \dot{\sigma}(0)) \\ &= II(\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(0)) \\ &= A(0). \end{aligned}$$

Wähle Variation  $c_s$  von  $c$  mit  $c_s(0) = \sigma(s)$ ,  $c_s(t_0 + \delta) = c(t_0 + \delta)$ ,  $\frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0} = V$  und  $\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0} = A$ . Da  $c$  lichtartig ist, gilt  $\langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle|_{s=0} = 0$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= 2 \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial c_s}{\partial t}, \dot{c} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial t} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \dot{c} \right\rangle \\ &= 2 \underbrace{\frac{d}{dt} \langle V, \dot{c} \rangle}_{=0} - 2 \underbrace{\left\langle V, \frac{\nabla \dot{c}}{dt} \right\rangle}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

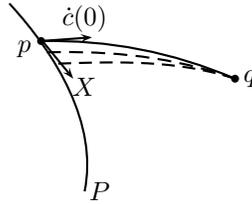
Für die zweite Ableitung gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s}, \dot{c}_s \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{c} \right\rangle + \langle R(V, \dot{c})V, \dot{c} \rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{\nabla A}{dt}, \dot{c} \right\rangle}_{= \frac{d}{dt} \langle A, \dot{c} \rangle} - \langle R(V, \dot{c})\dot{c}, V \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left( \left\langle V, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle + \langle A, \dot{c} \rangle \right) - \left\langle V, \frac{\nabla^2 V}{dt^2} \right\rangle - \langle R(V, \dot{c})\dot{c}, V \rangle \\ &\leq - \underbrace{\left\langle \frac{\nabla^2 V}{dt^2} + R(V, \dot{c})\dot{c}, V \right\rangle}_{>0 \text{ nach b)}} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle < 0$  für  $|s| \neq 0$  hinreichend klein auf  $[0, t_0 + \delta]$ . Somit ist  $c_s$  zeitartig auf  $[0, t_0 + \delta]$  für  $|s| \neq 0$  hinreichend klein.

□

**LEMMA 2.2.11.** Sei  $P \subset M$  eine raumartige Untermannigfaltigkeit. Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  eine lichtartige Geodätische mit  $p := c(0) \in P$ , aber  $\dot{c}(0) \notin N_p P$ .  
Dann existiert beliebig nahe bei  $c$  eine zeitartige Kurve von  $P$  nach  $q := c(b)$ .



*Beweis.* Es existiert ein  $X \in T_p P$  mit  $\langle X, \dot{c}(0) \rangle \neq 0$ . O.B.d.A. sei  $\langle X, \dot{c}(0) \rangle > 0$ . Sei  $X(t)$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $X(0) = X$ . Setze  $V(t) := (1 - \frac{t}{b})X(t)$ . Das Vektorfeld  $V$  erfüllt:  $V(0) = X$  und  $V(b) = 0$ . Wähle Variation  $c_s$  von  $c$  mit  $\frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0} = V$ ,  $c_s(0) \in P$  und  $c_s(b) = q$  (für alle  $s$ ). Da  $c$  lichtartig ist, ist  $\langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle|_{s=0} = 0$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t) \rangle &= 2 \langle \frac{\nabla V}{dt}(t), \dot{c}(t) \rangle \\ &= -\frac{2}{b} \langle X(t), \dot{c}(t) \rangle \\ &= -\frac{2}{b} \langle X, \dot{c}(0) \rangle \\ &< 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $\langle \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t) \rangle < 0$  für  $s > 0$  hinreichend klein. Daraus folgt, dass  $c_s$  zeitartig ist für  $s > 0$  hinreichend klein. □

Wir fassen zusammen:

**SATZ 2.2.12.** Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $P \subset M$  eine raumartige Untermannigfaltigkeit. Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  eine kausale Kurve mit  $p := c(0) \in P$ .  
Dann gibt es beliebig nahe bei  $c$  eine zeitartige Kurve von  $P$  nach  $q := c(b)$ , es sei denn  $c$  ist bis auf Parametrisierung lichtartige Geodätische mit  $\dot{c}(0) \in N_p P$ , und so dass  $P$  längs  $c$  keine Brennpunkte vor  $b$  hat.

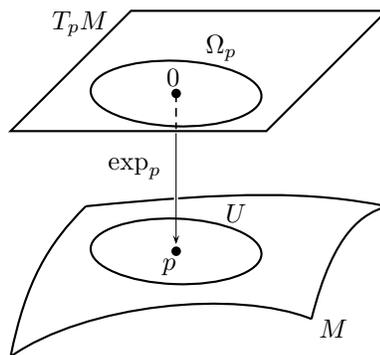
**Bemerkung.** Vergleiche diesen Satz mit dem entsprechenden Satz aus der riemannschen Geometrie:

Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $P \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit. Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  eine Kurve mit  $p := c(0) \in P$ .

Dann gibt es beliebig nahe bei  $c$  eine kürzere Kurve von  $P$  nach  $q := c(b)$ , es sei denn  $c$  ist bis auf Parametrisierung Geodätische mit  $\dot{c}(0) \in N_p P$ , und so dass  $P$  längs  $c$  keine Brennpunkte vor  $b$  hat.

## 2.3 Konvexe Mengen

**Definition 2.3.1.** Sei  $M$  semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge  $U \subset M$  heißt **konvex**, falls für jedes  $p \in U$  es eine offene bzgl. 0 sternförmige Teilmenge  $\Omega_p \subset T_p M$  gibt, s.d.  $\exp_p$  die Menge  $\Omega_p$  diffeomorph auf  $U$  abbildet.



Insbesondere gibt es zu  $p \neq q$  in  $U$  (bis auf Reparametrisierung) genau eine Geodäte von  $p$  nach  $q$ , die ganz in  $U$  verläuft.

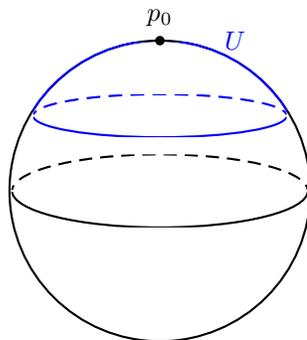
### Beispiele.

1) Sei  $M := \mathbb{R}^n$  mit  $g := g_{\text{eukl}}$  oder  $g := g_{\text{Mink}}$ .

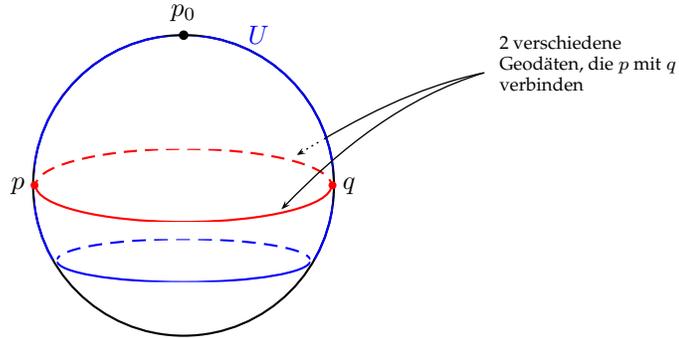
Dann ist  $U$  konvex g.d.w. für alle  $p \neq q \in U$  das Geradensegment von  $p$  nach  $q$  in  $U$  enthalten ist.

2) Sei  $M := S^n$  die Standardsphäre und  $U := B_r(p_0)$  der Ball um  $p_0 \in M$  vom Radius  $r$  in  $M$ .

Ist  $r \leq \frac{\pi}{2}$ , so ist  $U$  konvex.



Ist  $r > \frac{\pi}{2}$ , dann ist  $U$  nicht konvex.



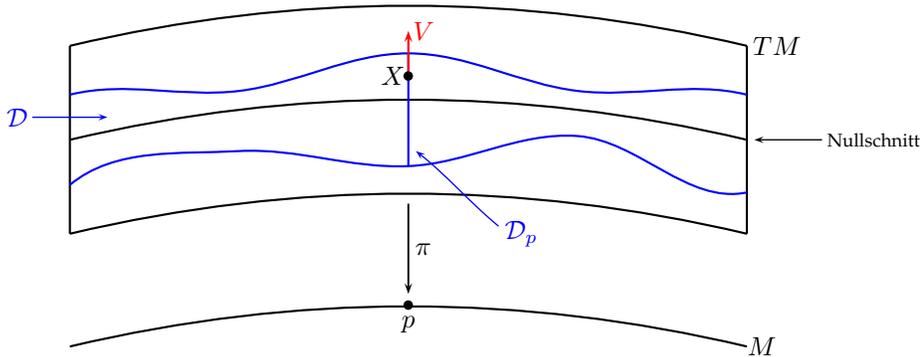
Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{D} \subset TM$  der maximale Definitionsbereich von  $\exp$ . Die Teilmenge  $\mathcal{D}$  ist offen in  $TM$ . Setze

$$E : \mathcal{D} \longrightarrow M \times M, \quad E(X) := (\pi(X), \exp(X)),$$

wobei  $\pi : TM \longrightarrow M$  die Fußpunktabbildung ist.

**LEMMA 2.3.2.** Seien  $p \in M$  und  $X \in T_p M$ . Ist  $\exp_p : \mathcal{D}_p \subset T_p M \longrightarrow M$  nichtsingulär an der Stelle  $X$  (d.h.  $d\exp_p|_X$  ist invertierbar), dann ist auch  $E$  an der Stelle  $X$  nichtsingulär.

*Beweis.*



Sei  $V \in T_X TM$  mit  $dE(V) = 0$ . Zu zeigen ist,  $V = 0$ .

Sei  $\pi_i : M \times M, i = 1, 2$ , die Projektion auf den  $i$ . Faktor. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ E &= \pi, \\ \pi_2 \circ E &= \exp. \end{aligned}$$

Aus der Kettenregel folgt  $d\pi(V) = d\pi_1(\underbrace{dE(V)}_0) = 0$ , somit ist  $V \in T_X T_p M \cong T_p M$ . Aber  $0 = dE(V) = d(E|_{T_p M})(V) = d\exp_p(V)$ , also, da  $d\exp_p|_X$  invertierbar ist,  $V = 0$ .  $\square$

**KOROLLAR 2.3.3.** Ist  $\exp_p$  nichtsingulär an der Stelle  $X \in T_pM$ , so bildet  $E$  eine Umgebung von  $X$  in  $TM$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $(p, \exp_p(X))$  in  $M \times M$  ab. Insbesondere bildet  $E$  eine Umgebung von  $0 \in T_pM$  in  $TM$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $(p, p)$  in  $M \times M$  ab.

**PROPOSITION 2.3.4.** Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $o \in M$ , sei  $V$  eine Umgebung von  $o$ .

Dann existiert es eine konvexe Umgebung von  $o$ , die in  $V$  enthalten ist.

*Beweis.*

a) Sei  $U_1$  eine Umgebung von  $o$ , auf der riemannsche Normalkoordinaten erklärt sind, d.h. es existiert  $\Omega_1 \subset T_oM$  s.d.  $\exp_o$  bildet  $\Omega_1$  diffeomorph auf  $U_1$  ab. Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine ONB von  $T_oM$ . Die riemannschen Normalkoordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$  von  $p \in U_1$  sind charakterisiert durch

$$\exp_o\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) = p.$$

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist

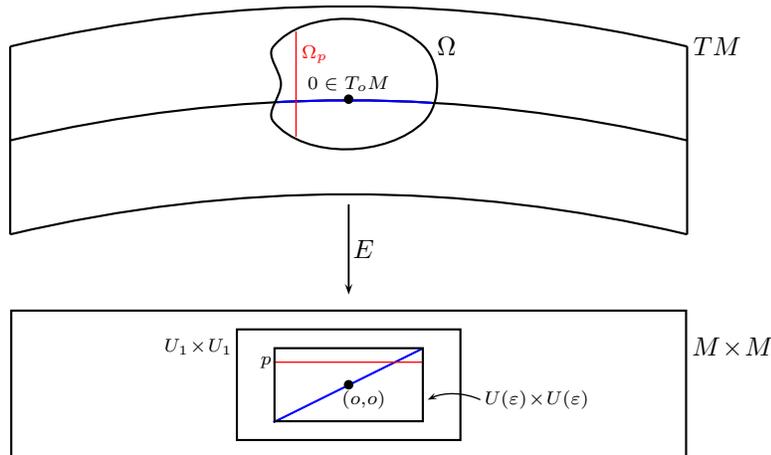
$$U(\varepsilon) := \left\{ \exp_o\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 < \varepsilon \right\} \subset U_1.$$

Nach eventueller Verkleinerung von  $\varepsilon$  ist  $U(\varepsilon) \subset V$  und  $E = (\pi, \exp)$  bildet eine offene Umgebung  $\Omega$  in  $TM$  von  $0 \in T_oM$  diffeomorph auf  $U(\varepsilon) \times U(\varepsilon) \subset M \times M$  ab.

b) Betrachte für jedes  $p \in U(\varepsilon)$  die symmetrische Matrix mit den Einträgen

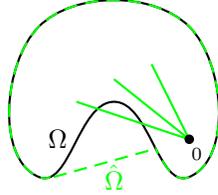
$$b_{ij}(p) := \delta_{ij} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) x^k.$$

Wegen  $b_{ij}(o) = \delta_{ij}$  ist die Matrix  $(b_{ij}(o))_{i,j}$  positiv definit. Nach weiterer Verkleinerung von  $\varepsilon$  können wir annehmen, dass  $(b_{ij}(p))_{i,j}$  für alle  $p \in U(\varepsilon)$  positiv definit ist.



c) Sei  $\hat{\Omega}$  die "sternförmige Hülle" von  $\Omega$ , d.h.

$$\hat{\Omega} := \{tv \mid v \in \Omega, t \in [0, 1]\}.$$



Nach weiterer Verkleinerung von  $\varepsilon$  können wir annehmen, dass  $E(\hat{\Omega}) \subset U_1 \times U_1$ .

Da  $E : \Omega \rightarrow U(\varepsilon) \times U(\varepsilon)$  ein Diffeomorphismus ist, bildet  $\exp_p$  die Menge  $\Omega_p := \Omega \cap T_p M$  diffeomorph auf  $\{p\} \times U(\varepsilon) \cong U(\varepsilon)$  ab. Es bleibt zu zeigen,  $\Omega_p$  ist sternförmig bzgl.  $0 \in T_p M$ .

Sei  $v \in \Omega_p$ . Zu zeigen ist  $tv \in \Omega_p$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Es gilt:  $tv \in \hat{\Omega} \cap T_p M$ , somit  $\exp_p(tv) \in U_1$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Die riemannschen Normalkoordinaten (bzgl.  $o$ ) von  $\exp_p(tv)$  existieren daher für alle  $t \in [0, 1]$ . Wir schreiben  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  dafür.

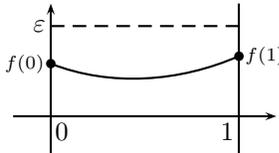
Betrachte  $f(t) := \sum_{k=1}^n (x^k(t))^2$ . Es gilt:  $\dot{f}(t) = 2 \sum_{k=1}^n x^k \dot{x}^k$  und  $\ddot{f}(t) = 2 \sum_{k=1}^n ((\dot{x}^k)^2 + x^k \ddot{x}^k)$ . Aus der Geodätengleichung

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &= 2 \sum_{k=1}^n ((\dot{x}^k)^2 - x^k \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \\ &> 0, \end{aligned}$$

da  $(b_{ij})$  positiv definit ist. Somit ist  $f$  konkav.



Wegen  $f(0) < \varepsilon$  (da  $p = \exp_p(0v) \in U(\varepsilon)$ ) und  $f(1) < \varepsilon$  (da  $\exp_p(v) \in \exp_p(\Omega_p) = U(\varepsilon)$ ) gilt  $f(t) < \varepsilon$  für alle  $t \in [0, 1]$ , und somit  $\exp_p(tv) \in U(\varepsilon)$ , d.h.  $tv \in \Omega_p$  für alle  $t \in [0, 1]$ , d.h.  $\Omega_p$  ist sternförmig bzgl.  $0$ .  $\square$

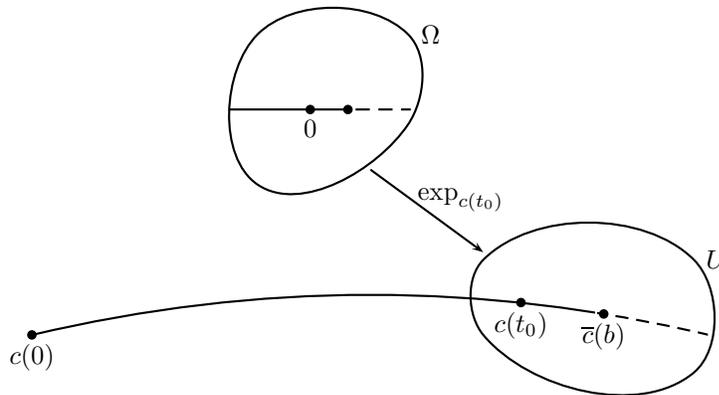
**LEMMA 2.3.5.** Sei  $M$  semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c : [0, b) \rightarrow M$  Geodätische. Dann sind äquivalent:

- (1)  $c$  besitzt stetige Fortsetzung nach  $b$ .
- (2)  $c$  besitzt Fortsetzung als Geodätische nach  $[0, b + \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

*Beweis.*

(2) $\implies$ (1): trivial.

(1) $\implies$ (2): Sei  $\bar{c}$  stetige Fortsetzung von  $c$  auf  $[0, b]$ . Sei  $U$  konvexe Umgebung von  $\bar{c}(b)$ . Wähle  $t_0 \in [0, b)$  s.d.  $c(t_0) \in U$ . Da  $U$  konvex ist, existiert es eine offene Teilmenge  $\Omega \in T_{c(t_0)}M$  s.d.  $\exp_{c(t_0)}$  bildet  $\Omega$  diffeomorph auf  $U$  ab.



Die Kurve  $\exp_{c(t_0)}^{-1} \circ c$  ist Geradensegment in  $\Omega$ , das stetig in  $\exp_{c(t_0)}^{-1}(\bar{c}(b))$  fortgesetzt werden kann. Setze dieses Geradensegment über diesen Punkt hinaus zu Geradensegment in  $\Omega$  fort. Das Bild davon unter  $\exp_{c(t_0)}$  liefert die gewünschte Fortsetzung von  $c$  zu Geodätischer über  $\bar{c}(b)$  hinaus.  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $U \subset M$  konvex. Zu  $p, q \in U$  sei  $c : [0, 1] \rightarrow U$  die eindeutige Geodätische mit  $c(0) = p$  und  $c(1) = q$ . Setze

$$\Delta(p, q) := \dot{c}(0) \in T_p M \in TM.$$

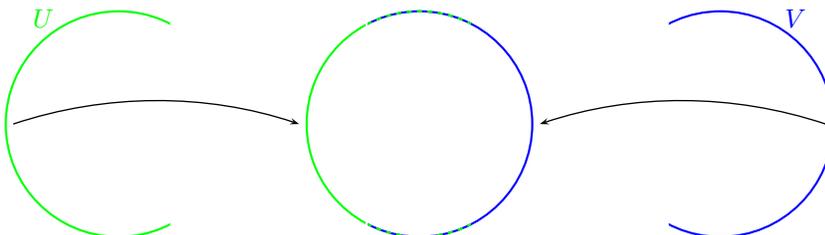
Dann ist

$$\begin{aligned} E(\Delta(p, q)) &= E(\dot{c}(0)) \\ &= (p, \exp_p(\dot{c}(0))) \\ &= (p, q). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\Delta$  das Inverse des lokalen Diffeomorphismus  $E$  ist, insbesondere glatt.

**Vorsicht!** Sind  $U, V \subset M$  konvex, so braucht  $U \cap V$  nicht konvex zu sein.

**Beispiel.** Sei  $M := S^1$  der Einheitskreis.



Die Teilmengen  $U$  und  $V$  sind konvex, aber  $U \cap V$  ist nicht einmal zusammenhängend.

**LEMMA 2.3.6.** *Sind  $U, V, W \subset M$  konvex und ist  $U \cup V \subset W$ , so ist auch  $U \cap V$  konvex.*

*Beweis.* Sei  $p \in U \cap V$ . Sei  $\Omega^W \in T_p M$  bzgl. 0 sternförmige offene Teilmenge s.d.  $\exp_p : \Omega^W \rightarrow W$  ein Diffeomorphismus ist. Setze  $\Omega^U := \exp_p^{-1}(U)$  und  $\Omega^V := \exp_p^{-1}(V)$ .

Ist  $x \in \Omega^U$ , so ist  $\exp_p(tx)$  die eindeutige Geodätische in  $W$ , die von  $p$  nach  $q := \exp_p(x)$  läuft. Da  $U$  konvex ist, gibt es genau eine Geodätische von  $p$  nach  $q$ , die in  $U$  verläuft. Diese muss wegen Eindeutigkeit mit  $\exp_p(tx)$  übereinstimmen.

$$\implies tx \in \exp_p^{-1}(U) = \Omega^U$$

$\implies \Omega^U$  ist sternförmig bzgl. 0. Analog ist  $\Omega^V$  sternförmig bzgl. 0, und somit ist  $\Omega^U \cap \Omega^V$  auch sternförmig bzgl. 0. Daher ist  $U \cap V$  konvex.  $\square$

**Definition 2.3.7.** *Eine konvexe Überdeckung einer semi-riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine offene Überdeckung  $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_\alpha$  s.d.*

$$U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \text{ ist konvex } \forall \alpha_j \text{ und } \forall k \in \mathbb{N}.$$

**PROPOSITION 2.3.8.** *Sei  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_\alpha$  eine offene Überdeckung.*

*Dann besitzt  $\mathcal{U}$  eine konvexe Verfeinerung, d.h. es existiert eine konvexe Überdeckung  $\mathcal{K} := \{K_\beta\}_\beta$  so, dass für jedes  $\beta$  ein  $\alpha$  existiert mit  $K_\beta \subset U_\alpha$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}_1 := \{U \mid U \subset M \text{ konvex und } \exists \alpha \mid U \subset U_\alpha\}$ . Nach Proposition 2.3.4 ist  $\mathcal{U}_1$  eine Überdeckung von  $M$ .

Sei  $\mathcal{U}_2$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}_1$  s.d. falls  $U, V \in \mathcal{U}_2$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$  gilt:  $\exists K \in \mathcal{U}_1 \mid U \cup V \subset K$  (möglich, da  $M$  abzählbare Basis der Topologie besitzt). Sei nun  $\mathcal{K} := \{U \subset M \text{ konvex und } \exists W \in \mathcal{U}_2 : U \subset W\}$ . Wie für  $\mathcal{U}_1$  ist auch  $\mathcal{K}$  offene Überdeckung von  $M$ .

Seien  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{K}$  mit  $U_1 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset$ .

$$U_1 \cup U_2 \subset \underbrace{W_1}_{\in \mathcal{U}_2} \cup \underbrace{W_2}_{\in \mathcal{U}_2} \subset \underbrace{K}_{\in \mathcal{U}_1} \implies U_1 \cap U_2 \text{ konvex}$$

$$(U_1 \cap U_2) \cup U_3 \subset U_1 \cup U_3 \subset \tilde{K} \in \mathcal{U}_1 \implies U_1 \cap U_2 \cap U_3 \text{ konvex}$$

Induktiv zeigt man, dass  $U_1 \cap \dots \cap U_k$  konvex ist.  $\square$

**LEMMA 2.3.9.** *Sei  $M$  eine konvexe zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(1) Für  $p, q \in M, p \neq q$ , sind äquivalent:

$$(1a) q \in J_+(p)$$

$$(1b) \Delta(p, q) \in T_p M \text{ ist zukunftsgerichtet kausal.}$$

(2) Für  $p, q \in M, p \neq q$ , sind äquivalent:

$$(2a) q \in I_+(p)$$

$$(2b) \Delta(p, q) \in T_p M \text{ ist zukunftsgerichtet zeitartig.}$$

(3)  $J_+(p)$  ist Abschluss von  $I_+(p)$ .

(4) Die Relation " $\leq$ " ist abgeschlossen, d.h. aus  $p_n \rightarrow p, q_n \rightarrow q$  und  $p_n \leq q_n$  folgt  $p \leq q$ .

(5) Jede kausale Kurve  $c : [0, b) \rightarrow M$ , die in einer kompakten Teilmenge von  $M$  verläuft, kann stetig nach  $b$  fortgesetzt werden.

*Beweis.* Nach Korollar 2.1.7 gilt für das sternförmige  $\Omega \subset T_p M$  s.d.  $\exp_p : \Omega \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus ist,

$$\begin{aligned} J_+(p) &= \exp_p(J_+(0) \cap \Omega), \\ I_+(p) &= \exp_p(I_+(0) \cap \Omega). \end{aligned}$$

Da die zu beweisenden Behauptungen (1)-(4) im Minkowski-Raum gelten, folgen sie daraus auch für  $M$ .

Zu (5): Ist  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$  eine Folge mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = b$ , dann hat  $(c(t_i))_i$  (mindestens) einen Häufungspunkt, da die Kurve in einem Kompaktum verläuft. Zu zeigen ist, es gibt nur einen solchen Häufungspunkt (dieser setzt die Kurve dann stetig fort).

Seien  $p, q$  zwei Häufungspunkte solcher Folgen. Dann existiert es eine Folge  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots \rightarrow b$  s.d.

$$c(t_{2i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p, \quad c(t_{2i+1}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} q.$$

O.B.d.A. sei  $c$  zukunftsgerichtet. Dann gilt

$$\underbrace{c(t_{2i})}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} p} \leq \underbrace{c(t_{2i+1})}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} q} \leq \underbrace{c(t_{2i+2})}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} p}$$

$$\stackrel{(4)}{\implies} p \leq q \leq p$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} \Delta(p, q) \text{ ist zukunftsgerichtet und vergangenheitsgerichtet}$$

$$\implies \Delta(p, q) = 0$$

$$\implies p = q. \quad \square$$

## 2.4 Quasilimiten

**Definition 2.4.1.** Sei  $M$  eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{K}$  eine konvexe Überdeckung von  $M$ . Sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von zukunftsgerichteten kausalen Kurven.

Eine Grenzfølge von  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzgl.  $\mathcal{K}$  ist eine (endliche oder unendliche) Folge von Punkten  $p_0 < p_1 < \dots, p_j \neq p_{j+1}$ , für die es eine Teilfolge  $(c_{n_m})_m$  und Parameterwerte  $t_{m,0} < t_{m,1} < \dots$  gibt, s.d.

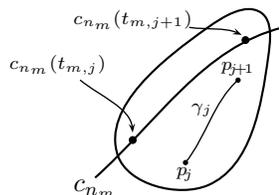
(1) Für alle  $j$  gilt

$$(1a) \lim_{m \rightarrow \infty} c_{n_m}(t_{m,j}) = p_j,$$

(1b)  $p_j, p_{j+1}$  und  $c_{n_m}([t_{m,j}, t_{m,j+1}])$  liegen für  $m \geq m(j)$  in einem Element von  $\mathcal{K}$ .

(2) Ist  $(p_i)_i$  unendlich, so konvergiert sie nicht.

Ist  $p_0 < \dots < p_N$  endlich, so ist  $N \geq 1$  und es existiert kein  $p_{N+1} > p_N$  und Parameterwerte  $t_{m,N+1} > t_{m,N}$ , derart dass (1) ebenfalls erfüllt ist.

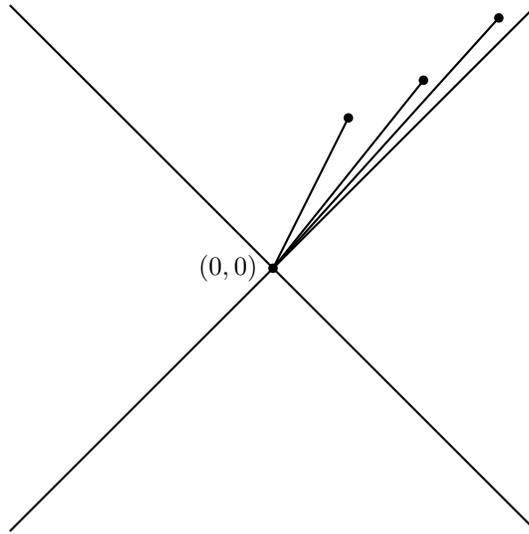


**Bemerkung.** Wegen  $c_{n_m}(t_{m,j}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p_j$  (bzw.  $c_{n_m}(t_{m,j+1}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p_{j+1}$ ),  $c_{n_m}(t_{m,j}) < c_{n_m}(t_{m,j+1})$  in  $U$ , und da die Relation " $\leq$ " abgeschlossen in konvexen Mengen ist, gilt  $p_j \leq p_{j+1}$  in  $U$ . Aber  $p_j < p_{j+1}$  in  $M$ , und somit  $p_j < p_{j+1}$  in  $U$ . Daraus folgt, dass die eindeutige Geodätische  $\gamma_j$  von  $p_j$  nach  $p_{j+1}$  in  $U$  kausal ist.

Der geodätische Polygonzug  $\gamma := \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots$  heißt dann ein *Quasilimes* der Folge  $(c_n)_n$  bzgl.  $\mathcal{K}$ .

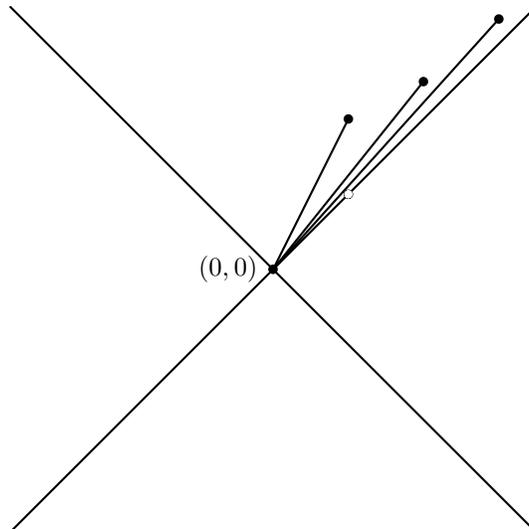
**Beispiele.**

1.) Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}})$ . Sei, für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $C_n$  das Geradensegment von  $(0, 0)$  nach  $(n + \frac{1}{n}, n)$ .



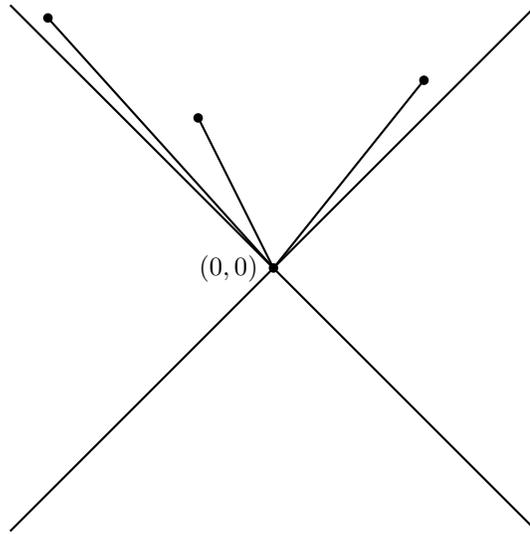
Jede Grenzfolge liegt auf der lichtartigen Geodätischen  $\{(s, s) \mid s \geq 0\}$ . Bis auf Parametrisierung ist  $s \mapsto (s, s)$  somit eindeutiger Quasilimes der Kurvenfolge  $(c_n)_n$ .

2.) Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}, g_{\text{Mink}})$ . Sei  $c_n$  das Geradensegment von  $(0, 0)$  nach  $(n + \frac{1}{n}, n)$ .



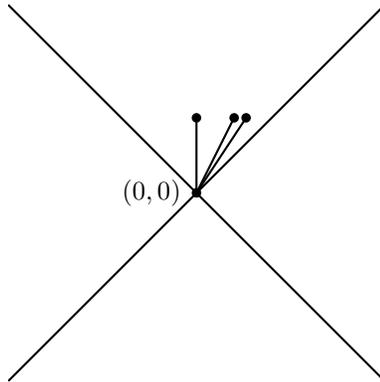
Jeder Häufungspunkt einer Folge der  $c_n(t_n)$  muss auf  $\{(s, s) \mid s \geq 0\}$  liegen. Bei einer Grenzfolge  $p_1 < p_2 < \dots$  kann nicht  $p_j = (s_j, s_j)$  und  $p_{j+1} = (s_{j+1}, s_{j+1})$  mit  $s_j < 1$  und  $s_{j+1} > 1$  sein, weil solche Punkte nicht in einer gemeinsamen konvexen Umgebung liegen können. Z.B. bildet  $p_j := (1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j})$  eine Grenzfolge und  $s \mapsto (s, s)$ ,  $s \in [0, 1)$ , einen Quasilimes.

3.) Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}})$ . Sei  $c_n$  das Geradensegment von  $(0, 0)$  nach  $(n + \frac{1}{n}, (-1)^{n_n})$ .



Sowohl  $s \mapsto (s, s)$ ,  $s \geq 0$ , als auch  $s \mapsto (s, -s)$ ,  $s \geq 0$ , sind Quasilimiten.

4.) Sei  $(M, g) := (\mathbb{R}^2, g_{\text{Mink}})$ . Sei  $c_n$  das Geradensegment von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1 - \frac{1}{n})$ .



Die Punkte  $p_1 := (0, 0) < p_2 := (1, 1)$  bilden eine Grenzfolge.

**PROPOSITION 2.4.2.** Sei  $M$  eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit mit konvexer Überdeckung  $\mathcal{K}$ . Seien  $c_n : [0, b_n) \rightarrow M$ ,  $b_n \leq \infty$ , oder  $c_n : [0, b_n] \rightarrow M$ ,  $b_n < \infty$ , zukunftsgerichtete kausale Kurven mit  $c_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \in M$ . Dann sind äquivalent:

(1) Die Folge  $(c_n)_n$  besitzt einen Quasilimes bzgl.  $\mathcal{K}$ , der in  $p$  beginnt.

(2) Es gibt eine Umgebung von  $p$ , die unendlich viele der  $c_n$  nicht vollständig enthält (d.h. die Kurvenfolge darf sich nicht auf den Punkt  $p$  zusammenziehen).

*Beweis.*

“(1) $\implies$ (2)”: Sei  $p := p_1 < p_2 < p_3 < \dots$  Grenzfolge. Wähle disjunkte Umgebungen  $U_1$  von  $p_1$  bzw.  $U_2$  von  $p_2$ .

Wegen  $c_{n_m}(t_{m,2}) \rightarrow p_2$  sind fast alle  $c_{n_m}(t_{m,2}) \in U_2$

$\implies$  Fast alle  $c_{n_m}(t_{m,2}) \notin U_1$ .

Die Umgebung  $U_1$  tut’s.

“(2) $\implies$ (1)”: a) Sei  $\mathcal{U}$  lokal-endliche Verfeinerung von  $\mathcal{K}$  s.d. für jedes  $U \in \mathcal{U}$  gilt:  $\overline{U}$  ist kompakt und es existiert  $K \in \mathcal{K}$  s.d.  $\overline{U} \subset K$ . Wegen (2) können wir annehmen, dass eine Umgebung  $U_0 \in \mathcal{U}$  von  $p$  existiert, die endlich viele der  $c_n$  nicht vollständig enthält.

Sei  $(c_n^{(1)})_n$  die Teilfolge der Kurven, die  $U_0$  verlassen. Setze

$$t_{n,1} := \inf\{t > 0 \mid c_n^{(1)}(t) \notin U_0\}.$$

Es gilt  $c_n^{(1)}(t_{n,1}) \in \partial U_0$ . Nach weiterem Übergang zu Teilfolge können wir annehmen, dass  $c_n^{(1)}(t_{n,1}) \rightarrow p_1 \in \partial U_0$ . Wegen  $c_n^{(1)}(0) < c_n^{(1)}(t_{n,1})$ ,  $c_n^{(1)}(0) \rightarrow p$  und  $c_n^{(1)}(t_{n,1}) \rightarrow p_1$  gilt  $p_0 := p \leq p_1$ . Wegen  $p_0 \in U_0$  und  $p_1 \in \partial U_0$  ist  $p_0 \neq p_1$  und somit  $p_0 < p_1$ .

Wähle  $U_1 \in \mathcal{U}$  mit  $p_1 \in U_1$ . Falls unendlich viele der  $c_n^{(1)}$  die Menge  $U_1$  wieder verlassen, so erhalte Teilfolge  $c_n^{(2)}$  derart, dass  $c_n^{(2)}(t_{n,2}) \rightarrow p_2 \in \partial U_1$ .

Wiederhole dieses Verfahren, so oft es geht. Beachte die Auswahlkonvention: Falls mehrere  $U \in \mathcal{U}$  den Punkt  $p_i$  enthalten, so wähle für  $U_i$  eine Menge, die bisher am wenigsten oft gewählt worden war. Nach Konstruktion gilt (1) aus Definition 2.4.1.

b) **Behauptung:** Falls die so erhaltene Folge  $p = p_0 < p_1 < p_2 < \dots$  unendlich ist, so konvergiert sie nicht.

*Beweis:* Angenommen,  $p_i \rightarrow q \in M$ . Sei  $V \in \mathcal{U}$  mit  $q \in V$ . Dann sind fast alle  $p_i$  in  $V$ . Da  $\overline{V}$  kompakt ist und  $\mathcal{U}$  lokal-endlich ist, wird  $V$  nur von endlich vielen  $U \in \mathcal{U}$  getroffen. Fast alle  $U_i$  treffen  $V$  (da sie  $p_i$  enthalten), deswegen muss mindestens ein  $U$  unendlich oft als  $U_i$  vorgekommen sein.  $V$  war ebenfalls Kandidat für diese  $U_i$ , ist aber nur endlich genommen worden, da nur endlich viele der  $p_i$  auf  $\partial V$  liegen können. Widerspruch zur Auswahlkonvention.  $\checkmark$

c) Nehmen wir schließlich an, dass das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht, d.h. die Folge  $p = p_0 < p_1 < \dots < p_k$  ist endlich.

Sei nun  $(c_n^{(k+1)})_n$  eine Teilfolge von Kurven, die in  $U_k$  verbleiben. Da  $\overline{U}_k$  kompakt ist, folgt aus Lemma 2.3.9 (5), dass  $c_n^{(k+1)}$  sich stetig in Endpunkt  $b_n$  fortsetzen lässt (falls nicht so wieso auf kompaktem Intervall definiert). Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge, gilt  $c_n^{(k+1)}(b_n) \rightarrow q \in \overline{U}_k$ .

1. Fall:  $p_k = q$ .

Angenommen, die Folge  $p = p_0 < p_1 < \dots < p_k$  lässt sich durch  $p_{k+1} > p_k$  verlängern, s.d. (1) aus Definition 2.4.1 noch erfüllt ist. Dann gilt in  $U_k$ :

$$\underbrace{c_n^{(k+1)}(t_{n,k+1})}_{\rightarrow p_{k+1}} < \underbrace{c_n^{(k+1)}(b_n)}_{\rightarrow q}$$

$\implies p_k < p_{k+1} \leq q = p_k$ . Da  $U_k$  in einer konvexen Menge enthalten ist, impliziert dies  $p_k = p_{k+1}$ , Widerspruch.

2. Fall:  $p_k \neq q$ , also  $q > p_k$ .

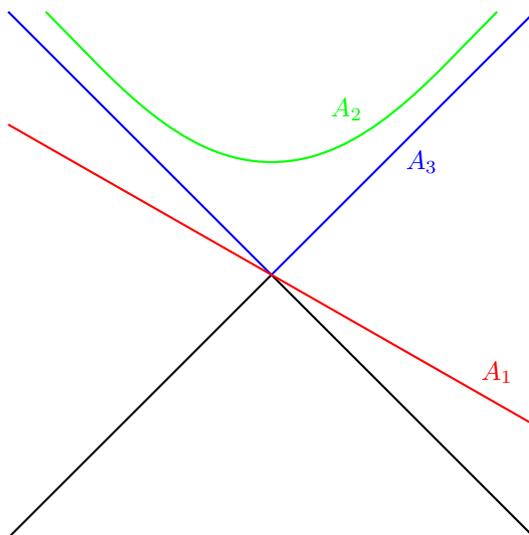
Dann ist  $p = p_0 < p_1 < \dots < p_k < p_{k+1} =: q$  Grenzfolge.  $\square$

**Bemerkung.** Wegen Bedingung (2) in Definition 2.4.1 ist der Quasilimes  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots$  zukunfts-nichterweiterbar, d.h. ist  $\gamma$  auf  $[a, b)$  parametrisiert, so lässt sich  $\gamma$  nicht stetig nach  $b$  fortsetzen (denn sonst würde die Folge  $(p_i)_i$  gegen den Fortsetzungspunkt konvergieren).

## 2.5 Cauchy-Hyperflächen

**Definition 2.5.1.** Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt achronal, falls es keine  $p, q$  in  $A$  gibt mit  $p \ll q$ . In anderen Worten, jede zeitartige Kurve trifft  $A$  höchstens einmal.

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum.



Die Teilmengen  $A_1$  (raumartige Hyperebene),  $A_2$  (der  $(n-1)$ -dimensionale hyperbolische Raum) und  $A_3$  (der Zukunftslichtkegel) sind achronale Teilmengen.

### Bemerkungen.

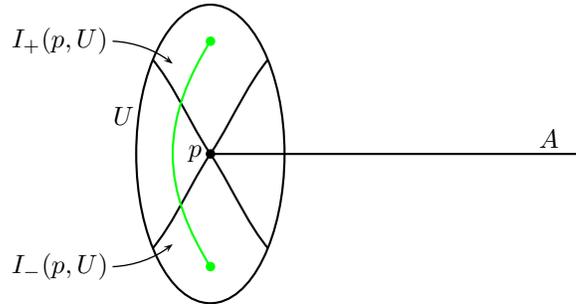
1) Teilmengen achronaler Mengen sind achronal.

2) Abschluss  $\bar{A}$  einer achronalen Menge  $A$  ist achronal.

Wäre nämlich  $p, q \in \bar{A}$  mit  $p \ll q$ , so wähle  $p_n, q_n \in A$  mit  $p_n \rightarrow p$  und  $q_n \rightarrow q$ . Aus Proposition 2.1.8 muss gelten:  $p_n \ll q_n$  für  $n$  hinreichend groß. Widerspruch.

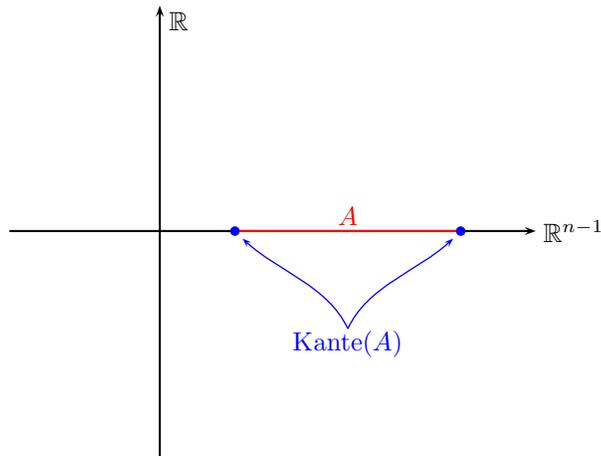
**Definition 2.5.2.** Die Kante einer achronalen Teilmenge  $A$  ist die Teilmenge

$$\text{Kante}(A) := \{p \in \bar{A} \mid \text{für jede offene Umgebung } U \text{ von } p, \text{ es existiert eine zeitartige Kurve in } U \text{ von } I_-(p, U) \text{ nach } I_+(p, U), \text{ die } A \text{ nicht trifft}\}.$$



**Beispiele.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum.

- 1) Sei  $A$  eines der drei  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  wie im Beispiel oben. Dann hat  $A$  leere Kante.
- 2) Sei  $A_4 := \{0\} \times B$ , wobei  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist  $\text{Kante}(A_4) = \{0\} \times \partial B$ .



Denn: Für  $p := (0, b) \in \{0\} \times \overset{\circ}{B}$ , sei  $U_0 \subset B$  offene Umgebung von  $b$  (bzgl.  $\mathbb{R}^{n-1}$ ) und sei  $U :=$  der Doppelkegel über  $U_0$ , d.h.  $U = I_+(U_0) \cup U_0 \cup I_-(U_0)$ . Dann muss jede zeitartige Kurve von  $I_-(p, U)$  nach  $I_+(p, U)$  die Teilmenge  $\{0\} \times B$  treffen. Somit ist  $p \notin \text{Kante}(A)$ .

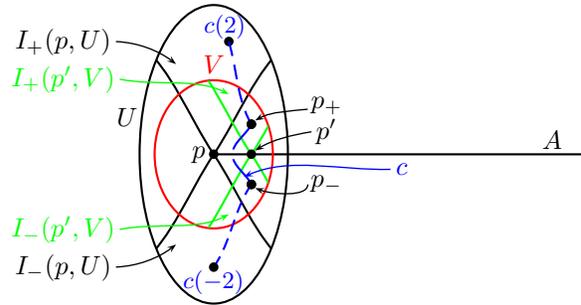
Ist andererseits  $p := (0, b) \in \{0\} \times \partial B$ , dann ist für jede Umgebung  $V$  von  $b$  (in  $\mathbb{R}^{n-1}$ ) die Differenz  $V \setminus B \neq \emptyset$ . Also existiert für jede offene Umgebung  $U$  von  $\{0\} \times b$  ein  $(0, b') \in \{0\} \times (V \setminus B)$  und eine zeitartige Kurve von  $I_-(\{0\} \times b, U)$  nach  $I_+(\{0\} \times b, U)$ , die durch  $(0, b')$  verläuft. Da der Schnitt von dieser Kurve mit  $A$  nur aus  $(0, b')$  besteht, trifft diese Kurve  $A$  nicht. Also  $p \in \text{Kante}(A)$ .

**Bemerkung.** Ist  $A$  achronal, so gilt  $\overline{A} \setminus A \subset \text{Kante}(A)$ . Denn: Für  $p \in \overline{A} \setminus A$ , und für jede offene Umgebung  $U$  von  $p$ , läuft eine zeitartige Kurve von  $I_-(p, U)$  nach  $I_+(p, U)$  durch  $p$ . Da  $\overline{A}$  achronal ist, hat diese Kurve keinen weiteren Schnitt mit  $\overline{A}$ , somit auch nicht mit  $A$ . Wegen  $p \notin A$ , hat diese Kurve überhaupt keinen Schnitt mit  $A$ . Somit ist  $p \in \text{Kante}(A)$ .

**LEMMA 2.5.3.** Für jede achronale Teilmenge  $A \subset M$  ist  $\text{Kante}(A)$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $p \in \overline{\text{Kante}(A)}$ . Zu zeigen ist  $p \in \text{Kante}(A)$ .

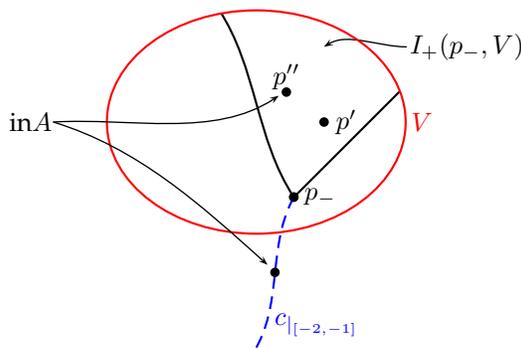
Sei  $U$  Umgebung von  $p$  in  $M$ . Sei  $V \subset U$  offene Umgebung von  $p$  mit  $V \subset I_+(I_-(p, U), U) \cap I_-(I_+(p, U), U)$ . Wegen  $p \in \overline{\text{Kante}(A)}$  existiert  $p' \in V \cap \text{Kante}(A)$ .



Wähle  $c : [-1, 1] \rightarrow V$  zeitartige Kurve mit  $p_- := c(-1) \in I_-(p', V)$ ,  $p_+ := c(1) \in I_+(p, V)$ , und  $c$  trifft  $A$  nicht. Wegen  $p_- \in V \subset I_+(I_-(p, U), U)$  kann  $c$  zu zeitartiger zukunftsgerichteter Kurve  $[-2, 1] \rightarrow U$  fortgesetzt werden mit  $c(-2) \in I_-(p, U)$ . Analog setze  $c$  zu  $[-2, 2] \rightarrow M$  zeitartig zukunftsgerichtet fort, so dass  $c(2) \in I_+(p, U)$ .

**Behauptung:**  $c|_{[-2, -1]}$  und  $c|_{[1, 2]}$  treffen  $A$  nicht.

*Beweis der Behauptung:* Angenommen,  $c|_{[-2, -1]}$  trifft  $A$ . Da  $I_+(p_-, V)$  eine Umgebung von  $p'$  ist und  $p' \in \text{Kante}(A) \subset \overline{A}$  existiert  $p'' \in A \cap I_+(p_-, V)$ .

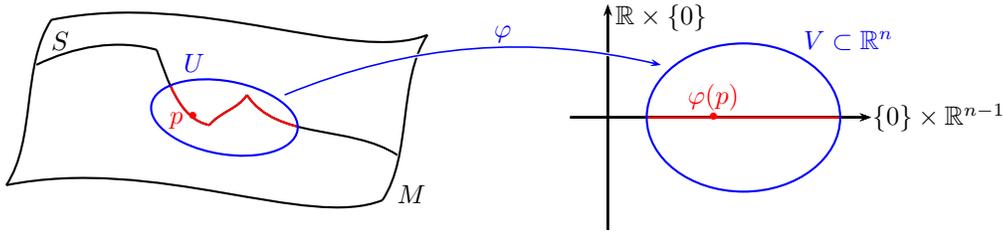


Die Kurve  $c|_{[-2, -1]} \cup \{ \text{zeitartige zukunftsgerichtete Kurve von } p_- \text{ nach } p'' \}$  ist zeitartig und trifft  $A$  zweimal. Widerspruch zu  $A$  achronal. ✓

Die Kurve  $c : [-2, 2] \rightarrow M$  trifft deswegen  $A$  nicht. Somit ist  $p \in \text{Kante}(A)$ . □

**Definition 2.5.4.** Eine Teilmenge  $S$  einer  $n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  heißt topologische Hyperfläche, falls es zu jedem Punkt  $p \in S$  eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  gibt und einen Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$ , wobei  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen, so dass

$$\varphi(U \cap S) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}).$$



**Beispiel.** Die Teilmenge  $S := C_+(0)$  des  $n$ -dimensionalen Minkowski-Raums ist eine topologische Hyperfläche. Z.B. wähle  $U := V := \mathbb{R}^n$  und  $\varphi : U \rightarrow V, (\underbrace{x^0}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\hat{x}}_{\in \mathbb{R}^{n-1}}) \mapsto (x^0 - |\hat{x}|, \hat{x})$ .

**PROPOSITION 2.5.5.** Sei  $A \subset M$  achronal. Dann sind äquivalent:

- (1)  $A \cap \text{Kante}(A) = \emptyset$ .
- (2)  $A$  ist topologische Hyperfläche.

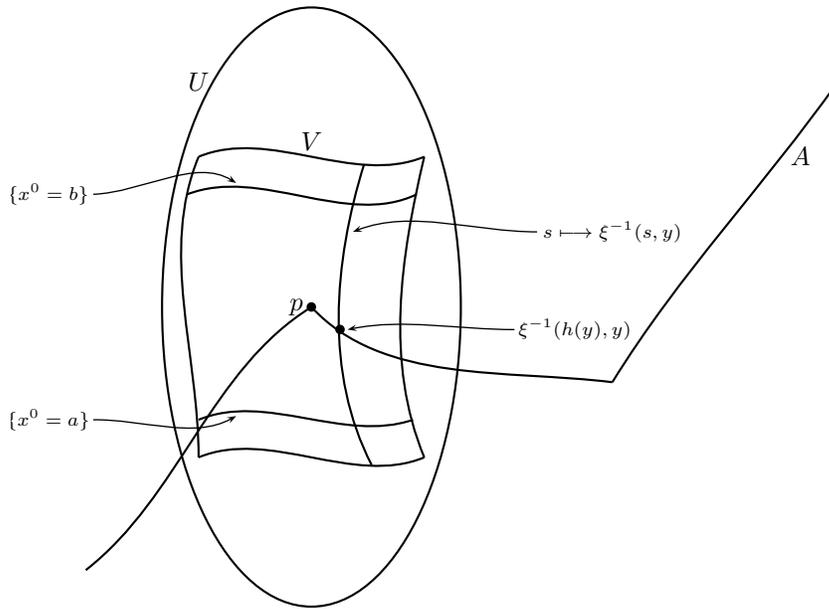
*Beweis.*

“(2) $\implies$ (1)”: Sei  $A$  eine topologische Hyperfläche und  $p \in A$ . Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $p$  s.d. es ein Homöomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$  (wobei  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen) existiert mit  $\varphi(U \cap A) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ . O.B.d.A. sei  $U$  zusammenhängend und  $U \setminus A$  habe zwei Zusammenhangskomponenten. Die Teilmengen  $I_-(p, U)$  und  $I_+(p, U)$  sind offen und zusammenhängend, und weil  $A$  achronal ist, können sie  $A$  nicht treffen. Jede zeitartige Kurve durch  $p$  trifft aber  $I_-(p, U)$  und  $I_+(p, U)$ , und auch die zwei Zusammenhangskomponenten von  $U \setminus A$ ; somit sind  $I_-(p, U)$  und  $I_+(p, U)$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten enthalten.

Jetzt muss jede stetige Kurve, die von einer Zusammenhangskomponente nach der anderen läuft,  $A \cap U$  treffen. Daraus folgt  $p \notin \text{Kante}(A)$ .

“(1) $\implies$ (2)”: Sei  $A$  achronal mit  $A \cap \text{Kante}(A) = \emptyset$ . Sei  $p \in A$ . Wegen  $p \notin \text{Kante}(A)$  existiert es eine offene Umgebung  $U$  von  $p$  so, dass jede zeitartige Kurve von  $I_-(p, U)$  nach  $I_+(p, U)$ , die in  $U$  verläuft,  $A$  trifft. O.B.d.A. sei  $U$  eine Koordinatenumgebung von  $p$ , d.h. es existiert ein Diffeomorphismus  $\xi : U \rightarrow \xi(U)$  auf eine offene Teilmenge  $\xi(U)$  von  $\mathbb{R}^n$ . O.B.d.A. sei  $\frac{\partial}{\partial x^0}$  zukunftsgerichtet zeitartig. Dieses  $U$  enthält eine kleinere Umgebung  $V$  von  $p$  mit

- a)  $\xi(V) = (a - \delta, b + \delta) \times N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$
- b)  $\{x \in U \mid x^0 = a\} \subset I_-(p, U)$  und  $\{x \in U \mid x^0 = b\} \subset I_+(p, U)$ .



Sei jetzt  $y \in N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ : Dann ist die Kurve

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow V \\ s &\longmapsto \xi^{-1}(s, y) \end{aligned}$$

zeitartig, und trifft  $A$  (wegen der Annahme an  $U$ ). Da  $A$  achronal ist, muss tatsächlich diese Kurve  $A$  genau einmal treffen, d.h. es existiert ein eindeutiges  $h(y) \in (a, b)$  s.d.  $\xi^{-1}(h(y), y) \in A$ .

**Behauptung:** Die Abbildung  $h : N \rightarrow (a, b)$  ist stetig.

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, es wäre falsch. Dann würde es eine Folge  $(y_n)_n$  und einen Punkt  $y$  aus  $N$  geben mit  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in N$  und  $h(y_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(y)$ . Da  $h(N) \subset [a, b]$  und  $[a, b]$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $(y_{n_m})_m$  von  $(y_n)_n$  s.d.  $(h(y_{n_m}))_m$  gegen ein  $r \neq h(y)$  konvergiert. Wegen  $r \neq h(y)$  ist  $\xi^{-1}(r, y)$  in  $I_-(q, V) \cup I_+(q, V)$  enthalten, wobei  $q := \xi^{-1}(h(y), y) \in A$ . Die Teilmenge  $I_-(q, V) \cup I_+(q, V)$  ist eine offene Umgebung von  $\xi^{-1}(r, y)$ , somit existiert ein hinreichend großes  $m$  s.d.  $\xi^{-1}(h(y_{n_m}), y_{n_m}) \in I_-(q, V) \cup I_+(q, V)$ . Das ist aber ein Widerspruch zu " $A$  achronal".  $\checkmark$

Wegen  $V \cap A = \xi(\{(h(y), y) \mid y \in N\})$  ist  $A$  in den Koordinaten  $\xi$  Graph der stetigen Funktion  $h$ , also eine topologische Hyperfläche.  $\square$

**KOROLLAR 2.5.6.** Sei  $A \subset M$  achronal. Dann sind äquivalent:

- (1)  $\text{Kante}(A) = \emptyset$ .
- (2)  $A$  ist abgeschlossene topologische Hyperfläche.

*Beweis.*

"(1) $\implies$ (2)": Ist  $\text{Kante}(A) = \emptyset$ , so ist  $A \cap \text{Kante}(A) = \emptyset$ , d.h. (aus Proposition 2.5.5)  $A$  ist topologische Hyperfläche. Wegen  $\overline{A} \setminus A \subset \text{Kante}(A)$ , gilt  $\overline{A} = A$ .

"(2) $\implies$ (1)": Aus Proposition 2.5.5 gilt  $A \cap \text{Kante}(A) = \emptyset$ . Aus der Definition von Kante gilt aber  $\text{Kante}(A) \subset \overline{A}$ . Wegen  $\overline{A} = A$  gilt dann  $\text{Kante}(A) = \emptyset$ .  $\square$

**Definition 2.5.7.** Eine Teilmenge  $B$  einer zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit heißt Zukunftsmenge (bzw. Vergangenheitsmenge) falls  $I_+(B) \subset B$  (bzw.  $I_-(B) \subset B$ ).

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum und  $B := \{x = (x^0, \hat{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n \mid x^0 - |\hat{x}| \geq 0\}$ . Dann ist  $B$  Zukunftsmenge.

**Bemerkung.** Ist  $B$  Zukunftsmenge, so ist  $M \setminus B$  Vergangenheitsmenge.

**KOROLLAR 2.5.8.** Der Rand einer (nichtleeren und  $\neq M$ ) Zukunftsmenge einer zusammenhängenden zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine achronale abgeschlossene topologische Hyperfläche.

*Beweis.* Sei  $B$  Zukunftsmenge mit  $B \neq \emptyset$  und  $B \neq M$ . Wegen des Korollars 2.5.6 sind zu zeigen:  $\partial B$  ist achronal und  $\text{Kante}(\partial B) = \emptyset$ .

Sei  $p \in \partial B$ . Für  $q \in I_+(p)$  ist  $I_-(q)$  eine offene Umgebung von  $p \in \partial B$ , insbesondere trifft sie  $B$ .

Somit ist  $q \in I_+(B)$ . Da  $B$  Zukunftsmenge ist, ist  $I_+(B) \subset B$ , somit auch  $I_+(B) \subset \overset{\circ}{B}$  ( $I_+(B)$  ist offen). Daraus folgt, dass  $I_+(p) \subset \overset{\circ}{B}$ . Analog gilt  $I_-(p) \subset M \setminus \overset{\circ}{B}$ .

Dies zeigt einerseits  $I_+(\partial B) \cap \partial B = \emptyset$ , woraus die Achronalität von  $\partial B$  folgt, und andererseits dass jede zeitartige Kurve von  $I_-(p)$  nach  $I_+(p)$  die Teilmenge  $\partial B$  treffen muss. Daher gilt  $\text{Kante}(\partial B) = \emptyset$ .  $\square$

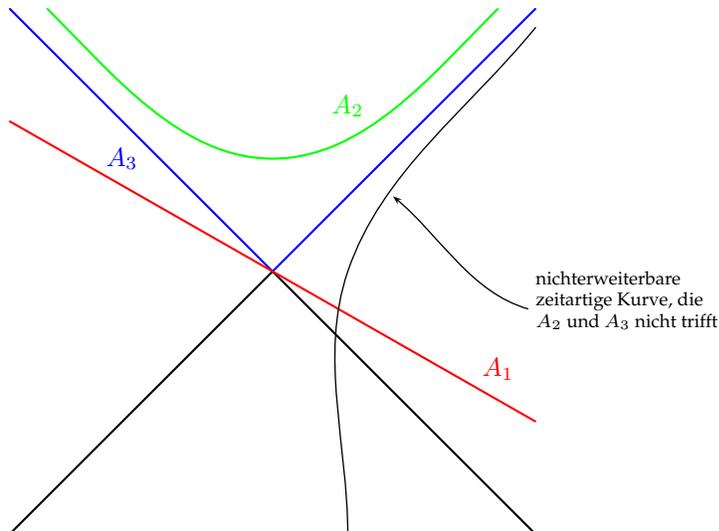
**Definition 2.5.9.** Eine Teilmenge  $B$  einer zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  heißt akausal, falls für alle  $p, q$  in  $M$  gilt  $p \not\prec q$ , d.h. jede kausale Kurve in  $M$  trifft  $B$  höchstens einmal.

**Bemerkung.** Ist  $B \subset M$  akausal, so ist  $B$  achronal. Dass  $B$  achronal ist impliziert aber nicht dass  $B$  akausal ist.

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum und  $B := C_+(0)$  der Zukunftskegel: dann ist  $B$  achronal aber nicht akausal ( $B$  enthält lichtartige Geraden).

**Definition 2.5.10.** Eine Cauchy-Hyperfläche einer zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit ist eine Teilmenge  $S$  von  $M$ , die von jeder nichterweiterbaren zeitartigen Kurve genau einmal getroffen wird.

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum und  $S$  eines der drei  $A_1, A_2$  und  $A_3$  wie im obigen Beispiel. Dann ist  $A_1$  eine Cauchy-Hyperfläche; allerdings sind weder  $A_2$  noch  $A_3$  Cauchy-Hyperflächen.



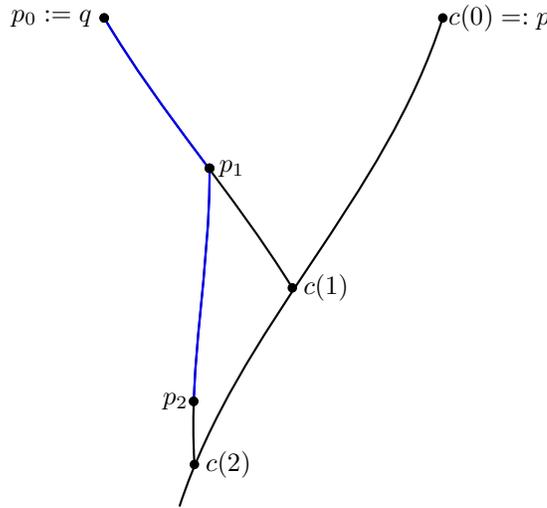
**LEMMA 2.5.11.** Sei  $M$  zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei  $A \subset M$  abgeschlossen. Sei  $c : [0, b) \rightarrow M \setminus A$  vergangenheitsgerichtete kausale Kurve mit  $c(0) =: p$ , die vergangenheitsnichterweiterbar in  $M$  ist. Dann gelten:

(1) Für jedes  $q \in I_+(p, M \setminus A)$  existiert eine Kurve  $\tilde{c} : [0, b) \rightarrow M \setminus A$  mit  $\tilde{c}(0) = q$ , zeitartig vergangenheitsgerichtet, die vergangenheitsnichterweiterbar ist.

(2) Es existiert  $\tilde{c} : [0, b) \rightarrow M \setminus A$  mit  $\tilde{c}(0) = p$ , vergangenheitsgerichtet zeitartig, die vergangenheitsnichterweiterbar in  $M$  ist, es sei denn  $c$  ist lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $b = \infty$  und  $(c(n))_n$  konvergiert nicht. Wähle Metrik  $d$  auf  $M$ , die die gegebene Topologie auf  $M$  induziert.

(1) Setze  $p_0 := q \gg p$  wobei " $\gg$ " sich auf  $M \setminus A$  bezieht. Wegen  $c(1) \leq c(0) \ll p_0$  gilt  $c(1) \ll p_0$ . Auf zeitartiger Verbindungskurve von  $c(1)$  nach  $p_0$  wähle  $p_1$  s.d.  $0 < d(p_1, c(1)) < 1$ .



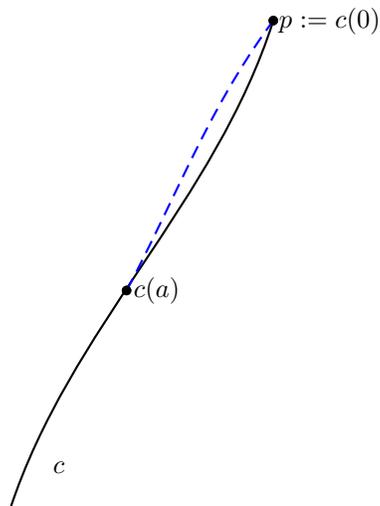
Finde induktiv  $p_k$  s.d.  $c(k) \ll p_k \ll p_{k-1}$  und  $d(c(k), p_k) < \frac{1}{k}$ . Erhalte zeitartige vergangenheitsgerichtete Kurve  $\tilde{c}$ , die die Punkte  $p_k$  enthält und in  $p_0 = q$  startet.

Die Kurve  $\tilde{c}$  ist vergangenheitsnichterweiterbar, denn würde  $\tilde{c}$  durch  $p_\infty$  stetig fortgesetzt, dann  $p_k \rightarrow p_\infty$  und somit

$$d(c(k), p_\infty) \leq \underbrace{d(c(k), p_k)}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{d(p_k, p_\infty)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.  $c(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p_\infty$ , Widerspruch.

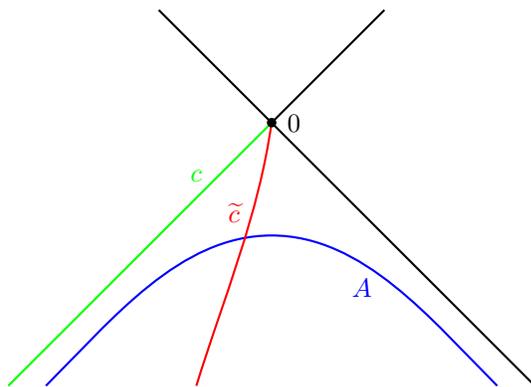
(2) Sei  $c$  nicht lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte. Dann existiert es ein  $a > 0$  s.d.  $c|_{[0, a]}$  nicht lichtartige Prägeodätische ohne konjugierte Punkte ist. Aus dem Satz 2.2.12 schliesst man dann, dass es eine zeitartige Kurve von  $c(0)$  nach  $c(a)$  in  $M \setminus A$  gibt.



Nun ist  $p \in I_+(c(a), M \setminus A)$ . Wende (1) an auf  $c|_{[a, \infty)}$  statt  $c$ ,  $c(a)$  statt  $p$ , und  $p$  statt  $q$ . □

**Bemerkung.** Auf die Annahme an  $c$  in (2) kann nicht verzichtet werden.

**Beispiel.** Sei  $M := \mathbb{R}^n$  der Minkowski-Raum und  $A := -H^{n-1}$ .



Lichtartige vergangenheitsgerichtete Geraden  $c$ , die in 0 starten, treffen  $A$  nicht, aber jede zeitartige vergangenheitsgerichtete vergangenheitsnichterweiterbare Kurve  $\tilde{c}$ , die in 0 startet, trifft  $A$ .

**PROPOSITION 2.5.12.** Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei  $S \subset M$  eine Cauchy-Hyperfläche. Dann gilt:

- (1)  $S$  ist achronal.
- (2)  $S$  ist abgeschlossene topologische Hyperfläche.
- (3) Jede nichterweiterbare kausale Kurve trifft  $S$ .

*Beweis.*

- (1) Gäbe es eine zeitartige Kurve, die  $S$  zweimal trifft, so würde jede maximale Erweiterung als

zeitartige Kurve  $S$  ebenfalls zweimal treffen, Widerspruch.

(2) **Behauptung:**  $M = I_-(S) \dot{\cup} S \dot{\cup} I_+(S)$ . Insbesondere ist  $S = M \setminus \{I_-(S) \cup I_+(S)\}$  abgeschlossen.

*Beweis der Behauptung:* Sei  $p \in M$  und  $c$  nichterweiterbare zeitartige Kurve, die  $p$  enthält. Die Kurve  $c$  trifft  $S$  in  $q$

$$\implies p \in I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$$

$$\implies M = I_-(S) \cup S \cup I_+(S).$$

Wäre  $q \in I_{\pm}(S) \cap S$  oder  $q \in I_-(S) \cap I_+(S)$ , so erhielten wir eine zeitartige Kurve, die  $S$  zweimal trifft, Widerspruch. Die Vereinigung ist damit disjunkt. ✓

**Behauptung:**  $S = \partial I_+(S) = \partial I_-(S)$ .

*Beweis der Behauptung:* Da  $I_+(S) \cup S$  und  $I_-(S) \cup S$  als Komplemente von  $I_-(S)$  bzw.  $I_+(S)$  abgeschlossen sind, haben wir

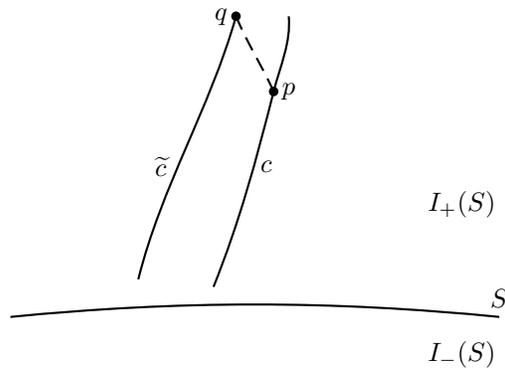
$$\begin{aligned} \partial I_+(S) &= \overline{I_+(S)} \cap \overline{M \setminus I_+(S)} \\ &\subset (I_+(S) \cup S) \cap (I_-(S) \cup S) \\ &= S. \end{aligned}$$

Andererseits gilt  $S \subset \partial I_+(S)$  für jede Teilmenge einer Lorentz-Mannigfaltigkeit. ✓

**Behauptung:**  $\text{Kante}(S) = \emptyset$ . Also ist  $S$  abgeschlossene topologische Hyperfläche.

*Beweis der Behauptung:* Jede zeitartige Kurve von  $I_-(S)$  nach  $I_+(S)$  muss  $S$  treffen. Somit ist  $\text{Kante}(S)$  leer. ✓

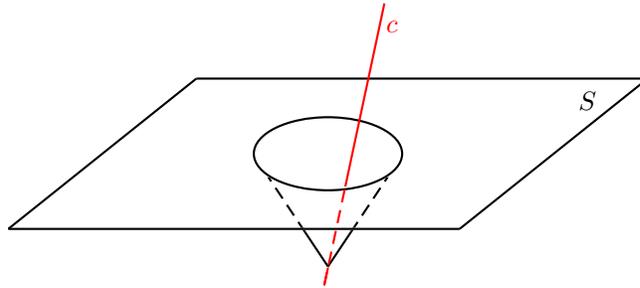
(3) Angenommen,  $c$  ist kausale nichterweiterbare Kurve in  $M$ , die  $S$  nicht trifft. O.B.d.A. verlaufe  $c$  ganz in  $I_+(S)$ .



Wähle  $p$  auf  $c$  und  $q \in I_+(p, M \setminus S)$ . Nach Lemma 2.5.11 existiert eine vergangenheitsnichterweiterbare (in  $M$ ) Kurve in  $M \setminus S$ , die in  $q$  startet. Diese Kurve verläuft in  $I_+(S)$ . Setze  $\tilde{c}$  nichterweiterbar zeitartig in die Zukunft fort. Diese Kurve verbleibt in  $I_+(S)$ , damit ist  $\tilde{c}$  nichterweiterbare zeitartige Kurve in  $M$ , die  $S$  nicht trifft, was ein Widerspruch ist zu "S ist Cauchy-Hyperfläche". □

**Bemerkung.** Der Schnittpunkt einer Cauchy-Hyperfläche mit einer kausalen Kurve ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum.



Hier ist  $c(\mathbb{R}) \cap S$  eine Geradensegment.

**SATZ 2.5.13.** Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei  $X$  ein glattes zeitartiges Vektorfeld auf  $M$ . Sei  $S \subset M$  eine Cauchy-Hyperfläche.

Definiere  $\rho : M \rightarrow S$  durch  $\rho(p) :=$  eindeutiger Schnittpunkt der maximalen Integralkurve von  $X$  durch  $p$  mit  $S$ .

Dann ist  $\rho$  wohldefiniert, stetig, offen und  $\rho|_S = \text{id}_S$ . Insbesondere ist  $S$  zusammenhängend.

*Beweis.*

a) Sei  $c : (a, b) \rightarrow M$  die maximale Integralkurve von  $X$  mit  $c(0) = p$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Dann ist  $c$  nichterweiterbar, denn wäre  $c$  z.B. stetig durch  $q$  nach  $b$  fortsetzbar, dann würde die Integralkurve von  $X$  durch  $q$ ,  $c$  als Integralkurve fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität als Integralkurve.

Somit hat  $c$  einen eindeutigen Schnittpunkt  $\rho(p)$  mit  $S$ .

b) Sei  $\Psi : \mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  der Fluss von  $X$ , wobei  $\mathcal{D}$  der maximale Definitionsbereich von  $\Psi$  ist. Da  $S \subset M$  topologische Hyperfläche ist, ist auch  $S \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$  eine topologische Hyperfläche und somit auch  $\mathcal{D}(S) := (S \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ .

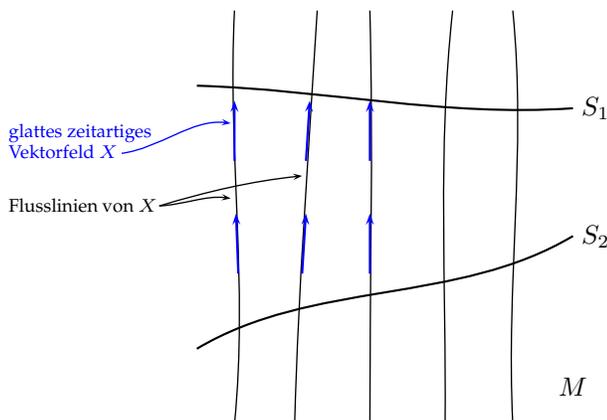
Die Abbildung  $\psi := \Psi|_{\mathcal{D}(S)} : \mathcal{D}(S) \rightarrow M$  ist stetig und bijektiv. Da  $\mathcal{D}(S)$  und  $M$  topologische Mannigfaltigkeiten derselben Dimension sind, ist  $\psi : \mathcal{D}(S) \rightarrow M$  nach einem Satz von Brouwer [Vick] ("Jede stetige injektive Abbildung zwischen zwei  $n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ist offen") ein Homöomorphismus.

Sei  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  die Projektion. Dann ist  $\pi$  stetig und offen. Somit ist  $\rho := \pi \circ \psi^{-1}$  ebenfalls stetig und offen.

c) Für  $p \in S$  ist  $p$  der eindeutige Schnittpunkt der Integralkurve durch  $p$  mit  $S$ , also  $\rho(p) = p$ . Wegen  $S = \rho(M)$ , der Stetigkeit von  $\rho$ , und da  $M$  zusammenhängend ist, ist  $S$  auch zusammenhängend.  $\square$

**KOROLLAR 2.5.14.** Sind  $S_1$  und  $S_2$  Cauchy-Hyperflächen von  $M$ , so sind  $S_1$  und  $S_2$  homöomorph.

*Beweis.* Wähle ein glattes zeitartiges Vektorfeld  $X$  auf  $M$ . Seien  $\rho_i : M \rightarrow S_i, i = 1, 2$ , wie in Satz 2.5.13.



Die Abbildungen  $\rho_{1|_{S_2}} : S_2 \rightarrow S_1$  und  $\rho_{2|_{S_1}} : S_1 \rightarrow S_2$  sind invers zueinander, also Homöomorphismen.  $\square$

## 2.6 Global-hyperbolische Teilmengen

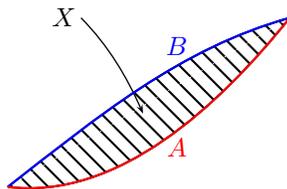
Sei  $M$  stets zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit.

**Definition 2.6.1.** Eine Teilmenge  $X \subset M$  heißt global-hyperbolisch, falls:

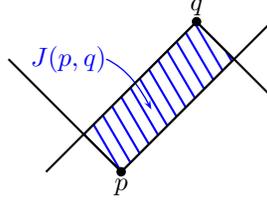
(1) Die starke Kausalitätsbedingung (siehe Definition 2.1.12) gilt auf  $X$ , d.h. für jedes  $p \in X$  und für jede Umgebung  $U$  von  $p$  in  $M$  existiert eine Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  in  $M$  s.d. jede kausale Kurve (in  $M$ ), die in  $V$  anfängt und endet, ganz in  $U$  verläuft.

(2) Für alle  $p, q$  in  $X$  ist  $J_+(p) \cap J_-(q) =: J(p, q)$  kompakt und in  $X$  enthalten.

**Beispiel.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum, und  $A, B \subset M$  beliebige Teilmengen. Betrachte  $X := J_+(A) \cap J_-(B)$ .



Die Bedingung (1) gilt für alle  $p \in M$ . Ferner ist  $J(p, q)$  kompakt für alle  $p, q \in M$ .



Für  $p, q \in X$  gilt:  $J(p, q) \subset J_+(p) \subset J_+(X) \subset J_+(J_+(A)) = J_+(A)$  und analog  $J(p, q) \subset J_-(B)$ , damit  $J(p, q) \subset X$ .

**LEMMA 2.6.2.** Sei  $K \subset M$  kompakt und es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf  $K$ . Sei  $c : [0, b) \rightarrow M$ ,  $b \leq \infty$ , eine zukunftsrichterweiterbare kausale Kurve mit  $c(0) \in K$ . Dann existiert ein  $t_0 \in (0, b)$  s.d.  $c(t) \notin K$  für alle  $t \in [t_0, b)$ .

*Beweis.* Angenommen, dies ist falsch. Dann existiert eine Folge  $(s_i)_i$  aus  $(0, b)$  mit  $s_i < s_{i+1}$ ,  $s_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b$ , und  $c(s_i) \in K$ . Nach Übergang zu Teilfolge kann man annehmen, dass  $c(s_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p \in K$ . Da  $c$  zukunftsrichterweiterbar ist, existiert eine Folge  $(t_i)_i$  aus  $(0, b)$  mit  $t_i < t_{i+1}$ ,  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b$  und  $c(t_i) \rightarrow p$ . Nach Übergang zu Teilfolge kann man annehmen, dass es eine Umgebung  $U$  von  $p$  existiert, s.d.  $c(t_i) \notin U$  und  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < \dots$ .

Nun gilt für jede Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  und hinreichend großes  $i$ :  $c(s_i), c(s_{i+1}) \in V$  aber  $c([s_i, s_{i+1}]) \not\subset U$ , da  $c(t_i) \notin U$ . Widerspruch zur starken Kausalitätsbedingung.  $\square$

**LEMMA 2.6.3.** Sei  $K \subset M$  kompakt und es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf  $K$ . Seien  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  zukunftsgerichtete kausale Kurven mit  $c_n([0, 1]) \subset K$ ,  $c_n(0) \rightarrow p$ , und  $c_n(1) \rightarrow q \neq p$ . Dann existiert es ein zukunftsgerichteter kausaler geodätischer Polygonzug  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  und eine Teilfolge  $(c_{n_m})_m$  mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L[c_{n_m}] \leq L[\gamma].$$

*Beweis.* Nach Proposition 2.4.2 besitzt  $(c_n)_n$  eine Grenzfolge  $p_0 := p < p_1 < p_2 < \dots$

a) **Behauptung:** Die Grenzfolge ist endlich.

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, sie wäre unendlich. Dann wäre der zugehörige Quasilimes eine zukunftsrichterweiterbare kausale Kurve, die in  $p$  startet. Nach Lemma 2.6.2 verlässt der Quasilimes  $K$  ohne zurückzukehren, d.h.  $p_i \notin K$  für  $i \gg 0$ . Wegen  $c_{n_m}(t_{m,i}) \rightarrow p_i$  ist dann auch  $c_{n_m}(t_{m,i}) \notin K$  für  $m \gg 0$  und  $i \gg 0$ . Widerspruch.  $\checkmark$

b) Also ist die Grenzfolge endlich,  $p_0 := p < p_1 < \dots < p_N = q$ .

Der zugehörige Quasilimes  $\gamma$  ist somit zukunftsgerichtetes kausales geodätisches Polygon von  $p$  nach  $q$ . Die Punkte  $p_i$  und  $p_{i+1}$  sowie die Segmente  $c_{n_m}([t_{m,i}, t_{m,i+1}])$  sind in einer konvexen Menge enthalten, die von  $i$  abhängt, aber nicht von  $m$ . Dort sehen wir (z.B. durch Gauß-Lemma)

$$L[c_{n_m}|_{[t_{m,i}, t_{m,i+1}]}] \leq |\Delta(p_{m,i}, p_{m,i+1})|,$$

wobei  $p_{m,j} := c_{n_m}(t_{m,j})$  und  $|\cdot| := \sqrt{|\langle \cdot, \cdot \rangle|}$ . Daraus folgt

$$L[c_{n_m}] \leq \sum_{i=0}^{N-1} |\Delta(p_{m,i}, p_{m,i+1})|.$$

Für  $m \rightarrow \infty$  konvergiert die rechte Seite dieser Ungleichung gegen  $\sum_{i=0}^{N-1} |\Delta(p_i, p_{i+1})| = L[\gamma]$ . Nach Übergang zu Teilfolge konvergiert  $(L[c_{n_m}])_m$  und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L[c_{n_m}] \leq L[\gamma].$$

□

**LEMMA 2.6.4.** Sind  $p < q \in M$ , ist  $J(p, q)$  kompakt und gilt die starke Kausalitätsbedingung auf  $J(p, q)$ , dann existiert eine kausale Geodätische von  $p$  nach  $q$  mit Länge  $\tau(p, q)$ .

**Bemerkung.** Dieses Lemma entspricht in der riemannschen Geometrie der im Satz von Hopf-Rinow enthaltenen Aussage, dass sich auf einer vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit je zwei Punkte durch eine kürzeste Geodätische verbinden lassen.

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $p \neq q$ . Seien  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  zukunftsgerichtete kausale Kurven mit  $c_n(0) := p$ ,  $c_n(1) := q$  und  $L[c_n] \rightarrow \tau(p, q)$ . Nach Definition gilt  $c_n([0, 1]) \subset J(p, q)$  für alle  $n$ . Aus Lemma 2.6.3 folgt die Existenz eines zukunftsgerichteten kausalen geodätischen Polygons  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  mit  $\tau(p, q) = \lim_{m \rightarrow \infty} L[c_{n_m}] \leq L[\gamma] \leq \tau(p, q)$  und damit  $L[\gamma] = \tau(p, q)$ .

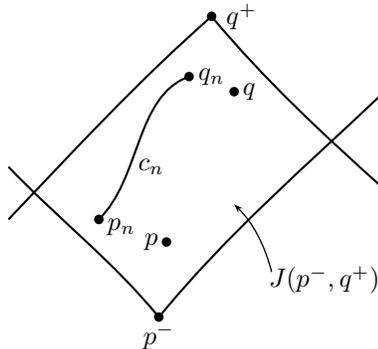
Wie im Beweis von Lemma 2.2.11 zeigt man, dass, falls  $\gamma$  einen "Knick" hätte, man  $\gamma$  unter Festhalten der Endpunkte verlängern könnte. Widerspruch zu  $L[\gamma] = \tau(p, q)$  maximal. □

**PROPOSITION 2.6.5.** Sei  $X \subset M$  eine offene global-hyperbolische Teilmenge. Dann ist  $\tau$  auf  $X \times X$  endlich und stetig.

*Beweis.* Nach Lemma 2.6.4 ist  $\tau < \infty$  auf  $X \times X$ . Nach Proposition 2.1.15 ist  $\tau$  unterhalbstetig. Angenommen,  $\tau$  ist nicht oberhalbstetig in  $(p, q) \in X \times X$ . Dann existieren ein  $\delta > 0$  sowie Folgen  $p_n \rightarrow p$  und  $q_n \rightarrow q$ , s.d.

$$\tau(p_n, q_n) \geq \tau(p, q) + \delta.$$

Wähle zukunftsgerichtete kausale Kurven  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c_n(0) := p_n$ ,  $c_n(1) := q_n$  und  $L[c_n] \geq \tau(p_n, q_n) - \frac{1}{n}$ . Da  $X$  offen ist, existieren  $p^-$  und  $q^+ \in X$  mit  $p^- \ll p$  und  $q^+ \gg q$ .



Wegen  $p_n \rightarrow p$  und da  $I_+(p^-)$  offene Umgebung von  $p$  ist, ist  $p_n \in I_+(p^-)$  für  $n \gg 0$ . Analog ist  $q_n \in I_-(q^+)$  für  $n \gg 0$ . Daraus folgt für  $n \gg 0$

$$c_n([0, 1]) \subset I_+(p^-) \cap I_-(q^+) \subset J(p^-, q^+).$$

Da  $X$  global-hyperbolisch ist, ist  $J(p^-, q^+)$  kompakt und die starke Kausalitätsbedingung gilt auf  $J(p^-, q^+)$ . Nach Lemma 2.6.4 existiert ein geodätisches Polygon von  $p$  nach  $q$  und Teilfolge  $(c_{n_m})_m$  s.d.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L[c_{n_m}] \leq L[\gamma] \leq \tau(p, q),$$

mit  $L[c_{n_m}] \geq \tau(p_{n_m}, q_{n_m}) - \frac{1}{n_m} \geq \tau(p, q) + \delta - \frac{1}{n_m}$ . Für  $m \rightarrow \infty$  erhält man  $\tau(p, q) + \delta \leq \tau(p, q)$ , Widerspruch.  $\square$

**PROPOSITION 2.6.6.** Sei  $X \subset M$  eine offene global-hyperbolische Teilmenge. Dann ist die Relation " $\leq$ " abgeschlossen auf  $X$ .

*Beweis.* Seien  $p_n, p, q_n, q \in X$  mit  $p_n \leq q_n, p_n \rightarrow p, q_n \rightarrow q$ . Zu zeigen ist,  $p \leq q$ .

1. Fall: Für unendlich viele  $n$  ist  $p_n = q_n$ . Dann gilt  $p = q$ .  $\checkmark$

2. Fall: Nach Übergang zu Teilfolge kann man annehmen, dass  $p_n \neq q_n$  für alle  $n$ , damit  $p_n < q_n$ . Seien  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  zukunftsgerichtete kausale Kurven mit  $c_n(0) := p_n, c_n(1) := q_n$ . Wie im vorangegangenen Beweis wähle  $p^-, q^+ \in X$  s.d.  $c_n([0, 1]) \subset J(p^-, q^+)$ . Dann existiert es ein kausales geodätisches Polygon von  $p$  nach  $q$  und somit gilt  $p \leq q$ .  $\square$

## 2.7 Cauchy-Entwicklungen und Cauchy-Horizonte

Sei  $M$  stets zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit.

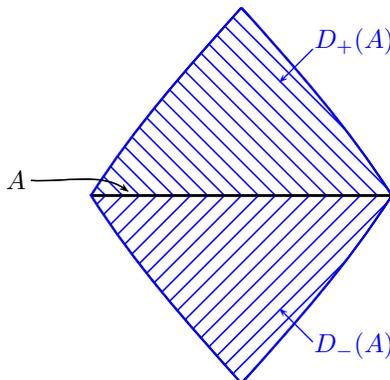
**Definition 2.7.1.** Sei  $A \subset M$  achronal. Die Menge

$$D_+(A) := \{p \in M \mid \text{jede vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve durch } p \text{ trifft } A\}$$

heißt Zukunfts-Cauchy-Entwicklung von  $A$ .

Analog definiert man die Vergangenheits-Cauchy-Entwicklung  $D_-(A)$  von  $A$ .

Die Cauchy-Entwicklung von  $A$  ist  $D(A) := D_+(A) \cup D_-(A)$ .

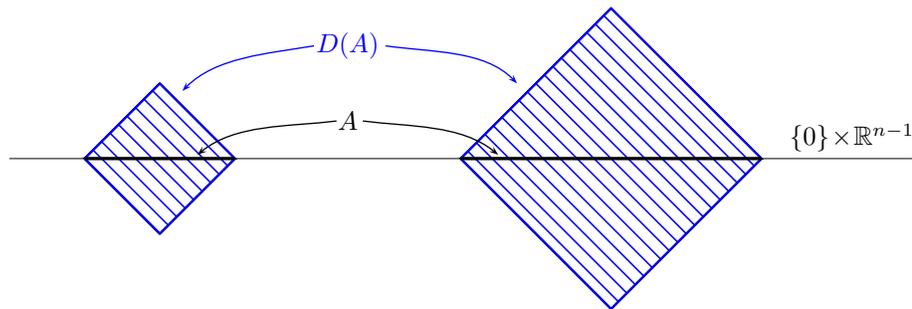


**Bemerkungen.**

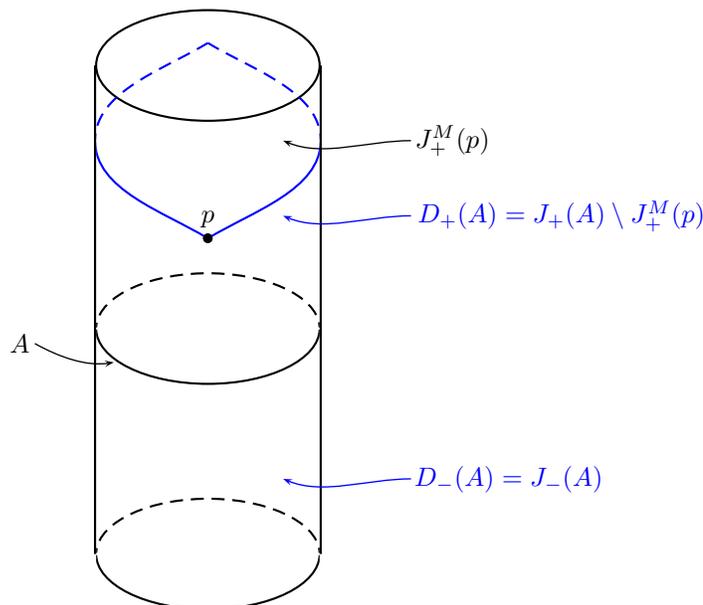
- a)  $A \subset D_{\pm}(A) \subset A \cup I_{\pm}(A) \subset J_{\pm}(A)$ .
- b)  $D_+(A) \cap I_-(A) = \emptyset$  wegen  $A$  achronal.
- c)  $A \subset D_+(A) \cap D_-(A) \subset D_+(A) \cap (A \cup I_-(A)) = D_+(A) \cap A = A \implies D_+(A) \cap D_-(A) = A$ .
- d)  $D(A) \cap I_{\pm}(A) = D_{\pm}(A) \setminus A$ .

**Beispiele.**

- 1) Sei  $M$  der Minkowski-Raum und  $A := \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist  $D_{\pm}(A) = J_{\pm}(A) = A \cup I_{\pm}(A)$ .
- 2) Sei  $M$  eine beliebige Lorentz-Mannigfaltigkeit und  $S \subset M$  eine Cauchy-Hyperfläche. Wegen  $M = I_-(S) \dot{\cup} S \dot{\cup} I_+(S)$  gilt  $D_{\pm}(S) = S \cup I_{\pm}(S)$  und somit  $D(S) = M$ .
- 3) Sei  $M$  der Minkowski-Raum und  $A := \{0\} \times B, B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist  $D(A)$  der Doppelkegel über  $B$ .



- 4) Sei  $M := \mathbb{R} \times S^1$  (mit Koordinaten  $(t, \theta)$  erklärt) und  $g := -dt^2 + d\theta^2$ . Sei  $A := \{0\} \times S^1$ . Sei  $p \in I_+(A)$  fest und betrachte  $\widetilde{M} := M \setminus \{p\}$ .





zwei Punkte aus  $A$  mit  $q'_+ \ll q'_-$  im Widerspruch zur Achronalität von  $A$ . ✓

b) **Behauptung:** Die starke Kausalitätsbedingung gilt auf  $\overset{\circ}{D}(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, sie gilt nicht in einem Punkt  $p \in \overset{\circ}{D}(A)$ . Dann existiert eine Folge von zukunftsgerichteten kausalen Kurven  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c_n(0) \rightarrow p$ ,  $c_n(1) \rightarrow p$  und eine Umgebung  $U$  von  $p$ , s.d.  $c_n \not\subseteq U$ . Nach Proposition 2.4.2 existiert eine Grenzfolge von  $(c_n)_n$ ,  $p =: p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ . Ist die Grenzfolge endlich,  $p =: p_0 < \dots < p_N = p$ , so ist  $p < p < p$  im Widerspruch zu a).

Also ist die Grenzfolge unendlich und der zugehörige Quasilimes  $\gamma$  zukunftsnihterweiterbar. Gemäß Lemma 2.7.2 (2) trifft  $\gamma$  die Zukunft  $I_+(A)$  (und verbleibt dann dort). Insbesondere existiert ein  $i$  s.d.  $p_i \in I_+(A)$ . Nach Übergang zu Teilfolge und Umparametrisierung existiert  $s \in (0, 1)$  s.d.

$$c_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_i.$$

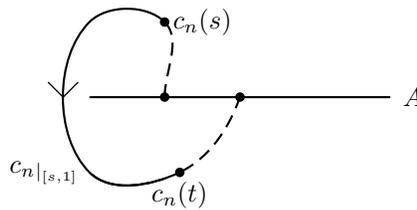
Für  $n \gg 0$  ist  $c_n(s) \in I_+(A)$ .

Proposition 2.4.2 angewandt auf  $(c_n|_{[s,1]})_n$  liefert eine Grenzfolge  $p =: q_0 > q_1 > q_2 > \dots$ . Ist diese Grenzfolge endlich,  $q_0 > q_1 > \dots > q_{N'}$ , so ist  $q_{N'} = p_i$ . Daraus folgt, dass  $p < p_i = q_{N'} < q_0 = p$ , wiederum im Widerspruch zu a).

Also ist auch  $p =: q_0 > q_1 > q_2 > \dots$  unendlich und der zugehörige Quasilimes  $\hat{\gamma}$  ist eine vergangenheitsnihterweiterbare kausale Kurve, die in  $p \in \overset{\circ}{D}(A)$  startet.

$\implies \hat{\gamma}$  trifft  $I_-(A)$  (Lemma 2.7.2 (2))

$\implies$  Es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $t \in [0, 1]$  mit  $c_n(t) \in I_-(A)$ .



Widerspruch zu  $A$  achronal. ✓

c) **Behauptung:** Seien  $p, q \in \overset{\circ}{D}(A)$ . Dann ist  $J(p, q)$  kompakt.

*Beweis der Behauptung:* Falls  $p \not\prec q$ , dann ist  $J(p, q) = \emptyset$  und es ist nichts zu zeigen. Falls  $p = q$ , so ist  $J(p, q) = \{p\}$ , denn für ein  $r \in J(p, p)$ ,  $r \neq p$ , würde  $p < r < p$  folgen, was der Achronalität von  $A$  widersprechen würde.

Sei also  $p < q$ ,  $p \neq q$ . Sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $J(p, q)$ . Zu zeigen ist: Es existiert eine Teilfolge von  $(x_n)_n$ , die in  $J(p, q)$  konvergiert.

Seien  $c_n : [0, 1] \rightarrow M$  zukunftsgerichtete kausale Kurven von  $p$  durch  $x_n$  nach  $q$ . Sei  $\mathcal{K}$  eine konvexe Überdeckung von  $M$  durch offene konvexe Mengen  $U$  mit  $\bar{U}$  kompakt und in offener konvexer Menge enthalten. Aus Proposition 2.4.2 erhalte eine Grenzfolge  $p =: p_0 < p_1 < p_2 < \dots$  für  $(c_n)_n$  bzgl.  $\mathcal{K}$ .

1. Fall: Wir können eine solche Grenzfolge finden, die endlich ist,  $p =: p_0 < p_1 < \dots < p_N = q$ . Übergang zu Teilfolge von  $(c_n)_n$  liefert  $x_n \in c_n([s_{n,i}, s_{n,i+1}])$  für alle  $n$  und ein festes  $i$ , somit liegen alle  $x_n$  in einem festen  $U \in \mathcal{K}$ . Wegen  $\bar{U}$  kompakt konvergiert eine Teilfolge von  $(x_n)_n$  gegen ein  $x \in \bar{U} \subset V$ , wobei  $V$  konvex und offen ist.

$$\begin{aligned} c_n(s_{n,i}) \leq x_n \leq c_n(s_{n,i+1}) &\implies p_i \leq x \leq p_{i+1} \quad (\text{Lemma 2.3.9 (4)}) \\ &\implies p \leq x \leq q \\ &\implies x \in J(p, q). \end{aligned}$$

2. Fall: Alle solche Grenzfolgen sind unendlich. Wir leiten Widerspruch her, dieser Fall tritt nicht auf.

Wie in b) erhalte Teilfolge reparametrisierter  $c_n$  und festes  $s$  s.d.  $c_n(s) \rightarrow p_i \in I_+(A)$ . Die Folge  $(c_n|_{[s,1]})_n$  liefert eine Grenzfolge  $q =: q_0 > q_1 > q_2 > \dots$ . Wäre diese Grenzfolge endlich,  $q = q_0 > q_1 > \dots > q_N = p_i$ , dann wäre  $p = p_0 < p_1 < \dots < p_i = q_N < \dots < q_0 = q$  endliche Grenzfolge von  $(c_n)_n$  im Widerspruch zur Annahme. Also ist auch  $q = q_0 > q_1 > \dots$  unendlich und der zugehörige Quasilimes  $\hat{\gamma}$  vergangenheitsnichterweiterbar. Wie in b) trifft  $\hat{\gamma}$  die Vergangenheit  $I_-(A)$  von  $A$ , Widerspruch zu  $A$  achronal.  $\checkmark$

d) **Behauptung:** Für  $p, q \in \overset{\circ}{D}(A)$  ist  $J(p, q) \subset \overset{\circ}{D}(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Es ist nur der Fall  $p < q$ ,  $p \neq q$ , zu betrachten.

1. Fall: Seien  $p, q \in I_+(A)$ .

Wähle  $q_+ \in I_+(q) \cap D(A)$ . Setze  $U := I_+(A) \cap I_-(q_+)$ . Die offene Menge  $U$  ist eine offene Umgebung von  $J(p, q)$ , denn

$$J(p, q) \subset J_+(I_+(A)) \cap J_-(I_-(q_+)) = I_+(A) \cap I_-(q_+) = U.$$

Zu zeigen ist  $U \subset D(A)$ .

Sei  $x \in U$ . Sei  $c$  eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve von  $x$  nach  $q_+$ . Würden sich  $c$  und  $A$  schneiden, so würde es die Achronalität von  $A$  widersprechen.

Ist  $\gamma$  eine vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve, die in  $x$  startet, so ist  $c \cup \gamma$  vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve, die in  $q_+$  startet und trifft daher  $A$

$\implies \gamma$  trifft  $A$

$\implies x \in D_+(A)$ .  $\checkmark$

2. Fall:  $p \in J_-(A)$ ,  $q \in J_+(A)$ .

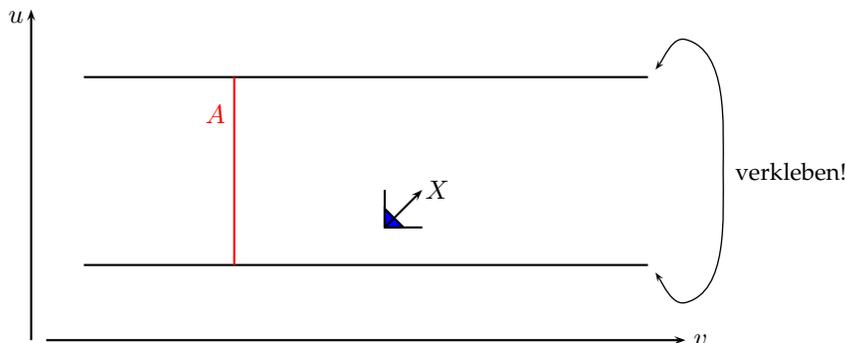
Wähle  $p_- \in I_-(p) \cap D(A)$  und  $q_+ \in I_+(q) \cap D(A)$ . Wiederum ist  $U := I_+(p_-) \cap I_-(q_+)$  offene Umgebung von  $J(p, q)$ . Zu zeigen ist noch  $U \subset A$ .

Sei  $x \in U$ . Wegen  $A \subset D(A)$  können wir annehmen, dass  $x \notin A$ . Sei  $c_-$  eine zeitorientierte zukunftsgerichtete Kurve von  $p_-$  nach  $x$  und  $c_+$  eine zeitorientierte zukunftsgerichtete Kurve von  $x$  nach  $q_+$ . Da  $A$  achronal ist, trifft wenigstens eine der beiden Kurven  $A$  nicht.

Falls  $c_{\pm}$  die Menge  $A$  nicht trifft, so folgt  $x \in D_{\pm}(A)$ .  $\square$

**Bemerkung.** In [O'Neill] wird auf Seite 421 behauptet, für eine achronale Menge  $A \subset M$  gelte die Kausalitätsbedingung auf ganz  $D(A)$ . Dies ist nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel.** Sei  $M := S^1 \times \mathbb{R}$  (mit Koordinaten  $(u, v)$  erklärt) und  $g := -du \otimes dv - dv \otimes du$ . Die Zeitorientierung sei festgelegt durch  $X := \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ . Setze  $A := S^1 \times \{0\}$ .



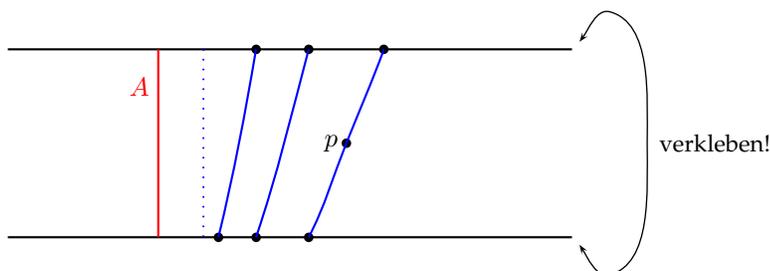
Die Teilmenge  $A$  ist achronal: Ist  $s \mapsto (u(s), v(s))$  eine zeitartige Kurve, so ist

$$0 > g\left(u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}, u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}\right) = -2u'v',$$

insbesondere gilt  $v' \neq 0$  und daher  $v'(s) > 0$  für alle  $s$  oder  $v'(s) < 0$  für alle  $s$ . Daraus folgt, dass diese Kurve  $A$  in höchstens einem Punkt trifft.

Allerdings ist  $A$  nicht akausal, denn  $A$  ist selbst kausale Schleife.

Zu jedem  $p \in M \setminus A$  gibt es eine zeitartige nichterweiterbare Kurve durch  $p$ , die  $A$  nicht trifft:



Somit gilt  $D(A) = A$ , und  $A$  erfüllt nicht die Kausalitätsbedingung, da  $A$  selbst kausale Schleife ist.

**KOROLLAR 2.7.4.** *Besitzt eine Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  eine Cauchy-Hyperfläche, dann ist  $M$  global-hyperbolisch.*

*Beweis.* Sei  $S \subset M$  eine Cauchy-Hyperfläche. Aus Satz 2.7.3 ist  $\overset{\circ}{D}(S)$  global-hyperbolisch. Aber  $D(S) = M$ , somit  $\overset{\circ}{D}(S) = M$ . □

**LEMMA 2.7.5.** *Jede achronale raumartige (glatte) Hyperfläche ist akausal.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine zukunftsgerichtete kausale Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0), c(1) \in S$ , wobei  $S$  raumartige achronale Hyperfläche ist. Nach Satz 2.2.12 existiert eine zeitartige Kurve, die in  $S$  startet und in  $c(1)$  endet (im Widerspruch zur Achronalität von  $A$ ), es sei denn  $c$  ist lichtartige Prägeodätische ohne Brennpunkte vor  $c(1)$  mit  $\dot{c}(0) \perp S$ . Da aber  $S$  raumartig ist, ist  $N_{c(0)}S$  zeitartig, somit kann  $\dot{c}(0)$  nicht lichtartig sein, Widerspruch.  $\square$

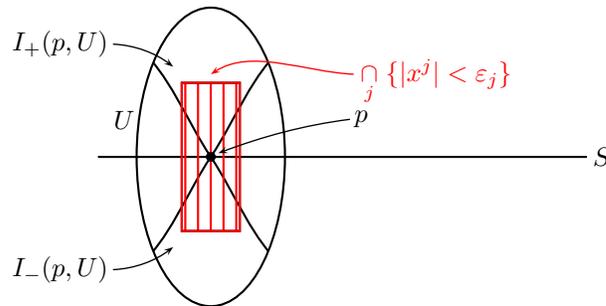
**PROPOSITION 2.7.6.** Sei  $S \subset M$  akausale topologische Hyperfläche. Dann ist  $D(S)$  offen und global-hyperbolisch.

*Beweis.*

a) **Behauptung:**  $I(S) := I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$  ist offen in  $M$ .

*Beweis der Behauptung:* Zu zeigen ist, dass jeder Punkt  $p \in S$  im Inneren von  $I(S)$  liegt.

Nach Proposition 2.5.5 gilt  $S \cap \text{Kante}(S) = \emptyset$ . Also ist  $p \notin \text{Kante}(S)$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $U$  von  $p$ , s.d. alle zeitartigen Kurven in  $U$  von  $I_-(p, U)$  nach  $I_+(p, U)$  die Teilmenge  $S$  treffen.



Seien  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$  riemannsche Normalkoordinaten um  $p$  mit  $|x^j| < \epsilon_j$  ( $\epsilon_j > 0$  vorgegeben) und  $x^0$  zeitartig. Für  $\epsilon_j$  hinreichend klein,  $j = 1, \dots, n-1$ , ist  $\{x^0 = \pm \epsilon_0\} \subset I_{\pm}(p, U)$

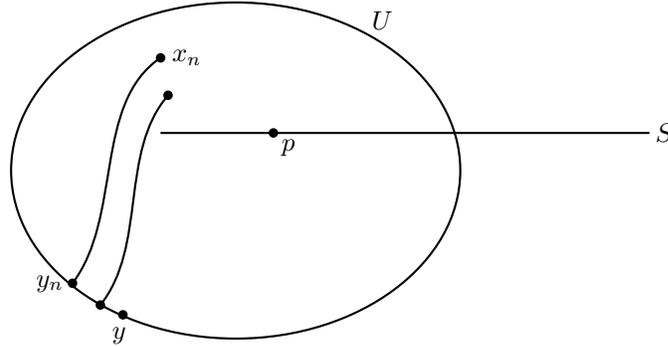
$\implies$  Die  $x^0$ -Koordinatenlinien treffen  $S$

$\implies$  Sie verlaufen in  $I(S)$

$\implies \cap_{j=0}^{n-1} \{|x^j| < \epsilon_j\}$  ist offene Umgebung von  $p$  in  $I(S)$ .  $\checkmark$

b) **Behauptung:**  $S \subset \overset{\circ}{D}(S)$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen,  $p \in S \setminus \overset{\circ}{D}(S)$ . Sei  $U$  offene Umgebung von  $p$  mit  $\bar{U}$  kompakt, in konvexer Menge  $V$  enthalten, und in  $I(S)$  enthalten. Wegen  $p \notin \overset{\circ}{D}(S)$  existiert eine Folge  $(x_n)_n$  aus  $M \setminus D(S)$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ . O.B.d.A. ist  $x_n \in I_+(S) \cap U$ . Da  $x_n$  nicht in  $D_+(S)$  enthalten ist, existiert eine vergangenheitsnichterweiterbare Kurve  $c_n$ , die in  $x_n$  startet und  $S$  nicht trifft.



Da  $\bar{U}$  in konvexer Menge  $V$  enthalten ist, muss  $c_n$  die Menge  $\bar{U}$  verlassen. Sei  $y_n$  der erste Schnittpunkt von  $c_n$  mit  $\partial U$ . Da  $\partial U$  kompakt ist, können wir nach Übergang zu Teilfolge annehmen, dass  $y_n \rightarrow y \in \partial U$ . Es gilt dann  $y_n \leq x_n$ . In konvexer Menge ist aber die Relation " $\leq$ " abgeschlossen: wegen  $x_n \rightarrow p$  und  $y_n \rightarrow y$  gilt dann  $y \leq p$ , sogar  $y < p$  (wegen  $y \neq p$ ). Es gilt auch  $y \in I(S)$ .

1. Fall:  $y \in I_+(S)$ .

Dann existiert ein  $q \in S$ , s.d.  $q \ll y$  und somit  $q \ll p$ , Widerspruch zu  $S$  achronal.

2. Fall:  $y \in S$ .

Durch  $y < p$  erhalten wir einen Widerspruch zu  $S$  akausal.

3. Fall:  $y \in I_-(S)$ .

Es existiert  $n$ , s.d.  $y_n = c_n(t_n) \in I_-(S)$ . Aber  $c_n([0, t_n]) \subset \bar{U} \subset I(S) = I_-(S) \dot{\cup} S \dot{\cup} I_+(S)$

$\implies c_n([0, t_n]) \subset I_-(S)$

$\implies x_n \in I_-(S)$ , Widerspruch zur Annahme an  $x_n$ . ✓

c) **Behauptung:** Ist  $S \subset M$  abgeschlossen, so ist  $D(S)$  offen.

*Beweis der Behauptung:* Es genügt, zu zeigen, dass  $D_+(S) \setminus S = I_+(S) \cap D(S)$  offen ist. Denn dann ist analog auch  $D_-(S) \setminus S$  offen und somit

$$D(S) = (D_+(S) \setminus S) \cup S \cup (D_-(S) \setminus S) \subset (D_+(S) \setminus S) \cup \overset{\circ}{D}(S) \cup (D_-(S) \setminus S) \subset D(S)$$

$\implies D(S) = (D_+(S) \setminus S) \cup \overset{\circ}{D}(S) \cup (D_-(S) \setminus S)$  Vereinigung dreier offener Teilmengen.

Angenommen,  $p \in D_+(S) \setminus S$  ist nicht innerer Punkt von  $D_+(S) \setminus S$

$\implies \exists x_n \notin D_+(S) \setminus S : x_n \rightarrow p$

$\implies$  Es existieren vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurven  $c_n : [0, b_n) \rightarrow M$ , die in  $x_n$  starten und  $S$  nicht treffen (außer möglicherweise im Startpunkt  $x_n$ ). Weil  $S \subset M$  abgeschlossen ist, ist nach b)  $\{M \setminus S, \overset{\circ}{D}(S)\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Nach Proposition 2.3.8 existiert eine

offene Überdeckung  $\mathcal{K}$  von  $M$  durch konvexe Mengen, die  $S$  nicht treffen oder in  $\overset{\circ}{D}(S)$  enthalten sind. Sei  $\gamma$  Quasilimes von  $(c_n)_n$  bzgl.  $\mathcal{K}$ . Die Kurve  $\gamma$  ist vergangenheitsnichterweiterbar kausal, und startet in  $p$ . Wegen  $p \in D_+(S)$  trifft  $\gamma$  die Menge  $S$  in einem eindeutigen Punkt  $\gamma(s)$ . Für zugehörige Grenzfolge  $p = p_0 > p_1 > \dots$  sei  $i$  so, dass

$$p_i > \gamma(s) \geq p_{i+1}.$$

Das Element von  $\mathcal{K}$ , das dieses Segment von  $\gamma$  enthält, trifft  $S$  (in  $\gamma(s)$ ) und ist somit in  $\overset{\circ}{D}(S)$

enthalten. Wegen  $S$  akausal ist  $p_i \notin S$ .

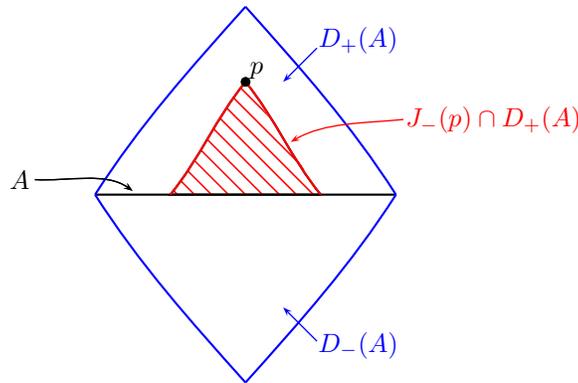
$$\begin{aligned}
 p_i < p \in D_+(S) &\implies p_i \in D_+(S), \text{ d.h. } p_i \in D_+(S) \setminus S = I_+(S) \cap D(S) \\
 &\implies p_i \in I_+(S) \cap \overset{\circ}{D}(S) \text{ offen} \\
 &\implies \text{Für } n \gg 0 \text{ trifft } c_n \text{ die Menge } I_+(S) \cap \overset{\circ}{D}(S) \subset D_+(S) \text{ in einem Punkt} \\
 &\quad y_n = c_n(t_n) \\
 &\implies \text{Für } n \gg 0 \text{ trifft } c_n|_{[t_n, b_n)} \text{ auch } S,
 \end{aligned}$$

Widerspruch. ✓

d) Sei nun  $S$  nicht notwendig abgeschlossen. Die Cauchy-Entwicklungen der Zusammenhangskomponenten von  $S$  sind paarweise disjunkt, denn für  $p \in D(S_1) \cap D(S_2)$  (wobei  $S_1$  und  $S_2$  zwei Zusammenhangskomponenten von  $S$  sind) trifft jede nichterweiterbare kausale Kurve durch  $p$  sowohl  $S_1$  in  $q_1$  als auch  $S_2$  in  $q_2$ , woraus  $q_1 < q_2$  oder  $q_2 < q_1$  folgt, im Widerspruch zu  $S$  akausal. Also sei  $S$  o.B.d.A. zusammenhängend. Dann ist auch  $I(S)$  zusammenhängend, und  $S \subset I(S)$  ist abgeschlossen. Wir können c) anwenden auf  $I(S)$  statt  $M$  und erhalten:  $D(S) = D^{I(S)}(S)$  ist offen in  $I(S)$ . Da  $I(S) \subset M$  offen ist, ist ebenfalls  $D(S) \subset M$  offen.  
Die Global-Hyperbolizität folgt dann aus Satz 2.7.3. □

**Bemerkung.** Die Proposition 2.7.6 gilt nicht wenn man "akausal" zu achronal abschwächt, siehe Beispiel von vorhin.

**LEMMA 2.7.7.** Sei  $A \subset M$  achronal und  $p \in \overset{\circ}{D}(A) \setminus I_-(A)$ . Dann ist  $J_-(p) \cap D_+(A)$  kompakt.



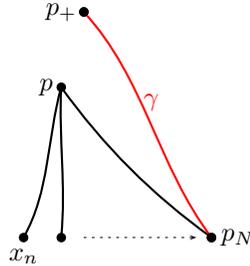
*Beweis.* Sei  $(x_n)_n$  eine Folge aus  $J_-(p) \cap D_+(A)$ . Wähle vergangenheitsgerichtete kausale Kurve  $c_n$  von  $p$  nach  $x_n$ .

Falls eine Teilfolge von  $(x_n)_n$  gegen  $p$  konvergiert, ist es nichts mehr zu zeigen.

Ansonsten können wir Proposition 2.4.2 anwenden und erhalten Grenzfolge  $p =: p_0 > p_1 > \dots$

1. Fall: Diese Grenzfolge ist endlich,  $p =: p_0 > p_1 > \dots > p_N$ .

Für Teilfolge gilt dann  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_N \in J_-(p)$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $p_N \in D_+(A)$ . Wähle  $p_+ \in I_+(p) \cap D_+(A)$ . Aus  $p_+ \gg p \geq p_N$  folgt  $p_+ \gg p_N$ , d.h. es existiert eine zeitartige vergangenheitsgerichtete Kurve  $\gamma$  von  $p_+$  nach  $p_N$ .



Falls  $\gamma$  die Menge  $A$  trifft, so ist  $p_N \in A \subset D_+(A)$  oder  $p_N \in I_-(A)$ . Im letzten Fall müsste  $x_n \in I_-(A)$  für  $n \gg 0$ , Widerspruch zu  $x_n \in I_+(A)$ .

Falls  $\gamma$  die Menge  $A$  nicht trifft, dann ist  $p_N \in D_+(A)$ .

2. Fall: Diese Grenzfolge ist unendlich.

Dann ist Quasilimes  $\gamma$  vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve, die in  $p$  startet, also  $I_-(A)$  trifft nach Lemma 2.7.2 (2).

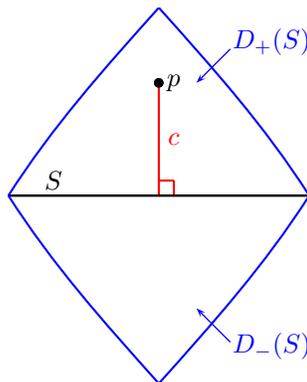
$\implies p_i \in I_-(A)$  für  $i \gg 0$

$\implies x_n \in I_-(A)$  für  $n \gg 0$ , Widerspruch zu  $x_n \in D_+(A)$ . □

**Definition 2.7.8.** Für  $p \in M$  und  $A \subset M$  sei

$$\tau(A, p) := \sup_{q \in A} \tau(q, p).$$

**Satz 2.7.9.** Sei  $S \subset M$  abgeschlossene achronale raumartige (glatte) Hyperfläche. Zu  $p \in D(S)$  existiert eine Geodätische  $c$  von  $S$  nach  $p$  der Länge  $\tau(S, p)$ . Die Geodätische  $c$  steht senkrecht auf  $S$ , hat keinen Brennpunkt vor  $p$ , und ist zeitartig, es sei denn  $p \in S$ .



*Beweis.* Aus Lemma 2.7.5 folgt, dass  $S$  akausal ist, und aus Proposition 2.7.6, dass  $D(S)$  offen und global-hyperbolisch ist. O.B.d.A. sei  $p \in D_+(S)$ .

Wir wissen aus Lemma 2.7.7, dass  $J_-(p) \cap D_+(S)$  kompakt ist, so dass

$$J_-(p) \cap S = \underbrace{(J_-(p) \cap D_+(S))}_{\text{kompakt}} \cap \underbrace{S}_{\text{abgeschlossen}}$$

ebenfalls kompakt ist. Nach Proposition 2.6.5 ist  $\tau$  stetig auf  $J_-(p) \cap S$ , so dass  $\tau(\cdot, p)$  das Maximum  $\tau(S, p)$  auf  $J_-(p) \cap S$  in einem Punkt  $q$  annimmt. Es gibt nach Lemma 2.6.4 eine kausale Geodätische  $c$  von  $q$  nach  $p$  der Länge  $\tau(q, p)$ . Stünde  $c$  nicht senkrecht auf  $S$  oder hätte  $c$  einen Brennpunkt vor  $p$ , so könnte man  $c$  zu längerer zeitartiger Kurve von  $S$  nach  $p$  deformieren, im Widerspruch zur Maximalität der Länge.  $\square$

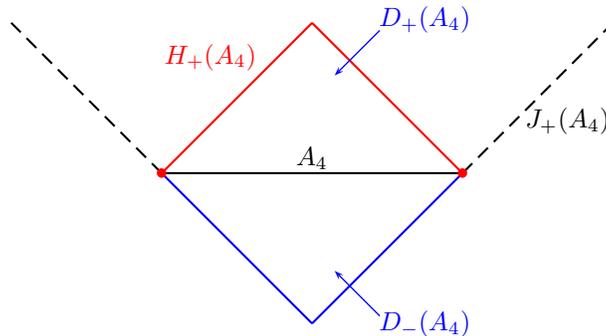
**Definition 2.7.10.** Sei  $A \subset M$  achronal. Dann heißt

$$H_+(A) := \overline{D_+(A)} \setminus I_+(D_+(A)) = \{p \in \overline{D_+(A)} \mid I_+(p) \cap D_+(A) = \emptyset\}$$

Zukunfts-Cauchy-Horizont von  $A$ . Analog definiert man den Vergangenheits-Cauchy-Horizont  $H_-(A)$  von  $A$ . Der Cauchy-Horizont  $H(A)$  von  $A$  wird definiert durch  $H(A) := H_+(A) \cup H_-(A)$ .

**Beispiele.** Sei  $M$  der Minkowski-Raum.

- (1) Setze  $A_1 := \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann gilt  $D_+(A_1) = J_+(A_1)$  und  $H_+(A_1) = \emptyset$ . Analog gilt  $H_-(A_1) = \emptyset$  und somit  $H(A_1) = \emptyset$ .
- (2) Setze  $A_2 := H^{n-1}$  (der  $(n-1)$ -dimensionale hyperbolische Raum). Dann ist  $D(A_2) = I_+(0)$ , und es gilt  $H_+(A_2) = \emptyset$ ,  $H_-(A_2) = C_+(0)$ .
- (3) Setze  $A_3 := C_+(0)$ . Dann gilt  $D(A_3) = D_+(A_3) = J_+(0)$ ,  $H_+(A_3) = \emptyset$ , und  $H_-(A_3) = C_+(0)$ .
- (4) Sei  $\dim(M) = 2$  und betrachte  $A_4 := \{0\} \times (-1, 1)$ .



Hier ist  $H_+(A_4) \not\subseteq J_+(A_4)$ .

**LEMMA 2.7.11.** Sei  $A \subset M$  achronal. Dann gilt:

- (1)  $H_{\pm}(A)$  ist abgeschlossen.
- (2)  $H_{\pm}(A)$  ist achronal.
- (3) Falls  $A$  abgeschlossen ist, so ist

$$\overline{D_{\pm}(A)} = \{p \in M \mid \text{jede vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve durch } p \text{ trifft } A\}.$$

- (4) Falls  $A$  abgeschlossen ist, so ist

$$\partial D_{\pm}(A) = A \cup H_{\pm}(A).$$

*Beweis.*

- (1)  $H_{\pm}(A) = \underbrace{\overline{D_{\pm}(A)}}_{\text{abgeschlossen}} \setminus \underbrace{I_{\mp}(D_{\pm}(A))}_{\text{offen}}$  ist abgeschlossen.

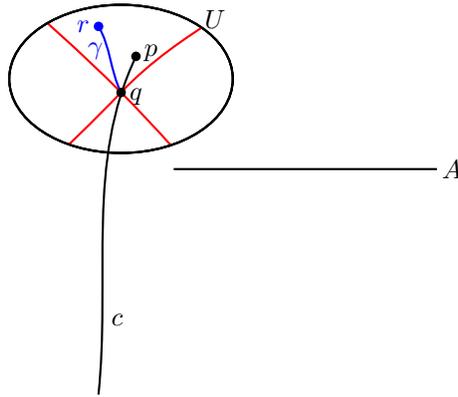
- (2) Da  $I_+(H_+(A))$  offen ist, und wegen  $I_+(H_+(A)) \cap D_+(A) = \emptyset$ , gilt  $I_+(H_+(A)) \cap \overline{D_+(A)} = \emptyset$ ,

also  $I_+(H_+(A)) \cap H_+(A) = \emptyset$ , d.h.  $H_+(A)$  ist achronal.

(3) Setze  $X := \{p \in M \mid \text{jede vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve durch } p \text{ trifft } A\}$ .

**Behauptung:**  $\overline{D_+}(A) \subset X$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, es gäbe  $p \in \overline{D_+}(A) \setminus X$ . Wegen  $p \notin X$ , existiert eine vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve  $c : [0, b) \rightarrow M$ , die in  $p$  startet und  $A$  nicht trifft. Insbesondere gilt  $p \notin A$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, existiert eine konvexe Umgebung  $U$  von  $p$  mit  $U \cap A = \emptyset$ .



Wähle  $q := c(\varepsilon) \in U$ , s.d.  $p \in I_+(q, U)$ . Da  $I_+(q, U)$  eine offene Umgebung von  $p$  ist, und wegen  $p \in \overline{D_+}(A)$ , existiert ein  $r \in I_+(q, U) \cap D_+(A)$ . Sei  $\gamma$  die vergangenheitsgerichtete zeitartige Geodätische von  $r$  nach  $q$ . Das Bild von  $\gamma$  ist in  $U$  enthalten, und  $U \cap A = \emptyset$ , deswegen trifft  $\gamma$  die Menge  $A$  nicht. Die Kurve  $\gamma \cup c|_{[0, \varepsilon)}$  ist aber eine vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve, die in  $r \in D_+(A)$  startet, daher muss sie  $A$  treffen, Widerspruch. ✓

**Behauptung:**  $X \subset \overline{D_+}(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Sei  $p \notin \overline{D_+}(A)$ . Wähle  $q \in I_-(p, M \setminus \overline{D_+}(A))$ . Wegen  $q \notin D_+(A)$  existiert eine vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve in  $M$ , die in  $p$  startet und  $A$  nicht trifft. Aus Lemma 2.5.11 folgt die Existenz einer vergangenheitsnichterweiterbaren zeitartigen Kurve in  $M$ , die in  $p$  startet und  $A$  nicht trifft. Somit ist  $p \notin X$ . ✓

(4)a) **Behauptung:**  $A \subset \partial D_+(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Wir wissen schon,  $A \subset D_+(A) \subset \overline{D_+}(A)$ . Wäre  $p \in A \cap \overset{\circ}{D_+}(A)$ , so wähle  $q \in \overset{\circ}{D_+}(A) \cap I_-(p)$ . Sei  $c$  eine vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve, die in  $q$  startet. Da  $q \in D_+(A)$ , muss  $c$  die Menge  $A$  in einem Punkt  $r$  treffen. Somit gilt  $r \ll p$  mit  $r, p \in A$ , im Widerspruch zu  $A$  achronal. ✓

b) **Behauptung:**  $H_+(A) \subset \partial D_+(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Nach Definition gilt  $H_+(A) \subset \overline{D_+}(A)$ . Gäbe es ein  $p \in H_+(A) \cap \overset{\circ}{D_+}(A)$ , so wäre  $I_+(p) \cap D_+(A)$  nicht leer, im Widerspruch zu  $p \in H_+(A)$ . ✓

c) **Behauptung:**  $\partial D_+(A) \subset A \cup H_+(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, es gäbe  $p \in \partial D_+(A) \setminus (A \cup H_+(A))$ . Wegen  $p \in \overline{D_+}(A) \setminus A$  gilt nach (3)  $p \in I_+(A)$ . Aber  $p \in \overline{D_+}(A) \setminus H_+(A)$ , so dass ein  $q \in I_+(p) \cap D_+(A)$  existiert. Die Teilmenge  $I_+(A) \cap I_-(q)$  ist eine offene Umgebung von  $p$ . Bleibt zu zeigen, dass  $I_+(A) \cap I_-(q) \subset D_+(A)$ , denn dann wäre  $p$  ein innerer Punkt von  $D_+(A)$  im Widerspruch zu  $p \in \partial D_+(A)$ .

Sei  $r \in I_+(A) \cap I_-(q)$ , sei  $c$  vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve, die in  $r$  startet. Sei  $\gamma$  eine vergangenheitsgerichtete zeitartige Kurve von  $q$  nach  $r$ . Wegen  $r \in I_+(A)$ , bleibt das Bild von  $\gamma$  in  $I_+(A)$ . Die Menge  $A$  ist aber achronal, d.h.  $A \cap I_+(A) = \emptyset$ , also kann  $\gamma$  die Menge  $A$  nicht treffen. Aus  $q \in D_+(A)$  folgt, dass  $\gamma \cup c$  die Menge  $A$  trifft, d.h.  $c$  trifft  $A$ , d.h.  $r \in D_+(A)$ .  $\checkmark \quad \square$

**PROPOSITION 2.7.12.** *Sei  $S \subset M$  eine abgeschlossene akausale topologische Hyperfläche. Dann gilt:*

- (1)  $H_+(S) = I_+(S) \cap \partial D_+(S) = \overline{D_+(S)} \setminus D_+(S)$ .
- (2)  $H_+(S) \cap S = \emptyset$ .
- (3)  $H_+(S)$  ist eine abgeschlossene achronale topologische Hyperfläche.
- (4) In jedem Punkt von  $H_+(S)$  startet eine vergangenheitsnichterweiterbare lichtartige Geodätische ohne konjugierte Punkte, die ganz in  $H_+(S)$  verläuft.

*Beweis.*

- (1) Wir wissen schon, dass  $H_+(S) \subset \overline{D_+(S)} \subset S \cup I_+(S)$  (die letzte Inklusion folgt aus Lemma 2.7.11 (3)). Gäbe es jetzt ein  $p \in H_+(S) \cap D_+(S)$ , dann träfe  $I_+(p)$  auch  $D(S)$  (denn  $D(S)$  ist offen nach Proposition 2.7.6). Wegen  $S$  achronal trifft  $I_+(p)$  die Menge  $D_-(S)$  nicht  $\implies I_+(p)$  trifft  $D_+(S)$  im Widerspruch zu  $p \in H_+(S)$   
 $\implies H_+(S) \cap D_+(S) = \emptyset$ , und wegen  $S \subset D_+(S)$  gilt  $H_+(S) \cap S = \emptyset$   
 $\implies H_+(S) \subset I_+(S)$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} I_+(S) \cap \partial D_+(S) &= (S \cup H_+(S)) \cap I_+(S) \quad (\text{nach Lemma 2.7.11 (4)}) \\ &= H_+(S) \cap I_+(S) \\ &= H_+(S). \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass  $H_+(S) \cap D_+(S) = \emptyset$ , also  $H_+(S) \subset \overline{D_+(S)} \setminus D_+(S)$ . Sei  $p \in \overline{D_+(S)} \setminus D_+(S)$ . Bleibt zu zeigen, dass  $p \in H_+(S)$ , d.h.  $I_+(p) \cap D_+(S) = \emptyset$ .

Sei  $q \in I_+(p)$ . Wähle vergangenheitsgerichtete zeitartige Kurve  $\gamma$  von  $q$  nach  $p$ . Da  $p \notin S \cup I_-(S)$ , trifft  $\gamma$  die Menge  $S$  nicht. Wegen  $p \notin D_+(S)$  existiert eine vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve  $c$ , die in  $p$  startet und  $S$  nicht trifft  
 $\implies \gamma \cup c$  startet in  $q$ , trifft  $S$  nicht, und ist vergangenheitsnichterweiterbar kausal  
 $\implies q \notin D_+(S)$ .  $\checkmark$

- (2)  $H_+(S) \cap S \stackrel{(1)}{=} \underbrace{S \cap I_+(S)}_{= \emptyset, \text{ da } S \text{ achronal}} \cap \partial D_+(S) = \emptyset$ .  $\checkmark$

(3) Setze  $B := D_+(S) \cup I_-(S)$ . Dies ist eine Vergangenheitsmenge (siehe Definition 2.5.7). Aus Korollar 2.5.8 folgt, dass  $\partial B$  eine topologische Hyperfläche ist. Andererseits gilt es nach (1) und wegen  $I_-(S) \cap I_+(S) = \emptyset$ :

$$H_+(S) = \partial D_+(S) \cap I_+(S) = \partial B \cap I_+(S),$$

somit ist  $H_+(S)$  eine offene Teilmenge der topologischen Hyperfläche  $\partial B$ , damit selbst eine. Dass  $H_+(S)$  achronal und abgeschlossen ist, folgt aus Lemma 2.7.11.  $\checkmark$

(4) Sei  $p \in H_+(S) \stackrel{(1)}{=} \overline{D_+(S)} \setminus D_+(S)$ . Wegen  $p \notin D_+(S)$  existiert es eine vergangenheitsnichterweiterbare kausale Kurve  $c$ , die in  $p$  startet und  $S$  nicht trifft. Aus Lemma 2.7.11 (3) folgt, dass eine solche Kurve nicht zeitartig sein kann, d.h.  $c$  kann nicht zu zeitartiger Kurve deformiert werden, die in  $p$  startet und  $S$  vermeidet. Nach Lemma 2.5.11 (2) ist  $c$  lichtartige (Prä-)Geodätische ohne konjugierte Punkte. Bleibt zu zeigen, dass  $c$  den Cauchy-Horizont  $H_+(S)$  nicht verlässt.

Träfe  $c$  die Cauchy-Entwicklung  $D_+(S)$ , so träfe sie auch  $S$ , Widerspruch. Gäbe es ein  $c(s) \notin \overline{D_+(S)}$ , so gäbe es eine vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve  $\gamma$ , die in  $c(s)$  startet und  $S$  nicht trifft. Lemma 2.5.11 (2) angewandt auf  $c|_{[0,s]} \cup \gamma$  liefert zeitartige Kurve, die in  $p$  startet und  $S$  nicht trifft, Widerspruch zu  $p \in \overline{D_+(S)}$ .  $\checkmark \quad \square$

**KOROLLAR 2.7.13.** Sei  $S \subset M$  nichtleere abgeschlossene akausale topologische Hyperfläche. Dann gilt:

(1)  $S$  ist Cauchy-Hyperfläche genau dann, wenn  $H(S) = \emptyset$ .

(2) Falls jede nichterweiterbare lichtartige Geodätische  $S$  trifft, so ist  $S$  Cauchy-Hyperfläche.

*Beweis.*

(1) Wir wissen schon aus Proposition 2.7.6, dass  $D(S)$  offen ist. Ferner gilt  $S = \overline{D_+}(S) \cap D_-(S)$ , denn wäre  $p \in (\overline{D_+}(S) \cap D_-(S)) \setminus S$ , dann müsste jede nichterweiterbare zeitartige Kurve durch  $p$  die Menge  $S$  in der Zukunft und in der Vergangenheit von  $p$  treffen, im Widerspruch zur Achronalität von  $S$ . Daher gilt

$$\begin{aligned}
 \partial D(S) &= \overline{D}(S) \setminus D(S) \\
 &= (\overline{D_+}(S) \cup \overline{D_-}(S)) \setminus D(S) \\
 &= (\overline{D_+}(S) \setminus D(S)) \cup (\overline{D_-}(S) \setminus D(S)) \\
 &= (\overline{D_+}(S) \setminus D_+(S)) \cup (\overline{D_-}(S) \setminus D_-(S)) \\
 &= H_+(S) \cup H_-(S) \quad \text{nach Proposition 2.7.12 (1)} \\
 &= H(S).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 H(S) = \emptyset &\Leftrightarrow \partial D(S) = \emptyset \\
 &\Leftrightarrow D(S) = M \quad (M \text{ ist zusammenhängend}) \\
 &\Leftrightarrow S \text{ ist Cauchy-Hyperfläche.}
 \end{aligned}$$

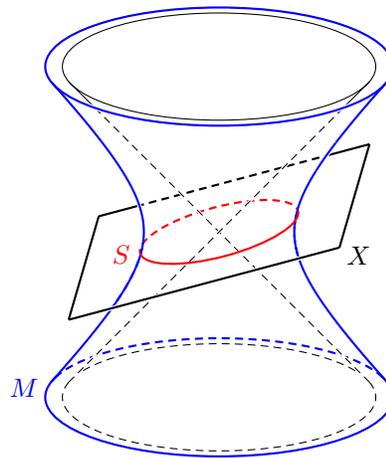
(2) Sei  $p \in H(S)$ , o.B.d.A.  $p \in H_+(S)$ . Zu zeigen ist, es gibt eine vergangenheitsnichterweiterbare lichtartige Geodätische, die  $S$  nicht trifft. Nach Proposition 2.7.12 (4) startet in  $p$  eine vergangenheitsnichterweiterbare lichtartige Geodätische  $c$ , die in  $H_+(S)$  verläuft. Aus Proposition 2.7.12 (2) gilt  $H_+(S) \cap S = \emptyset$ , also  $c$  trifft  $S$  nicht. ✓

Träfe die maximale Erweiterung von  $c$  zu Geodätischer in der Zukunft die Menge  $S$  in einem Punkt  $q$ , so wäre  $q \geq p$ . Wegen  $p \in H_+(S) \subset I_+(S)$  gilt dann  $q \in S \cap I_+(S)$ , Widerspruch zu  $S$  achronal. ✓ □

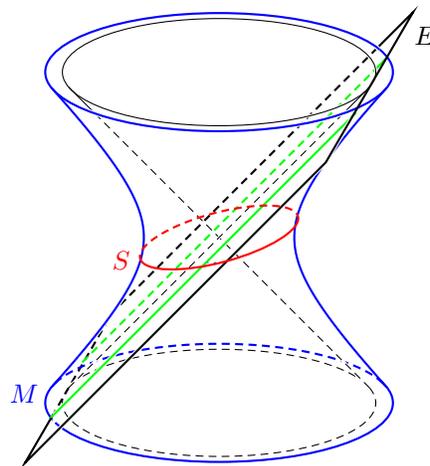
### Beispiele.

1) Sei  $M := S_1^n(r)$  der de-Sitter-Raum und  $S := M \cap X$ , wobei  $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine raumartige Hyperebene ist.

Die Teilmenge  $S$  ist eine akausale Hyperfläche in  $M$ .

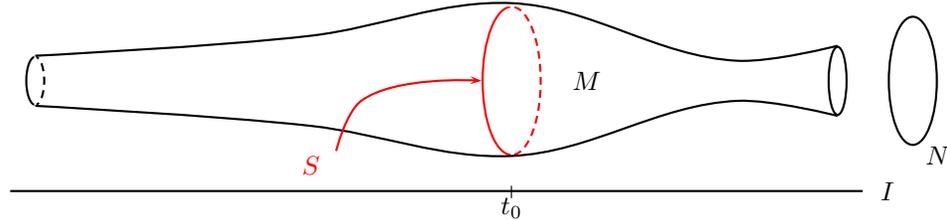


Andererseits, jede lichtartige Geodätische ist der Form  $M \cap E$ , wobei  $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eine entartete Ebene ist.



Die Schnittmenge  $X \cap E$  ist eine raumartige Gerade und trifft daher  $M$ . Somit ist  $S$  eine Cauchy-Hyperfläche. Insbesondere ist  $M$  global-hyperbolisch.

2) Sei  $(M := I \times N, g := -dt \otimes dt + f(t)^2 g_N)$  eine Robertson-Walker-Raumzeit, wobei  $(N, g_N)$  eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit ist und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine (glatte) Verzerrungsfunktion. Setze  $S := \{t_0\} \times N$ , mit  $t_0 \in I$  fest.



Für kausale Kurve  $c(s) = (t(s), \gamma(s))$  gilt

$$0 \geq g(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) = -(\dot{t}(s))^2 + f(t(s))^2 g_N(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)),$$

und somit  $|\dot{t}| \geq f \|\dot{\gamma}\|_N$ . Wäre  $\dot{t}(s) = 0$ , so auch  $\dot{\gamma}(s) = 0$  und damit  $\dot{c}(s) = 0$ , Widerspruch zu  $c$  kausal. Deswegen muss entweder  $\dot{t} > 0$  auf ganz  $I$  oder  $\dot{t} < 0$  auf ganz  $I$

$\implies t(s) = t_0$  für höchstens ein  $s$

$\implies S$  ist akausal.

Sei nun  $c = (t, \gamma) : (a, b) \rightarrow M$  eine nichterweiterbare lichartige Geodätische. O.B.d.A. sei  $\dot{t} > 0$ .

Wähle  $s_0 \in (a, b)$  und setze  $\delta := \max_j (f)$ , wobei

$$J := \begin{cases} [t_0, t(s_0)] & \text{falls } t_0 \leq t(s_0) \\ [t(s_0), t_0] & \text{falls } t_0 \geq t(s_0) \end{cases}$$

Nach Korollar 1.4.3 ist  $\dot{t}(f \circ t) = \eta > 0$  konstant, und somit  $\dot{t} = \frac{\eta}{f \circ t} \geq \frac{\eta}{\delta} > 0$  solange  $t \in J$

$\implies t$  erreicht  $t_0$  spätestens bei  $s = s_0 + \frac{\eta}{\delta}(t_0 - t(s_0))$ , insbesondere nach endlicher Zeit.

Die Kurve  $\gamma$  ist Prägeodätische in  $N$ . Die Gleichung kann wegen der Vollständigkeit von  $S$  auf kompaktem Intervall gelöst werden, solange  $t$  das Intervall  $I$  nicht verlässt.

Daraus folgt, dass  $S$  eine Cauchy-Hyperfläche ist, und dass  $M$  global-hyperbolisch ist.

## 2.8 Der Singularitätensatz von Hawking

**Erinnerung:** Ist  $M$  eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und  $S \subset M$  eine  $p$ -dimensionale semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, dann ist für  $x \in S$  der *mittlere Krümmungsvektor*  $H(x)$  definiert durch

$$H(x) := \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \varepsilon_j II(e_j, e_j),$$

wobei  $e_1, \dots, e_p$  eine verallgemeinerte orthonormale Basis von  $T_x S$  bilden und  $\varepsilon_j := g(e_j, e_j)$ .

**SATZ 2.8.1** (Singularitätensatz von Hawking). Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Es gelte

$$\text{ric}(X, X) \geq 0$$

für alle  $X \in TM$  zeitartig. Sei  $S \subset M$  eine raumartige Cauchy-Hyperfläche mit mittlerem Krümmungsvektorfeld  $H$ . Sei  $\nu$  das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld an  $S$ . Es gebe ein  $\beta > 0$ , s.d.

$$\langle H, \nu \rangle \geq \beta.$$

Dann hat jede zukunftsgerichtete zeitartige Kurve, die in  $S$  startet, Länge  $\leq \frac{1}{\beta}$ .

**Physikalische Interpretation:** Die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  modelliert die Raumzeit und die Cauchy-Hyperfläche  $S$  das gegenwärtige räumliche Universum.

Zur Bedingung  $\text{ric}(X, X) \geq 0$ : Die Einstein'sche Feldgleichung in Dimension 4 lautet

$$8\pi T = \text{ric} - \frac{1}{2}\text{scal}g,$$

wobei  $T$  der Energie-Impuls-Tensor ist. Insbesondere gilt  $8\pi \text{tr}_g(T) = \text{scal} - \frac{1}{2}\text{scal} \cdot 4 = -\text{scal}$ , somit kann die Feldgleichung in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$8\pi T = \text{ric} + 4\pi \text{tr}_g(T)g,$$

woraus folgt, für alle zeitartige Vektoren  $X$

$$\text{ric}(X, X) \geq 0 \Leftrightarrow T(X, X) \geq \frac{1}{2}\text{tr}_g(T)g(X, X).$$

Diese Ungleichung ist als *starke Energie-Bedingung* bekannt, wobei  $T(X, X)$  als Energiedichte interpretiert wird, die von einem Beobachter beobachtet wird, dessen Weltlinie Tangentenvektor  $X$  hat.

Zur Bedingung  $\langle H, \nu \rangle \geq \beta$ : Das räumliche Universum zieht sich mit Mindestrate  $\beta$  gegenwärtig zusammen.

*Schlussfolgerung:* Das Universum existiert höchstens noch die Zeit  $\frac{1}{\beta}$  (spätestens nach Zeit  $\frac{1}{\beta}$  tritt Endknallsingularität auf).

Für den Beweis des Satzes 2.8.1 brauchen wir die folgende Proposition:

**PROPOSITION 2.8.2** (1. und 2. Variation der Länge zeitartiger Kurven). Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine zeitartige Geodätische und sei  $c_s$  glatte Variation von  $c$  durch zeitartige Kurven mit Variationsfeld  $V = \frac{\partial c_s}{\partial s}|_{s=0}$  und Beschleunigungsfeld  $A = \frac{\nabla V}{\partial s}|_{s=0} = \frac{\partial c_s}{\partial s}$ . Dann gilt:

$$(1) \frac{d}{ds}L[c_s]|_{s=0} = \langle V(a), \frac{\dot{c}(a)}{|\dot{c}(a)|} \rangle - \langle V(b), \frac{\dot{c}(b)}{|\dot{c}(b)|} \rangle.$$

$$(2) \frac{d^2}{ds^2}L[c_s]|_{s=0} = \langle A(a), \frac{\dot{c}(a)}{|\dot{c}(a)|} \rangle - \langle A(b), \frac{\dot{c}(b)}{|\dot{c}(b)|} \rangle - \int_a^b \frac{1}{|\dot{c}|} \{ \langle R(V, \dot{c})V, \dot{c} \rangle + \langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt} \rangle + \langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle^2 \} dt.$$

*Beweis.* Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine zeitartige Geodätische und  $c_s$  eine glatte Variation von  $c$  mit Variationsfeld  $V$  und Beschleunigungsfeld  $A$ .

(1) Schreibe  $V_s := \frac{\partial c_s}{\partial s}$ . Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}L[c_s] &= \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{-\langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle} dt \\ &= \int_a^b \frac{-2\langle \frac{\nabla \dot{c}_s}{\partial s}, \dot{c}_s \rangle}{2\sqrt{-\langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle}} dt \\ &= - \int_a^b \langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial t}, \frac{\dot{c}_s}{|\dot{c}_s|} \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c_s}{\partial s}, \frac{\dot{c}_s}{|\dot{c}_s|} \rangle dt \\ &= - \int_a^b \langle \frac{\nabla V_s}{\partial t}, \frac{\dot{c}_s}{|\dot{c}_s|} \rangle dt \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L[c_s]|_{s=0} &= - \int_a^b \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \right\rangle dt \\ &= - \int_a^b \left\{ \underbrace{\frac{d}{dt} \langle V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle}_{=0} - \langle V, \frac{\nabla}{dt} \left( \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \right) \right\} dt \\ &= - \langle V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle \Big|_a^b, \end{aligned}$$

woraus die erste Aussage folgt.

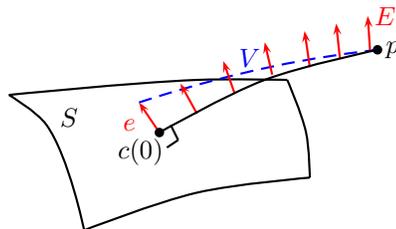
(2) Für die zweite Variation gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} L[c_s]|_{s=0} &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b \left\langle \frac{\nabla V_s}{\partial t}, \frac{\dot{c}_s}{|\dot{c}_s|} \right\rangle dt \\ &= - \int_a^b \left\{ \left\langle \frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\nabla V_s}{\partial t}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( \frac{\dot{c}_s}{|\dot{c}_s|} \right) \right\rangle \right\} dt \\ &= - \int_a^b \left\{ \langle R(V, \dot{c})V + \frac{\nabla}{\partial t} \underbrace{\frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} V_s}_{=A}, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{1}{|\dot{c}|^2} \left( |\dot{c}| \frac{\nabla}{\partial s} \Big|_{s=0} \dot{c}_s - \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (|\dot{c}_s| \dot{c}) \right) \right\rangle \right\} dt \\ &= - \int_a^b \left\{ \langle R(V, \dot{c})V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle + \frac{d}{dt} \langle A, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle - \langle A, \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \left( \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \right)}_{=0} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{1}{|\dot{c}|} \frac{\nabla V}{dt} + \frac{\langle \frac{\nabla V}{dt}, \dot{c} \rangle}{|\dot{c}|^3} \dot{c} \right\rangle \right\} dt \\ &= - \langle A, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\{ \langle R(V, \dot{c})V, \frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} \rangle + \frac{1}{|\dot{c}|} \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \frac{\nabla V}{dt} \right\rangle + \frac{1}{|\dot{c}|^3} \left\langle \frac{\nabla V}{dt}, \dot{c} \right\rangle^2 \right\} dt, \end{aligned}$$

woraus die zweite Aussage folgt.  $\square$

*Beweis des Satzes 2.8.1.* Sei  $\gamma$  eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve, die in  $S$  startet und in  $p$  endet. Der Punkt  $p$  liegt dann in  $I_+(S) = D_+(S) \setminus S$ . Nach Satz 2.7.9 existiert eine zeitartige Geodätische  $c : [0, b] \rightarrow M$  mit  $c(0) \in S$ ,  $\dot{c}(0) \perp S$ ,  $c(b) = p$  und  $L[c] = \tau(S, p)$ . O.B.d.A. sei  $c$  nach Eigenzeit parametrisiert, d.h.  $|\dot{c}| = 1$ . Zu zeigen ist,  $b = L[c] \leq \frac{1}{\beta}$ .

Sei  $e \in T_{c(0)}S$  ein Einheitsvektor.



Sei  $E$  das raumartige parallele Einheitsvektorfeld längs  $c$  mit  $E(0) = e$ . Sei  $c_s$  eine Variation von  $c$  mit Variationsfeld  $V(t) = (1 - \frac{t}{b})E(t)$ ,  $c_s(0) \in S$ , und  $c_s(b) = p$ . Da  $c$  längste Verbindung von  $S$  nach  $p$  ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{d^2}{ds^2} L[c_s]|_{s=0} &= \langle A(0), \dot{c}(0) \rangle - 0 \\ &\quad - \int_0^b \left\{ (1 - \frac{t}{b})^2 \langle R(E, \dot{c})E, \dot{c} \rangle + \langle -\frac{1}{b}E, -\frac{1}{b}E \rangle + \underbrace{\langle -\frac{1}{b}E, \dot{c} \rangle^2}_{=0} \right\} dt \\ &= \langle \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c_s}{\partial s}(0), \dot{c}(0) \rangle - \int_0^b \left\{ (1 - \frac{t}{b})^2 \langle R(E, \dot{c})E, \dot{c} \rangle + \frac{1}{b^2} \right\} dt \\ &= \langle II(V, V), \nu \rangle + \int_0^b (1 - \frac{t}{b})^2 \langle R(\dot{c}, E)E, \dot{c} \rangle dt - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

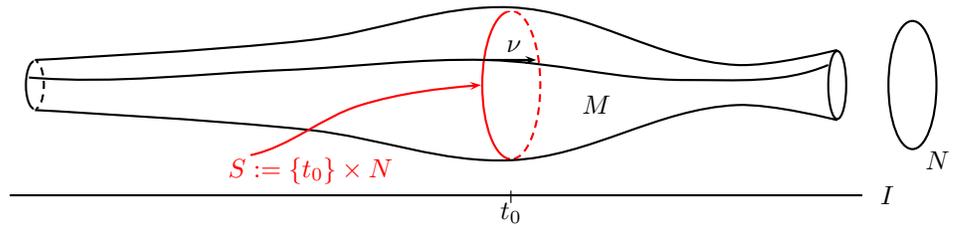
Für eine Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_{n-1}$  von  $T_{c(0)}S$  erhalten wir die entsprechenden  $E_1, \dots, E_{n-1}$ . Summation liefert

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle (n-1)H, \nu \rangle + \int_0^b (1 - \frac{t}{b})^2 \underbrace{\text{ric}(\dot{c}, \dot{c})}_{\geq 0} dt - \frac{n-1}{b} \\ &\geq (n-1)\beta + 0 - \frac{n-1}{b}, \end{aligned}$$

und somit  $b \leq \frac{1}{\beta}$ . □

### Beispiele.

1) Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale Robertson-Walker-Raumzeit.

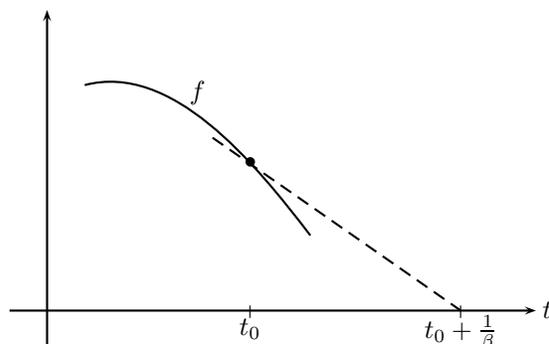


Wir haben schon bewiesen, dass  $\text{ric}(\nu, \nu) = -n \frac{f''}{f}$ , wobei  $\nu := \frac{\partial}{\partial t}$ . Im Beweis des Hawking'schen Singularitätensatzes wird die Voraussetzung  $\text{ric}(X, X) \geq 0$  nur für  $X := \dot{c}(t)$  benutzt, wobei  $c$  Geodätische sind, die in  $S$  und senkrecht zu  $S$  starten. Im Beispiel ist dies gerade  $X = \nu$ . Jetzt ist die Bedingung  $\text{ric}(\nu, \nu) \geq 0$  äquivalent dazu, dass  $f'' \leq 0$ , d.h. dass  $f$  konkav ist.

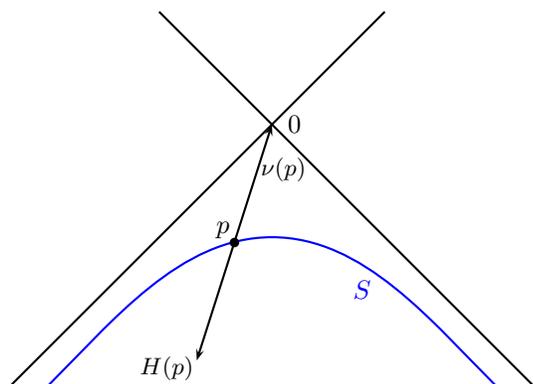
Die Weingarten-Abbildung von  $S$  in  $M$  bezüglich  $\nu$  ist gegeben durch

$$W = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \text{id},$$

somit ist  $H = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \nu$  und  $\langle H, \nu \rangle \geq \beta$  genau dann, wenn  $\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \leq -\beta$ .



2) Sei  $M$  der  $n$ -dimensionale Minkowski-Raum. Es gilt  $\text{ric} = 0$ . Betrachte  $S := -H^{n-1}(r)$  wobei  $H^{n-1}(r) := \{x \in M \mid \langle x, x \rangle = -r^2 \text{ und } x^0 > 0\}$ . Dann gilt im Punkt  $p \in S$ :  $H(p) = \frac{1}{r^2}p$  und  $\nu(p) := -\frac{1}{r}p$ , somit  $\langle H(p), \nu(p) \rangle = -\frac{1}{r^3} \underbrace{\langle p, p \rangle}_{=-r^2} = \frac{1}{r} =: \beta$ .



Aber: die maximalen zeitartigen Geodätischen, die in  $S$  starten, haben *unendliche* Länge!

*Grund:*  $S$  ist nicht Cauchy-Hyperfläche im Minkowski-Raum.  $S$  ist jedoch Cauchy-Hyperfläche in  $D(S) = I_-(0)$ , wo maximale zeitartige Geodätische, die in  $S$  starten, in der Tat Länge  $r = \frac{1}{\beta}$  haben. In diesem Beispiel ist die Abschätzung aus dem Hawking'schen Singularitätensatz somit scharf.

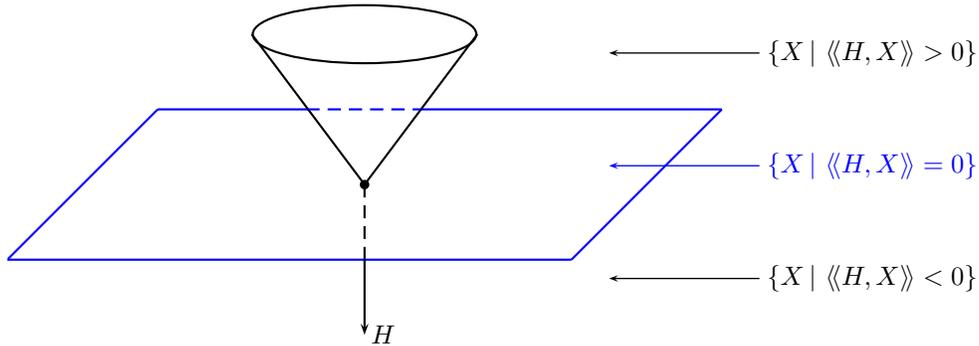
## 2.9 Der Singularitätensatz von Penrose

**LEMMA 2.9.1.** Sei  $H \in \mathbb{R}^n$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  der Minkowski-Skalarprodukt. Dann sind äquivalent:

- (1)  $\langle \langle H, X \rangle \rangle > 0$  für alle  $X \in \mathbb{R}^n$  zukunftsgerichtet lichtartig.
- (2)  $\langle \langle H, X \rangle \rangle > 0$  für alle  $X \in \mathbb{R}^n$  zukunftsgerichtet kausal.
- (3)  $H$  ist vergangenheitsgerichtet zeitartig.

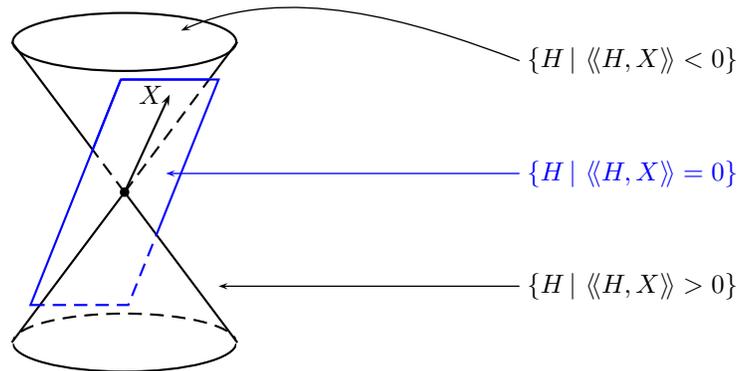
*Beweis.*

“(3) $\implies$ (2)”: Nach Anwendung einer zeitorientierungserhaltenden Lorentz-Transformation ist o.B.d.A.  $H = -ce_0$  mit  $c > 0$ .



“(2) $\implies$ (1)”: trivial.

“(1) $\implies$ (3)”:



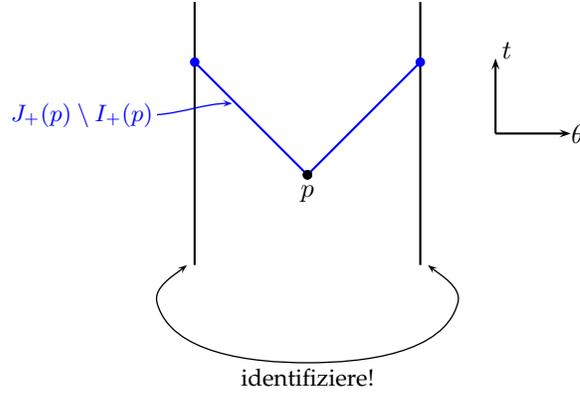
$$\implies \bigcap_{X \in C_+(0) \setminus \{0\}} \{H \mid \langle\langle H, X \rangle\rangle > 0\} = I_-(0). \quad \square$$

**Definition 2.9.2.** Eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit heißt zukunftszeitvollständig, falls für alle zukunftsgerichteten zeitartigen Vektoren  $X \in TM$  die Geodätische  $t \mapsto \exp(tX)$  auf ganz  $[0, \infty)$  definiert ist. Analog definiert man vergangenheitszeitvollständige, zukunftslichtvollständige bzw. vergangenheitslichtvollständige Lorentz-Mannigfaltigkeiten.

**Beispiel.** Sei  $M := D(-H^{n-1}) = I_-(0) \subset$  Minkowski-Raum. Die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  ist nicht zukunftszeitvollständig, nicht zukunftslichtvollständig, wohl aber vergangenheitszeitvollständig und vergangenheitslichtvollständig.

**Definition 2.9.3.** Eine abgeschlossene achronale Teilmenge  $A \subset M$  heißt zukunftsgefangen bzw. vergangenheitsgefangen falls  $J_+(A) \setminus I_+(A)$  bzw.  $J_-(A) \setminus I_-(A)$  kompakt ist.

**Beispiel.** Sei  $(M, g) := (\mathbb{R} \times S^1, -dt^2 + d\theta^2)$  und  $A := \{p\}$ . Die Teilmenge  $A$  ist zukunfts- und vergangenheitsgefangen.

**Bemerkungen.**

1) Ist  $A \subset M$  zukunftsgefangen, so ist  $A \subset J_+(A)$ . Aber  $A \cap I_+(A) = \emptyset$  ( $A$  ist achronal), so dass

$$\underbrace{A}_{\text{abgeschl.}} \subset \underbrace{J_+(A) \setminus I_+(A)}_{\text{kompakt}}$$

$\implies A$  ist kompakt.

2) Ist  $A \subset M$  beliebig, so ist  $J_+(A) \setminus I_+(A)$  achronal. Denn: ist  $p \in I_+(J_+(A) \setminus I_+(A)) \subset I_+(J_+(A)) = I_+(A)$ , so ist  $p \notin J_+(A) \setminus I_+(A)$ . Also ist  $I_+(J_+(A) \setminus I_+(A)) \cap (J_+(A) \setminus I_+(A)) = \emptyset$ .

**LEMMA 2.9.4.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ , sei  $\ell \in T_p M$  lichtartig und seien  $e_1, \dots, e_{n-2} \in T_p M$  raumartig und orthonormal mit  $e_j \perp \ell$  für alle  $j$ .

Dann ist

$$\text{ric}(\ell, \ell) = \sum_{j=1}^{n-2} \langle R(\ell, e_j)e_j, \ell \rangle.$$

*Beweis.* Wir ergänzen  $e_1, \dots, e_{n-2}$  durch  $e_{n-1}, e_n$  zu einer verallgemeinerten Orthonormalbasis von  $T_p M$  und zwar so, dass  $e_{n-1}$  raumartig ist,  $e_n$  zeitartig, und  $e_{n-1} + e_n$  ein Vielfaches von  $\ell$ . Nach Definition ist

$$\text{ric}(\ell, \ell) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle R(\ell, e_j)e_j, \ell \rangle - \langle R(\ell, e_n)e_n, \ell \rangle.$$

Es ist also

$$\langle R(\ell, e_{n-1})e_{n-1}, \ell \rangle - \langle R(\ell, e_n)e_n, \ell \rangle = 0 \quad (2.1)$$

zu zeigen. Da  $e_{n-1} + e_n$  ein Vielfaches von  $\ell$  ist, gilt

$$\langle R(\ell, e_{n-1} + e_n)e_{n-1}, \ell \rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\langle R(\ell, e_{n-1} + e_n)e_n, \ell \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Subtrahieren wir (2.3) von (2.2), so erhalten wir (2.1).  $\square$

**PROPOSITION 2.9.5.** Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $P \subset M$  eine raumartige Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 mit mittlerem Krümmungsvektorfeld  $H$ . Sei  $c : [0, b] \rightarrow M$  eine lichtartige

Geodätische, die in  $p$  startet mit  $\dot{c}(0) \in N_pP$ . Es gelte:

(1)  $\text{ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \geq 0$  für alle  $t \in [0, b]$

(2)  $\langle H(p), \dot{c}(0) \rangle \geq \frac{1}{b}$ .

Dann hat  $c$  eine Brennstelle in  $(0, b]$ .

*Beweis.* Wir nehmen an,  $c$  habe keine Brennstelle in  $(0, b]$ , und führen dies zum Widerspruch.

a) Sei  $e_1, \dots, e_{n-2}$  eine Orthonormalbasis von  $T_pP$ . Wir betrachten die Jacobifelder  $\mathcal{J}_i$  längs  $c$  mit den Anfangsbedingungen  $\mathcal{J}_i(0) = e_i$  und  $\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i(0) = \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0))$ . Ferner betrachten wir  $\mathcal{J}_0(t) := t \cdot \dot{c}(t)$ , d. h. das Jacobifeld mit den Anfangsbedingungen  $\mathcal{J}_0(0) = 0$  und  $\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_0(0) = \dot{c}(0)$ .

b) Wir zeigen, dass  $\mathcal{J}_0(t), \dots, \mathcal{J}_{n-2}(t)$  für jedes  $t \in (0, b]$  eine Basis von  $\dot{c}(t)^\perp$  bildet.

Da  $c$  lichtartig ist, ist  $\mathcal{J}_0(t) \in \dot{c}(t)^\perp$  für alle  $t$ . Für  $i \geq 1$  gilt wegen  $\frac{d^2}{dt^2}\langle \mathcal{J}_i, \dot{c} \rangle = \langle \frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J}_i, \dot{c} \rangle = \langle R(\dot{c}, \mathcal{J}_i)\dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathcal{J}_i, \dot{c} \rangle|_{t=0} = \langle e_i, \dot{c}(0) \rangle = 0$  sowie  $\frac{d}{dt}\langle \mathcal{J}_i, \dot{c} \rangle|_{t=0} = \langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i(0), \dot{c}(0) \rangle = \langle \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0)), \dot{c}(0) \rangle = 0$  die Gleichung  $\langle \mathcal{J}_i(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$  für alle  $t$ , d. h.  $\mathcal{J}_i(t) \in \dot{c}(t)^\perp$ .

Bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{J}_0(t), \dots, \mathcal{J}_{n-2}(t)$  linear unabhängig sind. Angenommen, sie wären für ein  $t \in (0, b]$  linear abhängig. Dann gäbe es  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2} \in \mathbb{R}$ , nicht alle gleich 0, so dass

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \cdot \mathcal{J}_i(t) = 0.$$

Nun gelten für das nichttriviale Jacobifeld  $\mathcal{J} := \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \cdot \mathcal{J}_i$  die Bedingungen  $\mathcal{J}(0) = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_i \in T_pP$ ,  $\tan(\frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}(0)) = \tan(\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0)) + \alpha_0 \dot{c}(0)) = \tan(\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0))) = \tan(\widetilde{II}(\mathcal{J}(0), \dot{c}(0)))$  sowie  $\mathcal{J}(t) = 0$ . Also ist  $t$  eine Brennstelle im Widerspruch zur Annahme.

c) Wir zeigen, dass  $\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i(t), \mathcal{J}_j(t) \rangle = \langle \mathcal{J}_i(t), \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j(t) \rangle$  für alle  $i, j$  und  $t$ .

Wegen der Symmetrien des Krümmungstensors ist  $\frac{d}{dt}(\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j \rangle - \langle \mathcal{J}_i, \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j \rangle) = \langle \frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J}_i(t), \mathcal{J}_j(t) \rangle - \langle \mathcal{J}_i(t), \frac{\nabla^2}{dt^2}\mathcal{J}_j(t) \rangle = \langle R(\dot{c}, \mathcal{J}_i(t))\dot{c}, \mathcal{J}_j(t) \rangle - \langle \mathcal{J}_i(t), R(\dot{c}, \mathcal{J}_j(t))\dot{c} \rangle = 0$  und somit  $\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j \rangle - \langle \mathcal{J}_i, \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j \rangle$  konstant. Für  $i, j \geq 1$  ist  $\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i(0), \mathcal{J}_j(0) \rangle - \langle \mathcal{J}_i(0), \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j(0) \rangle = \langle \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0)), e_j \rangle - \langle e_i, \widetilde{II}(e_j, \dot{c}(0)) \rangle = -\langle II(e_i, e_j), \dot{c}(0) \rangle + \langle II(e_j, e_i), \dot{c}(0) \rangle = 0$  wegen der Symmetrie von  $II$ . Ferner ist  $\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_0(0), \mathcal{J}_j(0) \rangle - \langle \mathcal{J}_0(0), \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j(0) \rangle = \langle \dot{c}(0), e_j \rangle - \langle 0, \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j(0) \rangle = 0$ . In jedem Fall ist also  $\langle \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j \rangle - \langle \mathcal{J}_i, \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_j \rangle \equiv 0$ .

d) Sei  $V$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$  mit  $V(t) \perp \dot{c}(t)$  für alle  $t$  und  $V(0) \in T_pP$  sowie  $V(b) = 0$ . Wir zeigen

$$\int_0^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt}V, \frac{\nabla}{dt}V \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V)V, \dot{c} \rangle \right) dt - \langle \dot{c}(0), II(V(0), V(0)) \rangle \geq 0 \quad (2.4)$$

und „ $= 0$ “ gilt genau dann, wenn  $V$  tangential an  $c$  ist.

Nach b) gibt es eindeutige glatte Funktionen  $f_i : (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $V(t) = \sum_{i=0}^{n-2} f_i(t) \mathcal{J}_i(t)$  für alle  $t \in (0, b]$ . Wir definieren die Vektorfelder  $X := \sum_{i=0}^{n-2} \dot{f}_i \mathcal{J}_i$  und  $Y := \sum_{i=0}^{n-2} f_i \frac{\nabla}{dt}\mathcal{J}_i$ . Dann gilt

$\frac{\nabla}{dt}V = X + Y$  und daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle V, Y \rangle &= \left\langle \frac{\nabla}{dt}V, Y \right\rangle + \left\langle V, \frac{\nabla}{dt}Y \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \left\langle V, \frac{\nabla}{dt}Y \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \left\langle V, \sum_{i=0}^{n-2} f_i \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i \right\rangle + \left\langle V, \sum_{i=0}^{n-2} f_i \frac{\nabla^2}{dt^2} \mathcal{J}_i \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \sum_{i,j=0}^{n-2} \left\langle f_j \mathcal{J}_j, f_i \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i \right\rangle + \left\langle V, \sum_{i=0}^{n-2} f_i R(\dot{c}, \mathcal{J}_i) \dot{c} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \sum_{i,j=0}^{n-2} f_j f_i \left\langle \mathcal{J}_j, \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i \right\rangle + \langle V, R(\dot{c}, V) \dot{c} \rangle \\
&\stackrel{c)}{=} \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle + \sum_{i,j=0}^{n-2} f_j f_i \left\langle \mathcal{J}_i, \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_j \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle \\
&= 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle \\
&= \langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle \\
&= \left\langle \frac{\nabla}{dt}V, \frac{\nabla}{dt}V \right\rangle - \langle X, X \rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle.
\end{aligned}$$

Integration liefert für kleines  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^b \langle X, X \rangle dt &= \int_{\varepsilon}^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt}V, \frac{\nabla}{dt}V \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle - \frac{d}{dt}\langle V, Y \rangle \right) dt \\
&= \int_{\varepsilon}^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt}V, \frac{\nabla}{dt}V \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V) V, \dot{c} \rangle \right) dt + \langle V(\varepsilon), Y(\varepsilon) \rangle.
\end{aligned}$$

Neben  $\mathcal{J}_0(t), \dots, \mathcal{J}_{n-2}(t)$  ist auch  $\frac{1}{t}\mathcal{J}_0(t) = \dot{c}(t), \mathcal{J}_1(t), \dots, \mathcal{J}_{n-2}(t)$  eine Basis von  $\dot{c}(t)^\perp$ , die den Vorteil hat, dass sie auch für  $t = 0$  eine Basis von  $\dot{c}(0)^\perp$  bildet. Also setzen sich  $tf_0(t), f_1(t), \dots, f_{n-2}(t)$  stetig nach  $t = 0$  fort. Wegen  $V(0) \in T_p P$  ist ferner  $V(0) = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(0) \mathcal{J}_i(0) = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(0) e_i$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle V(\varepsilon), Y(\varepsilon) \rangle &= \left\langle V(\varepsilon), f_0(\varepsilon) \dot{c}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(\varepsilon) \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i(\varepsilon) \right\rangle \\
&= \left\langle V(\varepsilon), \sum_{i=1}^{n-2} f_i(\varepsilon) \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i(\varepsilon) \right\rangle \\
&\xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \left\langle V(0), \sum_{i=1}^{n-2} f_i(0) \frac{\nabla}{dt} \mathcal{J}_i(0) \right\rangle \\
&= \left\langle V(0), \sum_{i=1}^{n-2} f_i(0) \widetilde{II}(e_i, \dot{c}(0)) \right\rangle \\
&= \left\langle V(0), \widetilde{II}(V(0), \dot{c}(0)) \right\rangle \\
&= -\langle II(V(0), V(0)), \dot{c}(0) \rangle.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_0^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt} V, \frac{\nabla}{dt} V \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V)V, \dot{c} \rangle \right) dt - \langle \dot{c}(0), II(V(0), V(0)) \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^b \langle X, X \rangle dt$$

gezeigt. Da  $X(t)$  Linearkombination der  $\mathcal{J}_i(t)$  ist, steht  $X(t)$  auf dem lichtartigen Vektor  $\dot{c}(t)$  senkrecht, kann also nicht zeitartig sein. Somit ist  $\langle X(t), X(t) \rangle \geq 0$  für alle  $t \in (0, b]$  und die Ungleichung (2.4) ist bewiesen.

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\langle X(t), X(t) \rangle \equiv 0$ , d. h. wenn  $X(t)$  für alle  $t$  lichtartig ist, d. h. wenn  $\dot{f}_1 = \dots = \dot{f}_{n-2} = 0$  ist. Wegen  $f_i(b) = 0$  ist dies äquivalent zu  $f_1 = \dots = f_{n-2} = 0$ , d. h. zu  $V(t) = f_0(t)\mathcal{J}_0 = f_0(t)t\dot{c}(t)$ , d. h. dazu, dass  $V$  tangential an  $c$  ist.

e) Für einen Einheitsvektor  $e \in T_p P$  betrachten wir  $V(t) := (1 - t/b)E(t)$ , wobei  $E$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  ist mit  $E(0) = e$ . Dann erfüllt  $V$  die Bedingungen aus d) und ist nicht tangential an  $c$ . Also gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^b \left( \left\langle \frac{\nabla}{dt} V, \frac{\nabla}{dt} V \right\rangle - \langle R(\dot{c}, V)V, \dot{c} \rangle \right) dt - \langle \dot{c}(0), II(V(0), V(0)) \rangle \\ &= \int_0^b \left( \left\langle \frac{-1}{b} E, \frac{-1}{b} E \right\rangle - (1 - t/b)^2 \langle R(\dot{c}, E)E, \dot{c} \rangle \right) dt - \langle \dot{c}(0), II(e, e) \rangle \\ &= \int_0^b \left( \frac{1}{b^2} - (1 - t/b)^2 \langle R(\dot{c}, E)E, \dot{c} \rangle \right) dt - \langle \dot{c}(0), II(e, e) \rangle \\ &= \frac{1}{b} - \int_0^b (1 - t/b)^2 \langle R(\dot{c}, E)E, \dot{c} \rangle dt - \langle \dot{c}(0), II(e, e) \rangle \end{aligned}$$

Nehmen wir  $e = e_i$  und summieren wir über  $i$ , so erhalten wir unter Benutzung von Lemma 2.9.4

$$0 < \frac{n-2}{b} - \int_0^b (1 - t/b)^2 \underbrace{\text{ric}(\dot{c}, \dot{c})}_{\geq 0} dt - (n-2) \underbrace{\langle \dot{c}(0), H(p) \rangle}_{\geq \frac{1}{b}} \leq 0,$$

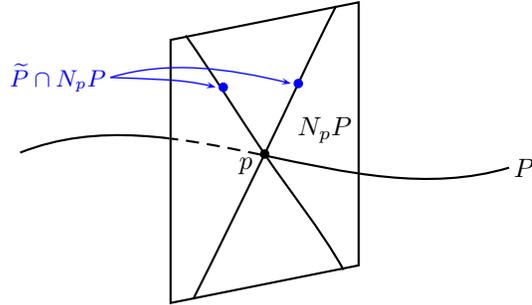
Widerspruch! □

**PROPOSITION 2.9.6.** *Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte zukunftslichtvollständige Lorentz-Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric}(X, X) \geq 0$  für alle lichtartigen Vektoren  $X \in TM$ . Sei  $P \subset M$  eine kompakte achronale raumartige Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2. Dann gilt: Ist das mittlere Krümmungsvektorfeld  $H$  von  $P$  vergangenheitsgerichtet zeitartig, so ist  $P$  zukunftsgefangen.*

*Beweis.*

a) Bezüglich einer beliebig gewählten riemannschen Metrik  $h$  auf  $M$  definiere

$$\tilde{P} := \{X \in NP \mid X \text{ zukunftsgerichtet lichtartig und } h(X, X) = 1\}.$$



Die Fußpunktabbildung  $\pi : NP \rightarrow P$  macht  $\tilde{P}$  zu einer zweifachen Überlagerung von  $P$ . Insbesondere ist  $\tilde{P}$  kompakt.

b) Zu  $X \in \tilde{P}$  ist nach Lemma 2.9.1  $\langle H(\pi(X)), X \rangle > 0$ . Wegen  $\tilde{P}$  kompakt existiert ein  $b > 0$  so, dass  $\langle H(\pi(X)), X \rangle > \frac{1}{b}$  für alle  $X \in \tilde{P}$ . Da  $M$  zukunftslichtvollständig ist, ist  $t \mapsto c_X(t) := \exp(tX)$  auf  $[0, \infty)$  definiert, insbesondere auf  $[0, b]$ . Aus der Proposition 2.9.5 folgt, dass  $c_X$  eine Brennstelle in  $(0, b]$  hat.

c) Sei nun  $q \in J_+(P) \setminus I_+(P)$ . Dann existiert nach Satz 2.2.12 eine zukunftsgerichtete lichtartige Geodätische  $c$  von  $P$  nach  $q$  ohne Brennpunkt vor  $q$ , mit  $\dot{c}(0) \in NP$

$\implies c = c_X$  für ein  $X \in \tilde{P}$

$\implies q = c_X(t)$  mit  $t \in [0, b]$ .

Daraus folgt, dass  $J_+(P) \setminus I_+(P) \subset \exp(K)$ , wobei  $K := \{tX \mid 0 \leq t \leq b, X \in \tilde{P}\}$ . Wegen  $K$  kompakt ist  $\exp(K)$  ebenfalls kompakt.

d) Sei  $(q_n)_n$  eine Folge in  $J_+(P) \setminus I_+(P)$ . Nach Übergang zu Teilfolge können wir annehmen, dass  $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q_\infty \in \exp(K) \subset J_+(P)$ . Wäre  $q_\infty \in I_+(P)$ , so wäre  $q_n \in I_+(P)$  für  $n \gg 0$  da  $I_+(P)$  offen ist, Widerspruch. Also  $q_\infty \in J_+(P) \setminus I_+(P)$ , und somit ist  $J_+(P) \setminus I_+(P)$  kompakt.  $\square$

**LEMMA 2.9.7.** Sei  $M$  eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei  $K \subset M$  kompakt. Dann sind  $J_\pm(K)$  abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $(p_i)_i$  eine Folge aus  $J_+(K)$  mit  $p_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p \in M$ . Zu zeigen ist,  $p \in J_+(K)$ . Wähle Folge  $(q_i)_i$  aus  $K$  mit  $q_i \leq p_i$ . Nach Übergang zu Teilfolge konvergiert  $(q_i)_i$  gegen ein  $q \in K$ . Aus Proposition 2.6.6 folgt dann  $q \leq p$ , d.h.  $p \in J_+(q) \subset J_+(K)$ . Der Beweis für  $J_-(K)$  geht analog.  $\square$

**SATZ 2.9.8** (Singularitätensatz von Penrose). Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric}(X, X) \geq 0$  für alle  $X \in TM$  lichtartig. Die Mannigfaltigkeit  $M$  besitze eine nicht kompakte Cauchy-Hyperfläche  $S \subset M$  und eine nichtleere kompakte raumartige achronale Untermannigfaltigkeit  $P \subset M$  der Kodimension 2 mit vergangenheitsgerichtetem zeitartigem mittlerem Krümmungsvektorfeld.

Dann ist  $M$  nicht zukunftslichtvollständig.

*Beweis.* Angenommen,  $M$  ist zukunftslichtvollständig.

a) Da  $M$  eine Cauchy-Hyperfläche besitzt, ist  $M$  nach Korollar 2.7.4 global-hyperbolisch. Wegen

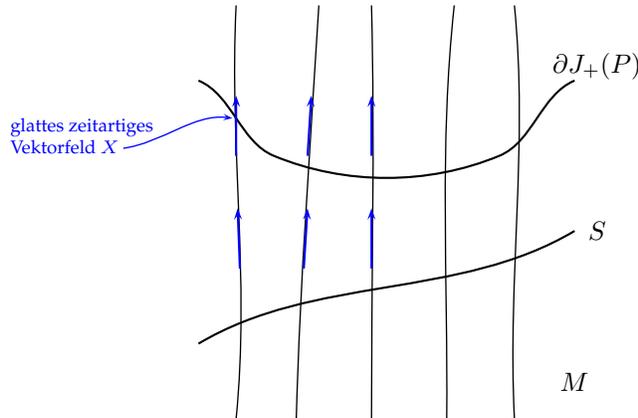
$P$  kompakt ist  $J_+(P)$  nach Lemma 2.9.7 abgeschlossen., und somit

$$J_+(P) \setminus I_+(P) = \overline{J_+(P)} \setminus \overset{\circ}{J_+(P)} = \partial J_+(P).$$

Da  $J_+(P)$  eine Zukunftsmenge ist, ist  $\partial J_+(P)$  nach Korollar 2.5.8 eine abgeschlossene topologische Hyperfläche. Gemäß Proposition 2.9.6 ist  $\partial J_+(P)$  kompakt. Also ist  $\partial J_+(P)$  achronale kompakte topologische Hyperfläche von  $M$ .

b) Wäre  $\partial J_+(P)$  leer, so wäre  $J_+(P) = I_+(P)$  offen und abgeschlossen, und auch nicht leer (da  $\emptyset \neq P \subset J_+(P)$ ), und da  $M$  zusammenhängend ist, wäre  $M = I_+(P)$ , im Widerspruch zu  $P$  achronal.

c) Sei  $\rho : \partial J_+(P) \rightarrow S$  die durch den Fluss eines glatten zeitorientierten Vektorfeldes gegebene Abbildung wie in Satz 2.5.13.



Da  $S$  eine Cauchy-Hyperfläche ist, ist  $\rho$  wohldefiniert. Außerdem, wegen  $\partial J_+(P)$  achronal, ist  $\rho$  injektiv, und somit stetige injektive Abbildung zwischen zwei topologischen Mannigfaltigkeiten derselben Dimension. Nach einem Satz von Brouwer (siehe [Vick]) ist  $\rho(\partial J_+(P))$  offen. Die Teilmenge  $\partial J_+(P)$  ist aber kompakt, somit auch  $\rho(\partial J_+(P))$ . Wegen  $M$  zusammenhängend, ist  $S$  ebenfalls zusammenhängend, und somit gilt  $\rho(\partial J_+(P)) = S$ , im Widerspruch zu  $S$  nicht kompakt.  $\square$

### Beispiele.

1) Äußeres Schwarzschild-Modell:

Fixiere  $m > 0$  und betrachte  $(M, g) := (\mathbb{R} \times (2m, \infty) \times S^2, -h(r)dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)}dr \otimes dr + r^2g_{S^2})$ , wobei  $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$  und  $g_{S^2}$  die Standardmetrik auf  $S^2$  ist.

Man berechnet  $\text{ric} = 0$ .

Setze jetzt  $S := \{0\} \times (2m, \infty) \times S^2 \subset M$ . Dann ist  $S$  abgeschlossene raumartige Hyperfläche mit Einheitsnormalenfeld  $\frac{1}{\sqrt{h(r)}} \frac{\partial}{\partial t}$ . Die Hyperfläche  $S$  ist nicht kompakt und totalgeodätisch, da

Fixpunktmenge der Isometrie  $(t, r, \gamma) \mapsto (-t, r, \gamma)$ .

Ist  $c(s) = (t(s), r(s), \gamma(s))$  kausale Kurve in  $M$ , so gilt

$$0 \geq g(\dot{c}, \dot{c}) = -h(r)(\dot{t})^2 + \frac{1}{h(r)}(\dot{r})^2 + r^2 \|\dot{\gamma}\|_{S^2}^2,$$

woraus folgt  $(\dot{t})^2 \geq (\frac{\dot{r}}{h(r)})^2 + \frac{r^2}{h(r)} \|\dot{\gamma}\|_{S^2}^2$ . Wäre  $\dot{t}(s_0) = 0$ , so auch  $\dot{r}(s_0) = 0$  und  $\dot{\gamma}(s_0) = 0$ , also  $\dot{c}(s_0) = 0$ , im Widerspruch zu  $c$  kausal

$\implies \dot{t}(s) > 0$  für alle  $s$  oder  $\dot{t}(s) < 0$  für alle  $s$

$\implies c$  trifft  $S$  höchstens einmal

$\implies S$  ist akausal.

Sei nun  $c(s) = (t(s), r(s), \gamma(s))$  eine zukunftslichtartige Geodätische  $c : (a, b) \rightarrow M$ . Man kann sich überlegen: Solange  $r$  in einem kompakten Bereich  $[r_0, r_1] \subset (2m, \infty)$  bleibt, kann man die Geodätengleichung weiterlösen, d.h. der Fall  $a > -\infty$  oder  $b < \infty$  tritt nur auf, wenn für  $s \rightarrow a$  oder  $s \rightarrow b$  gilt  $r(s) \rightarrow 2m$  oder  $r(s) \rightarrow \infty$ .

Aus  $(\dot{t})^2 \geq (\frac{\dot{r}}{h(r)})^2$  folgt (o.B.d.A.  $\dot{r} \geq 0$ )

$$\begin{aligned} t(s_1) - t(s_0) &= \int_{s_0}^{s_1} \dot{t}(s) ds \geq \int_{s_0}^{s_1} \frac{\dot{r}(s)}{h(r(s))} ds \\ &\geq \int_{r(s_0)}^{r(s_1)} \frac{dr}{h(r)} \\ &\geq [r + 2m \log(r - 2m)]_{r(s_0)}^{r(s_1)}. \end{aligned}$$

Es gilt:  $r + 2m \log(r - 2m) \xrightarrow{r(s_1) \rightarrow \infty} \infty$  und  $r + 2m \log(r - 2m) \xrightarrow{r(s_0) \rightarrow 2m} -\infty$ . Verbleibt  $r$  im

Kompaktum  $[r_0, r_1]$  und damit  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ , so folgt aus  $\frac{d}{dt} g(\dot{c}, \frac{\partial}{\partial t}) = g(\dot{c}, \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial t}) = 0$  ( $\frac{\partial}{\partial t}$  ist Killingfeld), dass  $-E := g(\dot{c}, \frac{\partial}{\partial t}) = -h(r)\dot{t}$  konstant ist

$\implies \dot{t} = \frac{E}{h(r)} \geq \min_{r \in [r_0, r_1]} \frac{E}{h(r)} =: \tau > 0$ . Insbesondere gilt  $t(s_1) - t(s_0) \geq \tau(s_1 - s_0)$ .

In jedem Fall durchläuft die  $t$ -Komponente ganz  $\mathbb{R}$ , somit trifft die Kurve  $c$  die Hyperfläche  $S$ . Aus Korollar 2.7.13 (2) folgt, dass  $S$  eine Cauchy-Hyperfläche ist.

Setze  $P := \{0\} \times \{r_0\} \times S^2$ . Die Teilmenge  $P$  ist nichtleere kompakte raumartige Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2, die in  $S$  enthalten ist. Da  $S \subset M$  totalgeodätisch ist, ist das mittlere Krümmungsvektorfeld von  $P$  in  $M$  dasselbe wie dasjenige von  $P$  in  $S$ , also raumartig. Hier können wir Satz 2.9.8 also nicht anwenden.

2) *Innere Schwarzschild-Lösung:*

Wir betrachten jetzt  $(M, g) := (\mathbb{R} \times (0, 2m) \times S^2, g := -h(r)dt \otimes dt + \frac{1}{h(r)}dr \otimes dr + r^2g_{S^2})$ . Wegen  $h < 0$  auf  $(0, 2m)$  ist  $\frac{\partial}{\partial t}$  raumartig und  $\frac{\partial}{\partial r}$  zeitartig.

Setze  $S := \mathbb{R} \times \{r_0\} \times S^2$ ,  $0 < r_0 < 2m$ . Ähnliche Diskussion wie oben liefert:  $S$  ist raumartige und nicht kompakte Cauchy-Hyperfläche. Setze  $P := \{0\} \times \{r_0\} \times S^2$ . Die Hyperfläche  $T := \{0\} \times (0, 2m) \times S^2$  von  $M$  ist totalgeodätisch. Das mittlere Krümmungsvektorfeld  $H$  von  $P \subset M$  ist dasselbe wie von  $P \subset T$ . Wegen  $H$  normal gilt  $H = c(r_0) \frac{\partial}{\partial r}$ , wobei  $c(r_0)$  unabhängig vom Punkt in  $P$  ist, da die Gruppe  $SO_3$  isometrisch auf  $M$  und transitiv auf  $P$  operiert. Man berechnet  $c(r_0) := -\frac{1}{r_0}$ . Also ist das mittlere Krümmungsvektorfeld zeitartig und, bei richtiger Wahl der Zeitorientierung, vergangenheitsorientiert. Satz 2.9.8 sagt uns nun, dass es lichtartige Geodätische gibt, deren maximaler Definitionsbereich nicht ganz  $\mathbb{R}$  ist. Diese werden als Weltlinien von Photonen interpretiert, die in das "Schwarze Loch" stürzen.

## 2.10 Struktur global-hyperbolischer Mannigfaltigkeiten

*Erinnerung:* Eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist global-hyperbolisch genau dann, wenn  $J(p, q)$  kompakt ist für alle  $p$  und  $q$  in  $M$  und die starke Kausalitätsbedingung gilt. Wir wissen schon: Besitzt  $M$  eine Cauchy-Hyperfläche, so ist  $M$  global-hyperbolisch (Korollar 2.7.4).

Sei nun  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Wähle  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt mit  $f > 0$  und  $\int_M f \, \text{dvol} = 1$ .

**Bemerkung 1:** Hier bezeichnet  $\text{dvol}$  das riemannsche Volumenelement. Für integrierbare Funktionen  $\varphi$ , deren Träger in einer Karte  $x : U \rightarrow V$  mit Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  liegt, gilt:

$$\int_M \varphi \, \text{dvol} = \int_M \varphi(x) \sqrt{|\det(g_{ij}(x))|} dx^1 \dots dx^n.$$

**Bemerkung 2:** Es gibt ein  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f > 0$  und  $\int_M f \, \text{dvol} = 1$ .

Im Fall, dass  $\text{vol}(M) := \int_M \text{dvol} < \infty$ , ist dies trivial, denn dann tut's die konstante Funktion  $f := \frac{1}{\text{vol}(M)}$ . Andernfalls wähle Teilung der Eins  $(\rho_j)_{j=1, \dots, \infty}$ , wähle  $c_j > 0$  s.d.  $c_j \int_M \rho_j \, \text{dvol} = 2^{-j}$ . Setze  $f := \sum_{j=1}^{\infty} c_j \rho_j$ . Dann gilt  $f > 0$  und

$$\begin{aligned} \int_M f \, \text{dvol} &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \int_M \rho_j \, \text{dvol} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen  $v_+, v_- : M \rightarrow [0, 1]$ ,  $v_\pm(p) := \int_{I_\pm(p)} f \, \text{dvol}$ .

**LEMMA 2.10.1.** Sei  $c : (a, b) \rightarrow M$  eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve. Dann ist  $v_+ \circ c$  monoton fallend und  $v_- \circ c$  monoton wachsend. Erfüllt  $M$  die Chronologie-Bedingung, so ist  $v_\pm \circ c$  streng monoton.

*Beweis.* Sei  $t_1 < t_2$ . Dann ist  $c(t_1) \ll c(t_2)$ , insbesondere gilt  $I_+(c(t_2)) \subset I_+(c(t_1))$

$\xrightarrow{f>0} \int_{I_+(c(t_2))} f \, \text{dvol} \leq \int_{I_+(c(t_1))} f \, \text{dvol}$ , d.h.  $v_+(c(t_2)) \leq v_+(c(t_1))$ . Analog erhalte Monotonie für  $v_- \circ c$ .

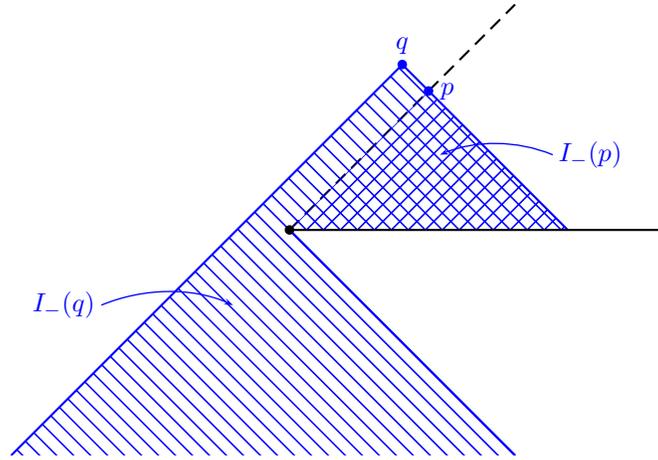
Es gelte nun die Chronologie-Bedingung. Nun ist  $I_-(c(t_2)) \cap I_+(c(t_1))$  eine offene Menge, nicht-leer, da sie alle Punkte  $c(t)$  mit  $t_1 < t < t_2$  enthält, und disjunkt zu  $I_+(c(t_2))$ , da ein Punkt in  $I_-(c(t_2)) \cap I_+(c(t_2))$  zu einer geschlossenen zeitartigen Kurve führen würde im Widerspruch zur Chronologie-Bedingung. Somit gilt

$$\begin{aligned} v_+(c(t_2)) &= \int_{I_+(c(t_2))} f \, \text{dvol} < \int_{I_+(c(t_2))} f \, \text{dvol} + \int_{I_-(c(t_2)) \cap I_+(c(t_1))} f \, \text{dvol} \\ &\leq \int_{I_+(c(t_1))} f \, \text{dvol} = v_+(c(t_1)). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** Im Allgemeinen sind  $v_+$  und  $v_-$  nicht stetig.

**Beispiel.** Sei  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x) \mid x \geq 0\}$  mit Minkowski-Metrik.



Die Funktion  $v_-$  ist unstetig längs  $\{(t, x) \mid t = x > 0\}$ , und  $v_+$  ist unstetig längs  $\{(t, x) \mid t = -x < 0\}$ .

**LEMMA 2.10.2.** Die Funktionen  $v_+$  und  $v_-$  sind unterhalbstetig.

*Beweis.* Seien  $p_i, p$  in  $M$  mit  $p_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p$ . Zu zeigen ist  $\varliminf_{i \rightarrow \infty} v_{\pm}(p_i) \geq v_{\pm}(p)$ .

Betrachte  $v_+$ . Zu  $q \in I_+(p)$  gilt:  $p \in I_-(q)$ , also  $p_i \in I_-(q)$  für  $i \gg 0$  und somit  $I_+(q) \subset I_+(p_i)$  für  $i \gg 0$ . Daraus folgt  $v_+(p_i) \geq \int_{I_+(q)} f \, \text{dvol}$  für  $i \gg 0$

$$\implies \varliminf_{i \rightarrow \infty} v_+(p_i) \geq \int_{I_+(q)} f \, \text{dvol}. \quad (2.5)$$

Wähle zukunftsgerichtete zeitartige Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und setze  $q_n := c(\frac{1}{n})$ . Dann gilt:  $I_+(q_n) \subset I_+(q_{n+1})$  und

$$\cup_{n=1}^{\infty} I_+(q_n) = I_+(p).$$

Die Inklusion " $\subset$ " ist klar.

Zu " $\supset$ ": Sei  $z \in I_+(p)$ , dann ist  $p \in I_-(z)$ , also  $q_n \in I_-(z)$  für  $n \gg 0$ , d.h.  $z \in I_+(q_n)$  für  $n \gg 0$  ✓  
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_+(q_n)} f \, \text{dvol} = \int_{I_+(p)} f \, \text{dvol} = v_+(p)$

$$\stackrel{(2.5)}{\implies} \varliminf_{i \rightarrow \infty} v_+(p_i) \geq v_+(p). \quad \square$$

**LEMMA 2.10.3.** Ist  $M$  global-hyperbolisch, so sind  $v_+$  und  $v_-$  stetig.

*Beweis.* Seien  $p_i, p$  in  $M$  mit  $p_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p$ . Zu zeigen ist  $\overline{\varliminf}_{i \rightarrow \infty} v_{\pm}(p_i) \leq v_{\pm}(p)$ .

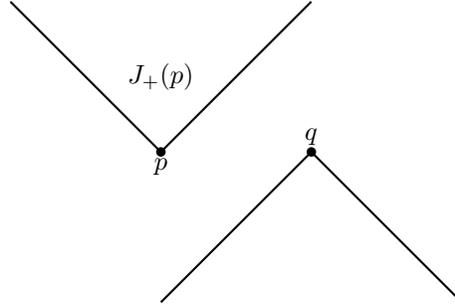
Betrachte wieder  $v_+$ .

a) **Behauptung:** Für  $q \in M \setminus J_+(p)$  ist  $I_-(q) \cap I_+(p_i) = \emptyset$  für  $i \gg 0$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen, es existiert  $r_i \in I_-(q) \cap I_+(p_i)$  für unendlich viele  $i$ . Dann gilt  $q \gg r_i \gg p_i$  für unendlich viele  $i$ . Wegen  $p_i \rightarrow p$ , und da " $\gg$ " abgeschlossen ist für global-hyperbolische Mannigfaltigkeiten, gilt dann  $q \geq p$ , und somit  $q \in J_+(p)$ , im Widerspruch zur Annahme. ✓

b) Da  $J_+(p)$  abgeschlossen ist (Lemma 2.9.7), gilt

$$M \setminus J_+(p) = \bigcup_{q \in M \setminus J_+(p)} I_-(q).$$



Da  $M$  eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{x_n\}_{n=1, \dots, \infty} \subset M \setminus J_+(p)$ . Wähle zu jedem  $x_n$  ein  $q_n \in M \setminus J_+(p)$  mit  $x_n \in I_-(q_n)$ . Dann ist

$$M \setminus J_+(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_-(q_n).$$

Setze  $X_N := \bigcup_{n=1}^N I_-(q_n)$ . Dann gilt  $X_N \subset X_{N+1}$ ,  $X_N$  ist offen,  $\bigcup_{N=1}^{\infty} X_N = M \setminus J_+(p)$ , und wegen Teil a) ist

$$X_N \cap I_+(p_i) = \emptyset \quad \forall i \gg 0$$

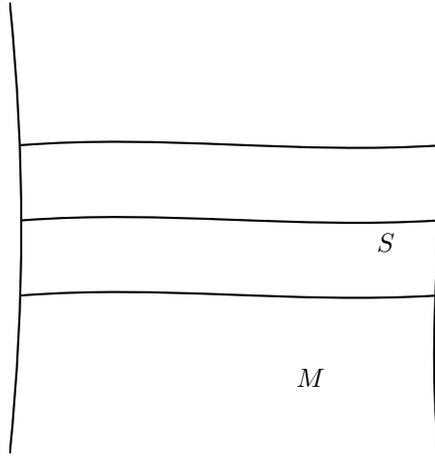
$$\implies \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} v_+(p_i) \leq 1 - \int_{X_N} f \, \text{dvol}.$$

Der Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  liefert

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} v_+(p_i) &\leq 1 - \int_{M \setminus J_+(p)} f \, \text{dvol} = \int_{J_+(p)} f \, \text{dvol} \\ &= \int_{I_+(p)} f \, \text{dvol} \quad (\partial I_+(p) \text{ ist Nullmenge}) \\ &= v_+(p). \end{aligned}$$

□

**SATZ 2.10.4** (Geroch 1970). Sei  $M$  global-hyperbolisch. Dann besitzt  $M$  eine Cauchy-Hyperfläche  $S$  und es gibt einen Homöomorphismus  $\mathbb{R} \times S \rightarrow M$ , unter dem jedes  $\{t\} \times S$  auf eine Cauchy-Hyperfläche abgebildet wird.



*Beweis.*

a) **Behauptung:** Sei  $c : [a, b) \rightarrow M$  eine zukunftsrichterweiterbare zeitartige Kurve. Dann gilt  $\lim_{t \rightarrow b} v_+ \circ c(t) = 0$  (analog  $\lim_{t \rightarrow b} v_- \circ c(t) = 0$  falls  $c$  vergangenheitsrichterweiterbar ist).

*Beweis der Behauptung:* Sei  $q \in M$ . Da  $M$  global-hyperbolisch ist, ist  $J(c(a), q)$  kompakt, und da auch die starke Kausalitätsbedingung gilt, existiert nach Lemma 2.6.2 ein  $t_0 \in [a, b)$  s.d.  $c(t) \notin J(c(a), q)$  für alle  $t \geq t_0$

$\implies c(t) \notin J_-(q)$  für alle  $t \geq t_0$

$\implies I_+(c(t)) \cap I_-(q) = \emptyset$  für alle  $t \geq t_0$  (ansonsten würde ein  $r$  existieren s.d.  $c(t) \ll r \ll q$ , also  $c(t) \ll q$ , Widerspruch).

Seien  $(q_n)_{n=1, \dots, \infty}$  mit  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_-(q_n)$ . Setze  $X_N := \bigcup_{n=1}^N I_-(q_n)$ .

Zu jedem  $N$  gibt es ein  $t_N \in [a, b)$  s.d.  $I_+(c(t)) \cap X_N = \emptyset$  für alle  $t \geq t_N$ . Für diese  $t$  gilt dann

$$v_+(c(t)) = \int_{I_+(c(t))} f \, \text{dvol} \leq 1 - \int_{X_N} f \, \text{dvol}$$

$\implies \overline{\lim}_{t \rightarrow b} v_+(c(t)) \leq 1 - \int_{X_N} f \, \text{dvol}$  für alle  $N$

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow b} v_+(c(t)) \leq 1 - \int_M f \, \text{dvol} = 0.$  ✓

b) **Behauptung:** Für jedes  $v_0 > 0$  ist  $S(v_0) := \{q \in M \mid \frac{v_-(q)}{v_+(q)} = v_0\}$  eine Cauchy-Hyperfläche.

*Beweis der Behauptung:* Die Teilmenge  $S$  ist achronal, da  $\frac{v_-}{v_+}$  längs jeder zeitartigen Kurve streng monoton ist.

Sei nun  $c : (a, b) \rightarrow M$  eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve. Wähle  $t_0 \in (a, b)$ . Für  $t \geq t_0$  gilt

$$\frac{v_-(c(t))}{v_+(c(t))} \geq \frac{v_-(c(t_0))}{v_+(c(t_0))} \xrightarrow{t \rightarrow b} \infty,$$

und für  $t \leq t_0$

$$\frac{v_-(c(t))}{v_+(c(t))} \leq \frac{v_-(c(t_0))}{v_+(c(t_0))} \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$$

$\implies \frac{v_-}{v_+} \circ c$  ist streng monoton wachsende stetige Funktion, die  $(a, b)$  bijektiv auf  $(0, \infty)$  abbildet

$\implies \exists! t \in (a, b)$  s.d.  $\frac{v_-(c(t))}{v_+(c(t))} = v_0$

$\implies c(t) \in S(v_0)$ , d.h.  $c$  trifft  $S(v_0)$ . ✓

c) Sei nun  $\rho_{v_1, v_2} : S(v_1) \rightarrow S(v_2)$  der Homöomorphismus, der durch den Fluss eines glatten zeitartigen Vektorfeldes auf  $M$  induziert wird. Definiere

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \mathbb{R} \times S(1), \\ q &\longmapsto \left( \ln \left( \frac{v_-(q)}{v_+(q)} \right), \rho_{\frac{v_-(q)}{v_+(q)}, 1}(q) \right). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\phi$  ist stetig und bildet die Cauchy-Hyperfläche  $S(v)$  bijektiv auf  $\{\ln(v)\} \times S(1)$  ab. Insbesondere ist  $\phi$  selbst bijektiv und somit ein Homöomorphismus.  $\square$

**SATZ 2.10.5** (Bernal-Sánchez 2004). *Sei  $M$  global-hyperbolisch. Dann ist  $M$  isometrisch zu  $\mathbb{R} \times S$  mit Metrik  $g = -\beta d\tau^2 + g_\tau$ , wobei  $\beta : \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und positiv ist und  $g_\tau$  ist glatte Familie riemannscher Metriken auf  $S$ . Ferner sind alle  $\{\tau_0\} \times S$  glatte raumartige Cauchy-Hyperflächen.*

Zusammengefasst ergibt sich:

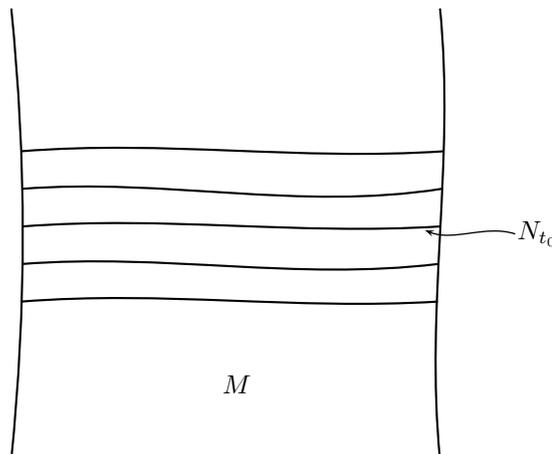
**THEOREM 2.10.6.** *Sei  $M$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

- (1)  $M$  ist global-hyperbolisch.
- (2)  $M$  besitzt eine (topologische) Cauchy-Hyperfläche.
- (3)  $M$  besitzt eine glatte raumartige Cauchy-Hyperfläche.
- (4)  $M$  ist isometrisch zu  $(\mathbb{R} \times S, -\beta d\tau^2 + g_\tau)$  wie in Satz 2.10.5.

*Beweis des Satzes 2.10.6.*

- (4)  $\implies$  (3) und (3)  $\implies$  (2) sind trivial.  
 (2)  $\implies$  (1) folgt aus Korollar 2.7.4.  
 (1)  $\implies$  (4): Satz 2.10.5  $\square$

Den Rest dieses Abschnitts widmen wir dem Beweis von Satz 2.10.5. Sei  $M$  global-hyperbolisch. Sei  $t := \ln\left(\frac{v_-}{v_+}\right) : M \rightarrow \mathbb{R}$  die stetig surjektive Funktion von Geroch, die längs jeder zukunftsgerichteten zeitartigen Kurve streng monoton wächst und für die die  $N_{t_0} := t^{-1}(t_0)$  Cauchy-Hyperflächen sind.

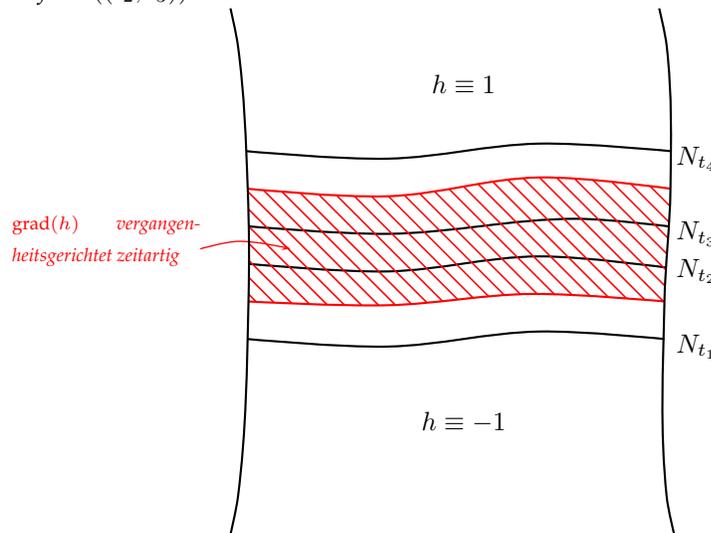


Es gilt dann:

$$\begin{aligned} J_+(N_{t_0}) &= t^{-1}([t_0, \infty)) \\ J_-(N_{t_0}) &= t^{-1}((-\infty, t_0]) \\ I_+(N_{t_0}) &= t^{-1}((t_0, \infty)) \\ I_-(N_{t_0}) &= t^{-1}((-\infty, t_0)) \end{aligned}$$

**LEMMA 2.10.7.** Für alle  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  existiert eine glatte Funktion  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  s.d.

- (i)  $-1 \leq h \leq 1$ .
- (ii)  $\text{grad}(h)$  ist dort, wo er nicht verschwindet, vergangenheitsgerichtet zeitartig.
- (iii)  $h \equiv -1$  auf  $t^{-1}((-\infty, t_1))$  und  $h \equiv +1$  auf  $t^{-1}((t_4, \infty))$ .
- (iv)  $\text{grad}(h) \neq 0$  auf  $t^{-1}((t_2, t_3))$ .



Wir verlegen den Beweis des Lemmas 2.10.7 hinter den Beweis von Satz 2.10.5.

*Beweis von Satz 2.10.5.*

a) Zu jedem  $k \in \mathbb{Z}$  erhalte Funktion  $h_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  aus Lemma 2.10.7 mit  $t_1 := k - 2, t_2 := k - 1, t_3 := k + 1, t_4 := k + 2$ . Setze  $\tau := h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{-k} + h_k)$ .

$t$		$-k-2$	$-k+2$	$0$	$k-2$	$k+2$
$h_{-k} + h_k$	$-2$	$\in [-2, 0]$	$0$	$\in [0, 2]$	$2$	

Für jedes Kompaktum  $K \subset M$  existiert ein  $k_0$  s.d.  $h_{-k} + h_k = 0$  auf  $K$  für alle  $k \geq k_0$ . Daraus folgt, dass  $\tau$  eine wohldefinierte glatte Funktion ist.

b) **Behauptung:**  $\text{grad}(\tau)$  ist zeitartig vergangenheitsgerichtet auf  $M$ .

*Beweis der Behauptung:* Zu  $x \in M$  ist  $\text{grad}(h_k)(x)$  entweder 0 oder vergangenheitsgerichtet zeitartig. Für das  $k$  mit  $x \in t^{-1}((k - 1, k + 1))$  ist  $\text{grad}(h_k)(x)$  vergangenheitsgerichtet zeitartig,

insbesondere sind die Niveaumengen von  $\tau$   $S_{\tau_0} := \tau^{-1}(\tau_0)$  raumartige Hyperflächen. ✓

c) **Behauptung:** Jedes  $S_{\tau_0}$  ist Cauchy-Hyperfläche.

*Beweis der Behauptung:* Sei  $c : (a, b) \rightarrow M$  eine nichterweiterbare zukunftsgerichtete zeitartige Kurve. Es gilt:

$$\frac{d}{ds} \tau(c(s)) = \langle \underbrace{\text{grad}(\tau)}_{\substack{\text{vergangenheitsger.} \\ \text{zeitartig}}}, \underbrace{\dot{c}(s)}_{\substack{\text{zukunftsger.} \\ \text{zeitartig}}} \rangle > 0$$

$\implies \tau \circ c$  ist streng monoton wachsend

$\implies \tau \circ c$  nimmt den Wert  $\tau_0$  höchstens einmal an, d.h.  $c$  trifft  $S_{\tau_0}$  höchstens einmal.

Fixiere  $t_0$  und sei  $x \in t^{-1}([t_0, \infty))$ . Es gilt:

$$\tau(x) = h_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{-k}(x) + h_k(x)) \geq -1 + \sum_{k=1}^{[t_0-2]} 2 = -1 + 2[t_0 - 2] = 2[t_0] - 5.$$

Zu  $\tau_+ > \tau_0$  ist für  $x \in N_{t_0}$  mit  $2[t_0] - 5 > \tau_+$  der Wert  $\tau(x) \geq \tau_+$ . Die Teilmenge  $N_{t_0}$  ist aber Cauchy-Hyperfläche

$\implies c$  trifft  $N_{t_0}$

$\implies \tau \circ c$  nimmt Wert  $\geq \tau_+ \geq \tau_0$  an.

Analog nimmt  $\tau \circ c$  auch Wert  $\leq \tau_0$  an

$\implies c$  trifft  $S_{\tau_0}$ . ✓

d) Betrachte den Diffeomorphismus  $\phi : \mathbb{R} \times S_0 \rightarrow M$ , der durch  $\tau$  und den Fluss längs  $\text{grad}(\tau)$  induziert wird. Die längs  $\phi$  zurückgezogene Metrik auf  $\mathbb{R} \times S_0$  ist von der Form  $-\beta d\tau^2 + g_\tau$ , da die Niveaumengen  $S_{\tau_0}$  raumartig sind und  $\text{grad}(\tau) \perp S$  (das Gradientenvektorfeld ist immer senkrecht zu den Niveauflächen). □

Bevor wir zum Beweis von Lemma 2.10.7 kommen, brauchen wir ein weiteres technisches Lemma. Zu dessen Beweis benötigt man den berühmten Einbettungssatz von Whitney.

**SATZ 2.10.8 (Whitney).** *Jede  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit lässt sich differenzierbar dergestalt in den  $\mathbb{R}^{2n+1}$  einbetten, dass das Bild eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist.*

*Beweis.* Siehe z.B. Originalarbeit von H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann.Math. 37 (1936), 1-36 □

**FOLGERUNG 2.10.9.** *Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine vollständige riemannsche Metrik.*

*Beweis.* Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Bette diese differenzierbar vermöge Whitney'schen Einbettungssatzes  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  abgeschlossen in den  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ein. Dann ist  $(M, i^*g_0)$  eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei  $g_0$  die euklidische Standardmetrik des  $\mathbb{R}^{2n+1}$  bezeichne. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, dass jede Cauchyfolge in  $(i(M), g_0|_{i(M)})$  einen Grenzwert in  $(i(M), g_0|_{i(M)})$  besitzt. Ist  $p_n \in i(M)$  eine Cauchyfolge bzgl.  $g_0|_{i(M)}$ , so auch eine in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  bzgl.  $g_0$ . Da  $(\mathbb{R}^{2n+1}, g_0)$  vollständig ist, konvergiert sie gegen einen Punkt  $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$ . Wegen der Abgeschlossenheit von  $i(M)$  in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist  $p \in i(M)$ . Satz von Hopf-Rinow  $\implies$  Behauptung. □

**LEMMA 2.10.10.** Sei  $d_R$  die riemannsche Abstandsfunktion einer vollständigen riemannschen Hilfsmetrik  $g_R$  auf  $M$ . Sei  $N$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $M$  und  $\mathcal{W} = \{W_\alpha \subset M \mid \alpha \in I\}$  eine Familie offener Teilmengen von  $M$  die  $N$  überdecken. Jedes  $W_\alpha$  sei enthalten in einer offenen Teilmenge  $C_\alpha$  mit Durchmesser  $\sup\{d_R(p, q) \mid p, q \in C_\alpha\} < 1$ . Dann existiert eine abzählbare lokal endliche Teilfamilie  $\mathcal{W}' = \{W_j \subset M \mid j \in \mathbb{N}\}$  von  $\mathcal{W}$ , die  $N$  überdeckt. Die entsprechende Teilfamilie  $\{C_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  mit  $W_j \subset C_j$  ist ebenfalls lokal endlich.

*Beweis.* Sei  $p \in M$ . Es bezeichne  $B_p(r)$  bzw.  $\overline{B}_p(r)$  den offen bzw. abgeschlossenen Ball um  $p$  mit Radius  $r > 0$ . Da  $(M, g_R)$  vollständig ist, sind die abgeschlossenen Bälle kompakt und damit auch die Mengen

$$K_m := \overline{B}_p(m) \setminus B_p(m-1), \quad (M \subset \cup_m K_m)$$

$$N_m := K_m \cap N, \quad (N \subset \cup_m N_m)$$

für jedes  $m \in \mathbb{N}$ . Wegen der Kompaktheit wird  $N_m$  bereits von endlich vielen  $W_{1m}, \dots, W_{k_m} \in \mathcal{W}$  überdeckt. Die Menge

$$\mathcal{W}' = \{W_{km} \mid m \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, k_m\}$$

(und ebenso die entsprechende Familie der  $C_j$ ) ist abzählbar, überdeckt  $N$  und ist lokal endlich, da  $W_{km} \cap W_{k'm'} = \emptyset$  für  $|m - m'| \geq 3$ .  $\square$

*Beweis von Lemma 2.10.7.*

Die Konstruktion der Funktion erfolgt in mehreren Schritten; dazu sei im folgenden  $M$  stets global-hyperbolisch und  $t := \ln(\frac{v_-}{v_+}) : M \rightarrow \mathbb{R}$  die stetige surjektive 'Zeitfunktion' von Geroch:

a) **Behauptung:** Sei  $t_1 < t_2$ . Schreibe  $N_i := N_{t_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Sei  $p \in N_2$  und  $C_p \subset I_+(N_1)$  eine konvexe Umgebung von  $p$ . Dann existiert eine glatte Funktion  $H_p : M \rightarrow [0, \infty)$  so dass

(i)  $H_p(p) = 1$ .

(ii)  $\text{supp}(H_p)$  ist kompakt und in  $C_p \cap I_+(N_1)$  enthalten.

(iii) Für  $q \in J_-(N_2)$  mit  $\text{grad}(H_p)(q) \neq 0$  ist  $\text{grad}(H_p)(q)$  vergangenheitsgerichtet zeitartig.

*Beweis der Behauptung:* Sei  $\tau$  die Zeitunterschiedsfunktion auf  $C_p$ . Wähle  $p' \in I_-(p) \cap I_+(N_1)$  s.d.  $J_+(p') \cap J_-(N_2) \subset C_p$  und definiere  $H_p$  auf  $I_-(N_2)$  durch

$$H_p(q) := \begin{cases} e^{\tau(p', p)^{-2} - \tau(p', q)^{-2}} & \text{falls } q \in I_-(N_2) \cap C_p \\ 0 & \text{falls } q \in I_-(N_2) \setminus C_p. \end{cases}$$

und setze  $H_p$  geeignet auf  $M$  mit kompaktem Träger in  $C_p$  fort. Nach Konstruktion sind (i) und (ii) erfüllt. Zu (iii) betrachte man auf  $C_p$  die Funktion  $f := -\tau(p', \cdot)^2/2$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C_p$  die eindeutige zeitartige zukunftsgerichtete Geodätische mit  $\gamma(0) = p'$  und  $\gamma(1) = q$ . Nun gilt

(I)  $\forall t, t' \in [0, 1]$  ist mit  $c := \sqrt{-g(\dot{\gamma}(1), \dot{\gamma}(1))}$  und  $t' < t$

$$\tau(\gamma(t'), \gamma(t)) = \int_{t'}^t |\dot{\gamma}(t)| dt = (t - t') \cdot c \quad ,$$

d.h. läuft man längs  $\gamma$  vorwärts bzw. rückwärts, so läuft man in Richtung des stärksten Anstiegs bzw. Abfalls von  $\tau(p', \cdot)$ .

(II)  $\text{grad}(f)(q)$  zeigt in die Richtung des maximalen Anstiegs von  $\tau(p', \cdot)$ .

$\implies \exists \alpha \neq 0$  mit  $\text{grad}(f)(q) = \alpha \cdot \dot{\gamma}(1)$  und somit

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \cdot \frac{g(\dot{\gamma}(1), \dot{\gamma}(1))}{-c^2} = \frac{-1}{c^2} \cdot g(\text{grad}(f)(q), \dot{\gamma}(1)) \\ &= \frac{-1}{c^2} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=1} \stackrel{(I)}{=} \frac{-1}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{-t^2 c^2}{2} \right) \Big|_{t=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\implies \text{grad}(f)(q) = \dot{\gamma}(1)$ , womit die Behauptung gezeigt ist.  $\checkmark$

**b) Behauptung:** Sei  $t_1 < t_2$  und  $N_i, i = 1, 2$  wie in Behauptung a). Dann existiert eine glatte Funktion  $H : M \rightarrow [0, \infty)$  so dass

(1)  $H(p) = 0$  für  $p \in J_-(N_1)$ .

(2)  $H(p) > 1/2$  für  $p \in N_2$ .

(3)  $\text{grad}(H)$  ist zeitartig vergangenheitsgerichtet auf  $V := H^{-1}((0, 1/2)) \cap I_-(N_2)$ .

*Beweis der Behauptung:* Sei  $d_R$  die riemannsche Abstandsfunktion einer vollständigen Hilfsmetrik wie in Lemma 2.10.10. Zu  $p \in N_2$  sei  $\mathcal{C}_p$  eine konvexe Umgebung von  $p$  mit Durchmesser  $< 1$  und  $H_p$  die entsprechende Funktion aus Behauptung a). Setze

$$W_p := H_p^{-1}((1/2, \infty)), \quad (W_p \subset \mathcal{C}_p)$$

Die Familie  $\mathcal{W} = \{W_p \mid p \in N_2\}$  offener Mengen überdeckt  $N_2$  und erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas 2.10.10. Also existiert eine abzählbare lokal endliche Teilfamilie  $\mathcal{W}' = \{W_j \subset M \mid j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{W}$ , die  $N_2$  überdeckt. Zu  $W_j := W_{p_j} \in \mathcal{W}'$  sei  $H_j := H_{p_j}$  die entsprechende Funktion mit kompakten Träger in  $\mathcal{C}_j := \mathcal{C}_{p_j}$ . Setze

$$H := \sum_j H_j$$

Die Funktion  $H : M \rightarrow [0, \infty)$  ist wohldefiniert und glatt, da die Familie  $\{\text{supp}(H_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$  lokal endlich ist. (Denn:  $\{\mathcal{C}_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nach Lemma 2.10.10 lokal endliche Familie!) Die Bedingungen (1) und (3) sind erfüllt, da jedes  $H_j$  diese erfüllt. Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  und  $p \in W_j$  gilt  $H_j(p) > 1/2$ . Da  $N_2 \subset \cup_j W_j$ , folgt  $H(p) > 1/2$  für  $p \in N_2$ .  $\checkmark$

**c) Behauptung:** Sei  $t_1 < t_0 < t_2$ . Sei  $N = N_{t_0}$  eine Cauchy Hyperfläche. Dann existiert eine offene Menge  $U$  mit

$$J_-(N) \subset U \subset I_-(N_{t_2})$$

und eine Funktion  $H^+ : M \rightarrow [0, \infty)$  so dass

(i)  $\text{supp}(H^+) \subset I_+(N_{t_1})$

(ii) Für  $p \in U$  mit  $H^+(p) > 0$  ist  $\text{grad}(H^+)(p)$  zeitartig vergangenheitsgerichtet.

(iii)  $H^+ > 0$  ( und deswegen ist  $\text{grad}(H^+)$  zeitartig vergangenheitsgerichtet) auf  $J_+(N) \cap U$ .

*Beweis der Behauptung:* Erhalte  $U$  wie folgt: Wähle z.B. konvexe Umgebungen wie in der Konstruktion von  $H$  im Beweis von Behauptung b), die  $N$  überdecken und ganz in  $I_-(N_{t_2})$  liegen. Als  $U$  nimm  $I_-(N)$  vereinigt mit der Vereinigung dieser Umgebungen. Setzt man nun  $N_2 := N_{t_0}$  und  $N_1 := N_{t_1}$ , so erfüllt  $H$  aus Behauptung b) die geforderten Eigenschaften und liefert somit  $H^+$ .  $\checkmark$

**d) Behauptung:** Sei  $t_0 < t_2$ . Sei  $N := N_{t_0}$  eine Cauchy Hyperfläche und  $U \subset I_-(N_{t_2})$  eine offene Umgebung von  $J_-(N)$ . Dann existiert eine Funktion  $H^- : M \rightarrow (-\infty, 0]$  so dass

- (1)  $\text{supp}(H^-) \subset U$ .  
 (2) Ist für  $p \in U$  der  $\text{grad}(H^-)(p) \neq 0$ , so ist  $\text{grad}(H^-)(p)$  zeitartig vergangenheitsgerichtet.  
 (3)  $H^- \equiv 1$  auf  $J_-(N)$ .

*Beweis der Behauptung:* Der Beweis verläuft ähnlich dem von Behauptung b). Bezeichne nur in diesem Beweis alle Größen bzgl. der gegebenen Zeitorientierung ohne Schlange und mit Schlange bzgl. der umgekehrten Zeitorientierung, z.B.  $\tau$  die Zeitunterschiedsfunktion bzgl. der gegebenen Zeitorientierung und  $\tilde{\tau}$  die bzgl. der umgekehrten,  $\tilde{I}_-(N) = I_+(N)$  usw. Setze  $N_2 := N_{t_0}$  und  $N_1 := N_{t_2}$ . Überdecke  $N$  mit konvexen Umgebungen  $\mathcal{C}_p$  wie im Beweis von Behauptung b), die ganz in  $U$  liegen. Konstruiere  $H$  wie im Beweis von Behauptung b) als Summe aus den  $(-1) \cdot \tilde{H}_p$  (das sind genau die  $\tilde{H}_p$  bzgl. der umgekehrten Zeitorientierung mal  $(-1)$  von Behauptung a)). Das so erhaltene  $H$  genügt allen Eigenschaften bis auf (3). Bemerke, dass  $H(p) < -1/2$  für alle  $p \in N$ . Definiere  $H^- := \Phi \circ H$ , wobei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion sei mit

$$\Phi(x) = -1 \text{ für alle } x \in (-\infty, -1/2).$$

$$\Phi'(x) > 0 \text{ für alle } x \in [-1/2, 0].$$

$$\Phi(0) = 0.$$

Offenbar leistet das so definierte  $H^-$  das gewünschte. ✓

e) **Behauptung:** Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  beliebig und  $N := N_{t_0}$ . Dann existiert eine Funktion  $\hat{H} := \hat{H}_{t_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die den ersten drei Bedingungen aus Lemma 2.10.7 genügt und ausserdem

$$(iv') \ N \subset V := (\text{supp}(\text{grad}(\hat{H})))^\circ \quad (= \text{Innere von } \text{supp}(\text{grad}(\hat{H})))$$

*Beweis der Behauptung:* Nimm  $U, H^+$  und  $H^-$  aus den zwei vorherigen Behauptungen.

Es ist  $H^+ - H^- > 0$  auf  $U$ . Setze

$$\hat{H}_{t_0} := 2 \cdot \frac{H^+}{H^+ - H^-} - 1$$

auf  $U$  und identisch 1 auf  $M \setminus U$ .  $\hat{H}_{t_0}$  ist glatt und

$$\text{grad}(\hat{H}_{t_0}) = 2 \cdot \frac{H^+ \cdot \text{grad}(H^-) - H^- \cdot \text{grad}(H^+)}{(H^+ - H^-)^2}$$

ist 0 oder zeitartig vergangenheitsgerichtet.  $\hat{H}_{t_0}$  erfüllt offenbar das verlangte. ✓

Hieraus ergibt sich unmittelbar

f) **Behauptung:** Sei  $t_1 < t_2 < t_0 < t_3 < t_4$  und  $K \subset t^{-1}([t_1, t_2])$  kompakte Teilmenge von  $M$ . Dann existiert eine Funktion  $\tilde{H} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die alle Eigenschaften aus der vorigen Behauptung erfüllt, und zusätzlich:

$$K \subset V = (\text{supp}(\text{grad}(\tilde{H})))^\circ$$

*Beweis der Behauptung:* Für jedes  $N_{t_0}$  mit  $t_0 \in [t_1, t_2]$  wähle entsprechende Funktion  $\hat{H}_{t_0}$  gemäss voriger Behauptung.  $K$  wird von den entsprechenden offenen Mengen  $V_{t_0}$  überdeckt und da  $K$  kompakt ist, reichen endlich viele, etwa  $V_{t_1}, \dots, V_{t_m}$ . Die Funktion

$$\tilde{H} := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \hat{H}_{t_i}$$

leistet das gewünschte. ✓

g) **Behauptung:** Sei  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge zeitartiger Vektoren aus demselben Kegel im Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^n$ . Ist die Reihe  $v = \sum_j v_j$  konvergent, so ist  $v$  ebenfalls zeitartig und liegt in demselben Kegel.

*Beweis der Behauptung:* Da kausale Kegel abgeschlossen sind, ist  $\sum_{j=2}^{\infty} v_j$  ebenfalls kausal. Da die Summe eines kausalen und eines zeitartigen Vektors aus demselben Kegel zeitartig ist, ist  $v = v_1 + \sum_{j=2}^{\infty} v_j$  zeitartig und liegt in demselben Kegel.  $\checkmark$

h) **Behauptung:** Für alle  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  existiert eine glatte Funktion  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die den Bedingungen aus Lemma 2.10.7 genügt.

*Beweis der Behauptung:* Wähle eine Folge  $\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  offener Mengen so dass

$$\overline{G_j} \text{ kompakt ist, } \overline{G_j} \subset G_{j+1} \text{ und } M = \cup_{j=1}^{\infty} G_j.$$

Setze  $K_j := \overline{G_j} \cap J_+(N_{t_2}) \cap J_-(N_{t_3})$  und betrachte für jedes  $K_j$  die Funktion  $\tilde{H}_j := \tilde{H}$  aus Behauptung f) zu  $K := K_j$ . Setze ferner  $V_j := \text{Inneres von } \text{grad}(\tilde{H}_j), K_j \subset V_j$ . Der naive Ansatz

$$\sum_j \frac{1}{2^j} \cdot \tilde{H}_j,$$

definiert zwar eine (wegen lokal normaler Konvergenz) stetige reelle Funktion auf  $M$ , aber weder wissen wir, dass sie glatt ist noch, dass partielles Ableiten mit der Summenbildung vertauscht. Sonst wären wir schon fertig. Geringe Modifikationen beheben diese Mängel: Wähle einen abzählbaren lokal endlichen Atlas  $\mathcal{A} = \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  von  $M$ , so dass jede Karte  $(W, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}$  relativ kompakt ist (d.h.  $\overline{W}$  ist kompakt) und die Einschränkung einer grösseren Karte ist, die  $\overline{W}$  enthält. Jede der Mengen  $\overline{G_j}$  wird nur von endlich vielen  $W_{i_1}, \dots, W_{i_{k_j}}$  geschnitten. Da  $D := \overline{(W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_{k_j}})}$  kompakt ist, gibt es ein  $A_j > 1$  mit  $|\tilde{H}_j| < A_j$  auf  $D$  und so dass für jedes  $s < j$

$$\left| \frac{\partial^s \tilde{H}_j}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2} \dots \partial x_{l_s}}(q) \right| < A_j, \quad \forall q \in D, \forall l_1, \dots, l_s \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.6)$$

Die Reihe

$$H^* := \sum_j \frac{1}{2^j A_j} \cdot \tilde{H}_j,$$

ist nun glatt auf  $M$ . Für beliebiges  $s$  sieht man die stetige Differenzierbarkeit vom Typ  $\mathcal{C}^s$  im Punkt  $p$  wie folgt. Wähle  $j_0 \in \mathbb{N}$  und  $W \in \mathcal{A}$  mit  $p \in G_{j_0} \cap W$ . Nach Konstruktion sind für jedes  $j > \max\{j_0, s\}$  der Summand  $\frac{1}{2^j A_j} \cdot \tilde{H}_j$  und all seine partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $s$  bzgl. der Karte  $(W, x_1, \dots, x_n)$  durch den Wert  $1/2^j$  auf  $G_{j_0} \cap W$  beschränkt. Daher konvergiert die Reihe (2.6) als auch die der partiellen Ableitungen gleichmässig in einer Umgebung von  $p$ , und partielles Ableiten vertauscht mit Summenbildung auf  $M$ . Die Funktion  $H^*$  erfüllt alle Eigenschaften von Lemma 2.10.7 bis auf (i). Stattdessen erfüllt sie  $H^*(J_-(N_{t_1})) \equiv c_- < 0$  und  $H^*(J_+(N_{t_4})) \equiv c_+ > 0$ . Die Funktion  $h := \psi \circ H^*$  ist glatt und leistet das gewünschte, wobei  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion ist mit  $\psi' > 0$ ,  $\psi(c_-) = -1$  und  $\psi(c_+) = 1$ .  $\checkmark \square$

# Literaturverzeichnis

- [Milnor] J. MILNOR: *Topology from the differential viewpoint*. University Press of Virginia, Charlottesville 1965.
- [O'Neill] B. O'NEILL: *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, New York 1983.
- [Sakai] T. SAKAI: *Riemannian geometry*. AMS, Providence 1996.
- [Vick] J.W. VICK: *Homology Theory*. Academic Press, New York 1973.
- [Warner] F. W. WARNER: *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg 1983.

# Index

- Überdeckung, konvexe, 66
- achronal, 71  
akausale Teilmenge, 76  
Anti-de-Sitter-Raum, 16
- Brennpunkt, 50  
Brennstelle, 50
- Cauchy-Entwicklung (Vergangenheits-, Zukunfts-), 84  
Cauchy-Horizont (Zukunfts-, Vergangenheits-), 94  
Cauchy-Hyperfläche, 76, 114  
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 8  
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, inverse, 8  
Chronologiebedingung, 37
- de-Sitter-Raum, 11, 97  
Dreiecksungleichung, Inverse, 39  
Druck, 22
- Einstein, statistisches Universum von, 18  
Einstein-Gleichung, 1  
Endknallsingularität, 100  
Exponentialabbildung, 10
- Friedmann-Kosmos, 22
- Gauß, Lemma von, 32  
Gauß-Formel, 12  
global-hyperbolisch, 81, 98, 99  
Grenzfolge, 67
- Hülle, sternförmige, 63  
Horizontproblem, 23
- Index (einer symmetrischen Bilinearform), 1
- Jacobifeld, 45
- Kante, einer achronalen Teilmenge, 71  
kausal, 4
- Kausalitätsbedingung, 37  
Kausalitätsbedingung, starke-, 37  
konjugierter Punkt, 50  
konvexe Teilmenge, 61
- Länge (einer Kurve), 38  
lichtartig, 4  
Lichtkegel, 4  
Lorentz-Boosts, 7  
Lorentz-Mannigfaltigkeit, 1  
Lorentz-Metrik, 1  
Lorentz-orthonormal, 5  
Lorentz-Transformation, 5
- Massedichte, 22  
Minkowski-Raum, 3, 103  
mittlerer Krümmungsvektor, 99
- Neil'sche Parabel, 22
- Orientierung, Zeit-, 27
- Poincaré-Transformation, 9  
Prägeodätische, 41
- Quasilimes, 68
- raumartig, 4  
Raumzeit, 1  
Robertson-Walker-Raumzeit, 17, 98, 102  
Rotverschiebung, kosmologische, 20
- Schnittkrümmung, 3  
Schwarzschild-Halbebene, 23  
Skalarprodukt (euklidisches, Minkowski-), 3  
starke Energie-Bedingung, 100
- topologische Hyperfläche, 74  
Torus, 10
- Vakuum-Lösung, 12, 17  
vergangenheitsgefangen, 104  
vergangenheitsgerichtet, 4

vergangenheitslichtvollständig, 104

Vergangenheitsmenge, 76

vergangenheitszeitvollständig, 104

Weingarten-Abbildung, 11

zeitartig, 4

Zeitorientierbarkeit, 27

zeitorientierungserhaltend, 9

Zeitunterschied, 38

Zukunft, chronologische, 30

Zukunft, kausale, 30

zukunftsgefangen, 104

zukunftsgerichtet, 4

zukunftslichtvollständig, 104

Zukunftsmenge, 76

zukunftsrichterweiterbar, 71

zukunftszeitvollständig, 104